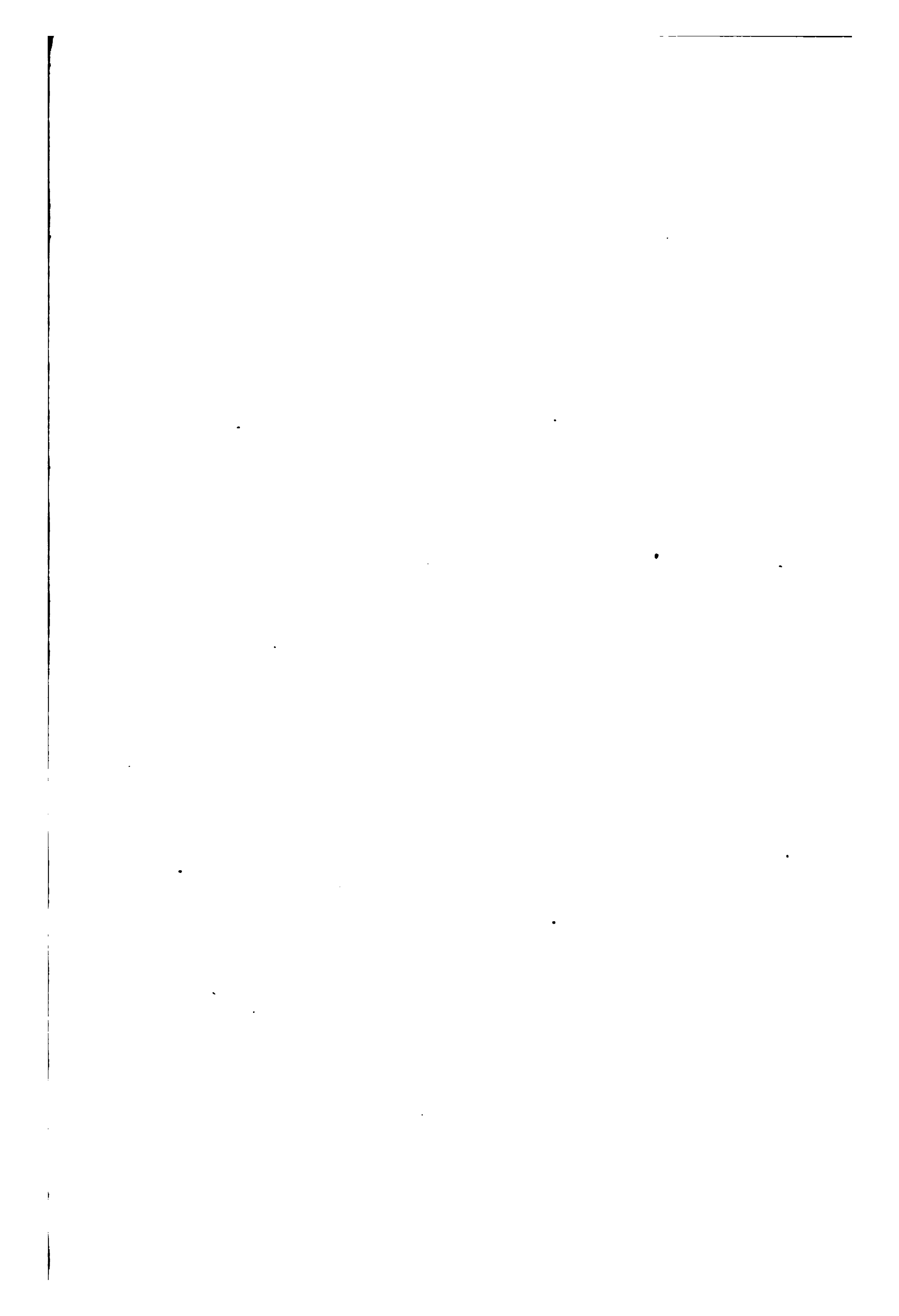


LEHRBUCH

DER

ANALYTISCHEN MECHANIK

VON

DR. OTTO RAUSENBERGER.

IN ZWEI BÄNDEN.

MIT FIGUREN IM TEXT.

ZWEITE, WOHLFEILE AUSGABE IN EINEM BANDE.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1893.

LEHRBUCH

DER

ANALYTISCHEN MECHANIK

VON

DR. OTTO RAUSENBERGER.

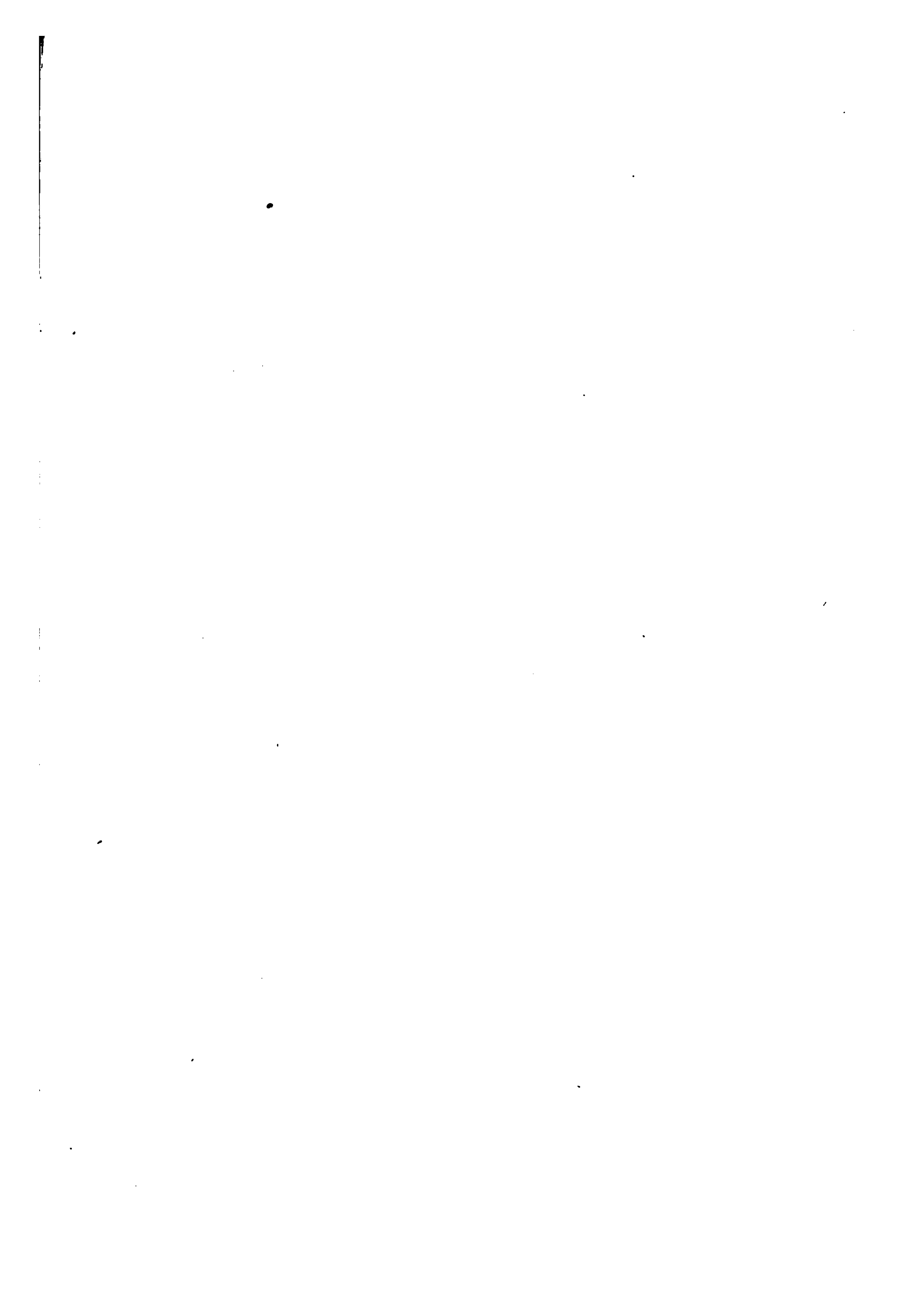
ERSTER BAND.

MECHANIK DER MATERIELLEN PUNKTE.

MIT FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1888.



Vorwort.

In dem Werke, dessen ersten Teil ich hiermit der Öffentlichkeit übergebe, beabsichtige ich eine zusammenhängende, systematische und übersichtliche Darstellung des Gesamtgebietes der analytischen Mechanik vorzutragen. Durch die Bezeichnung „analytisch“ sollen synthetische Betrachtungen da, wo sie zur Vereinfachung und Veranschaulichung der Untersuchung beitragen, keineswegs ausgeschlossen werden, wenn auch die analytische Behandlung vorherrscht; es soll nur durch diese seit Lagrange üblich gewordene Benennung die mathematisch-physikalische, theoretische Mechanik von der technischen und elementaren unterschieden werden.

Die Mechanik kann nach der rein mathematischen Seite hin (Kinematik oder Phoronomie) ausgebildet werden, wie dies in neueren Abhandlungen und Lehrbüchern mehrfach geschieht. Bei der noch unvollständigen systematischen Durchbildung und der immerhin nur sekundären Wichtigkeit dieses Wissenszweiges glaubte ich ihn mehr als Hilfsmittel, nicht als Selbstzweck behandeln zu sollen. Als eigentliche Aufgabe der Mechanik erscheint hiernach die mathematische Behandlung der Vorgänge in der Natur, soweit sie einer solchen zugänglich sind.

Die Aufgabe eines Lehrbuchs ist es meiner Ansicht nach nicht, das gesamte vorhandene, sehr umfangreiche Material dem Leser zugänglich zu machen. Ein Werk, welches in diesem Sinne angelegt ist, kann wohl als Nachschlagebuch für den Forscher von grofsem Werte sein, allein es wird nicht leicht vollständig durchgearbeitet werden. Andrerseits soll ein Lehrbuch auch kein Elementarwerk sein, welches dem Leser nur die ersten Anfangsgründe einer Wissenschaft vorführt. Vielmehr wird ein Lehrbuch im eigentlichen Sinne eine systematisch angeordnete, von den ersten Grundlagen bis zu den tieferen Forschungen fortschreitende, immer nur das Wesentliche ins Auge fassende Darstellung zu geben haben. Alles weniger Wichtige kann dem Spezialstudium überlassen bleiben, für welches gerade auf dem Gebiete der Mechanik vorzügliche Werke existieren.

Hiermit soll nicht gesagt sein, dafs ein Lehrbuch blofs allgemeine Untersuchungen zu geben habe. Es ist eine bekannte Erfahrung, dafs nichts das Studium so wenig fördert und namentlich den Anfänger so sehr abschreckt, wie die zu frühzeitige Beschäftigung mit allzu abstrakten Problemen. Was einmal an einem Beispiele klar durchdacht wurde, bietet

auch in der Verallgemeinerung keine Schwierigkeit dar; ging doch auch die historische Entwicklung der Wissenschaft immer vom Speziellen aus, um dann zum Allgemeinen fortzuschreiten. Aus diesem Grunde stelle ich das d'Alembert'sche Prinzip und die daran anknüpfenden Untersuchungen über Differentialgleichungen nicht an den Anfang, sondern erläutere zuerst die sehr einfachen Grundbegriffe an spezielleren Beispielen. Wenn dabei einige Wiederholungen nötig werden, so dürfte dies für das Studium kein Nachteil sein.

Bei der Auswahl dieser Beispiele aus dem Gebiete der Physik, Astronomie und Geophysik wurde sorgfältig darauf geachtet, dafs nur wirklich wissenswerte Dinge zur Behandlung kamen; blofse Übungen im Integrieren wurden nicht aufgenommen. Dabei erwies es sich als wünschenswert, auch ältere Untersuchungen, welche in neueren Werken auf unverdiente Weise vernachlässigt werden, wieder an die richtige Stelle zu rücken. So wurde die planetarische Störungstheorie, welche durch die Astromechanik von Israël-Holtzwart bereits zugänglicher geworden ist, bis zu den merkwürdigen Laplace'schen Relationen durchgeführt; mufs es doch als ein bedenklicher Mangel empfunden werden, dafs gerade diese astromechanischen Untersuchungen, welche vielleicht die schönste und lohnendste Anwendung der Mathematik bilden, bisher einem grofsen Teile der Mathematiker unbekannt geblieben sind.

Ein Umstand, welcher das Studium vieler Werke sehr erschwert, besteht darin, dafs sie allzu viele Spezialkenntnisse voraussetzen. Selbstverständlich kann niemand an ein eingehenderes Studium der Mechanik herantreten, der sich nicht mit den Hilfsmitteln der höheren Mathematik ausgerüstet und im mathematischen Denken und Auffassen bereits einige Übung erworben hat. Aber es giebt doch eine Menge von Einzelheiten, wie bestimmte Integrale ganz besonderer Art, Reihenentwicklungen u. s. w., die selbst ein kenntnisreicher Mathematiker nicht immer gegenwärtig hat und die in anderen Werken oft nur schwierig aufzufinden sind. Aus diesem Grunde habe ich mich entschlossen, alle Hilfsresultate, besonders aber solche, die speziell zur Verwendung in der Mechanik bestimmt sind, vollständig zu entwickeln.

Für den Studierenden dürfte es vorteilhaft sein zu wissen, welche Vorkenntnisse er zum Studium der Mechanik mitbringen mufs, weshalb hierüber einige Andeutungen folgen mögen. In erster Linie steht die elementare Differential- und Integralrechnung, einschliefslich der Anfangsgründe der Differentialgleichungen. Von besonderer Wichtigkeit ist die Sicherheit im Operieren mit partiellen Differentialquotienten. Die Ausführung von Integralen und Differentialgleichungen habe ich meistens nur kurz angegeben; will man die oft etwas umständliche Durchrechnung vermeiden, so kann man sich durch Differentiation von der Richtigkeit überzeugen. Die weitergehenden Untersuchungen über totale und partielle Differentialgleichungen habe ich, soweit sie für die Mechanik in Betracht kommen, in die Darstellung aufgenommen. Von der analytischen

Geometrie sind namentlich die Sätze über Koordinatentransformation und die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen wichtig; von der Theorie der Kurven und Flächen zweiter Ordnung wird kaum mehr als die Kenntnis ihrer Gleichungen verlangt. Auch ist einige Kenntnis aus der Theorie der Tangenten und Normalen sowie der Krümmung bei Kurven und Flächen unerläfslich*). Aus der Lehre von den Gleichungen und den Determinanten sowie der Funktionentheorie gelangen auch nur die Anfangsgründe zur Verwendung. Elliptische Funktionen und Variationsrechnung sind nur für einige, allerdings wichtige Spezialprobleme notwendig; das Studium wird durch mangelnde Kenntnis dieser Gebiete nicht unmöglich gemacht. Überhaupt ist darauf Rücksicht genommen, dafs der Leser, welcher nur das Allerwichtigste aus der Mechanik kennen zu lernen wünscht, etwa behufs einer ersten Einführung, die komplizierteren Partieen überschlagen kann, ohne befürchten zu müssen, den Zusammenhang zu verlieren. So können z. B. §§ 4, 11, 12, 13, 18, 19, 20, 23, 26—34, 38, 39, 46, 47, 48, 49 und noch manches Andere wohl ausgelassen werden.

Die naturgemäfseste Einteilung der Mechanik ist die schon von Euler angewandte: wir unterscheiden die Mechanik der materiellen Punkte und die der zusammenhängenden Körper. Kinematik, Statik und Dynamik können nur bei einzelnen Zweigen die Einteilung begründen. Eine Art Zwitterstellung nimmt die Potentialtheorie ein, insofern sie die Attraktion zusammenhängender Massen auf einzelne materielle Punkte behandelt; es schien mir zweckmäfsig, sie dem ersten Teile zuzuweisen.

Der zweite Teil wird enthalten: die Mechanik der starren Systeme, der elastisch festen Körper, die Hydro- und Aëromechanik; die drei letzten Abschnitte sollen sich, unter Rücksicht auf die vorhandenen ausgezeichneten Spezialwerke, auf die wesentlichsten Punkte beschränken.

Ausgeschlossen bleibt die Molekularmechanik, da dieselbe zur Zeit noch nicht diejenige Entwicklung erlangt hat, die sie zur Aufnahme in ein Lehrbuch geeignet machte. Im allgemeinen war ich bestrebt, dasjenige Material zusammenzubringen, welches dem Bedürfnisse des eigentlichen Mathematikers entspricht.

Bei der Behandlung einer Wissenschaft wie der Mechanik, welche in ihren wichtigsten Teilen als abgeschlossen anzusehen ist, wird der Verfasser mehr eine übersichtliche Darstellung des Vorhandenen, als neue Leistungen ins Auge zu fassen haben. Vor Allem mufste den Grundlagen eine besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden, da erfahrungsmäfsig gerade hier noch manche Unklarheit herrscht. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen wurde einer eingehenden Diskussion unterzogen und dann in möglichst einfacher Weise begründet.

Ältere und neuere Lehrbücher der Mechanik, wie diejenigen von Euler, Lagrange, Poisson, von Duhamel, Kirchhoff, Schell,

*) Die einfachsten Sätze in: Joachimsthal, „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung“ genügen vollkommen.

Somoff und zahlreichen Anderen wurden neben Originalabhandlungen und spezielleren Werken selbstverständlich vielfach benutzt; auch den im Sommer 1874 gehörten Vorlesungen von Königsberger verdanke ich manche Anregung. Die Litteraturnachweise habe ich auf das Wichtigste beschränkt, da andere Werke hierin Wertvolles bieten.

Bei der Ausarbeitung des Werkes wurde ich durch meinen Bruder Julius wesentlich unterstützt; derselbe übernahm die Bearbeitung mehrerer Partien des vierten Abschnittes (das Meiste von §§ 35, 36, 37, 38, 40) und leistete mir auch sonst wichtige Hilfe.

Frankfurt a. M., im Januar 1888.

Dr. **Otto Rausenberger.**

Inhaltsverzeichnis des ersten Bandes.

Dritter Abschnitt.

Die Prinzipien der Mechanik und die Differentialgleichungen der Bewegung in allgemeiner Behandlung.

Vierter Abschnitt.

Das Potential.

Einleitung.

Die Formen der menschlichen Anschauung sind Raum und Zeit; der Raum erscheint als dreifach, die Zeit als einfach ausgedehnt. Beide können, von ihrem konkreten Inhalte losgelöst, zum Gegenstande wissenschaftlicher Untersuchung gemacht werden. Die Lehre vom Raume ist die Geometrie; die Zeit giebt bei ihrer einfachen Ausdehnung zu keiner besonderen Wissenschaft Veranlassung. Die Vereinigung von Raum und Zeit liefert die Mechanik.

Schon die Geometrie mufs der Anschauung die Vorstellung entnehmen, dafs ein Körper seinen Ort ändern kann, ohne selbst dabei eine Änderung zu erleiden; wir benutzen diese Vorstellung, dafs ein Teil des Raumes im Gesamtraume eine Ortsänderung erfahren, sich bewegen kann, fortwährend in der Mechanik. Da ein Körper als Inbegriff der in ihm enthaltenen Punkte anzusehen ist, so können wir die Fundamentalaufgabe der Mechanik dahin aussprechen: es soll angegeben werden, welchen Ort ein als beweglich gedachter Punkt zu einer bestimmten Zeit einnimmt. Bedienen wir uns insbesondere der Hilfsmittel der analytischen Geometrie, wobei wir fast immer die rechtwinkligen Kartesischen Koordinaten anwenden wollen, so können wir die Bewegung eines Punktes dadurch vollständig beschreiben, dafs wir seine Koordinaten als Funktionen der Zeit ausdrücken. Wir bezeichnen durchgehends die Zeit, gemessen nach einer willkürlichen Einheit von einem willkürlichen Anfangspunkte aus, mit t; alsdann geben drei Gleichungen:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$

oder in impliziter Form:

$$F_1(x, y, z, t) = 0, \quad F_2(x, y, z, t) = 0, \quad F_3(x, y, z, t) = 0$$

die Bewegung des Punktes vollständig an. Diese Behandlungsweise der Mechanik heifst die analytische. Man könnte nun, analog wie in der analytischen Geometrie vorgehend, die Bewegungen nach der analytischen Form der Funktionen f und F untersuchen; an die Spitze könnte etwa der Fall gesetzt werden, dafs die F oder f algebraische Funktionen sind und die algebraischen Bewegungen könnten dann weiter nach dem Grade der bestimmenden Gleichungen eingeteilt werden. Eine solche Mechanik wäre eine rein mathematische, der analytischen Geometrie durchaus äqui-

valente Disziplin. Aber thatsächlich hat die Mechanik, wenigstens in früherer Zeit, eine ganz andere Entwicklung genommen; aus der Naturwissenschaft und der technischen Praxis hervorgegangen, hat sie sich mehr praktischen Zielen zugewandt und sich in erster Linie die Aufgabe gestellt: die in der Natur vorkommenden Bewegungen genau oder wenigstens annäherungsweise zu beschreiben und aus möglichst einfachen Grundgesetzen abzuleiten. Doch sind hiermit rein theoretische Spekulationen, welche den Vorkommnissen in der Natur nicht entsprechen, keineswegs ausgeschlossen. Infolge dieser eingeschlagenen Richtung nimmt die Mechanik eine Zwitterstellung ein: sie gehört dem Inhalte nach zum gröſsten Teile der Physik, der Behandlungsweise nach der Mathematik an. Es wird in der Folge eine unserer wichtigsten Aufgaben sein, die physikalischen Grundlagen von den mathematischen Deduktionen scharf zu trennen und insbesondere die ersteren möglichst genau zu präzisieren.

Ergänzend muſs bemerkt werden, daſs der rein mathematische Teil der Mechanik, die sog. Kinematik oder Phoronomie, in neuerer Zeit zum Gegenstande zahlreicher Forschungen gemacht worden ist. Doch beziehen sich diese weniger auf solche systematisch-analytische Untersuchungen, wie die oben angedeutete, als auf die Betrachtung von Punktesystemen, welche wirklichen Vorkommnissen mehr oder weniger entsprechen.

Wir halten uns bei der Auswahl des Stoffes mehr an die ältere Auffassungsweise und bringen kinematische Untersuchungen nur als Einleitung zu den eigentlich mechanischen.

Erster Abschnitt.

Die freie Bewegung materieller Punkte.

§ 1.

Mathematische Fundamentalbegriffe.

1. Wir haben über die Funktionen:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t), \tag{1}$$

welche die Bewegung eines Punktes bestimmen, keinerlei Voraussetzungen gemacht. Es ist keineswegs nötig, daſs es analytische Functionen sind; es soll lediglich durch sie jedem t ein bestimmtes x, y, z zugeordnet sein. Falls die f formell mehrdeutige Funktionen sind, so muſs einer der Werte als der allein zulässige fixiert werden. Wir entnehmen nun der Anschauung die Thatsache, daſs ein Punkt, welcher sich vom Punkte A nach dem Punkte B bewegt, eine zusammenhängende Linie zwischen beiden beschreibt, nicht sprungweise von einer Stelle zur andern gelangt. Dieses Axiom trägt keinen physikalischen Charakter, es beruht in dem Wesen unserer Anschauung. Die Funktionen f ändern sich übrigens nicht allein nicht sprungweise, sondern dies gilt auch erfahrungsmäſsig für ihre Differentialquotienten, einzelne Punkte ausgenommen; wir betrachten f nebst seinen Differentialquotienten im Folgenden als stetig.

Eliminiert man aus den Gleichungen (1) die Gröſse t, so erhält man zwei Gleichungen

$$\varphi_1(x, y, z) = 0, \quad \varphi_2(x, y, z) = 0, \tag{2}$$

welche die durchlaufene Bahn, auch Trajektorie genannt, darstellen. Wir bezeichnen in der Folge die Länge der durchlaufenen Strecke, von einem willkürlichen Anfangspunkte an gemessen, mit s und geben ihr den Namen Weg.

2. Ist die Bahn des bewegten Punktes eine Gerade und legt er in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurück, so nennt man den in der Zeiteinheit von ihm zurückgelegten Weg seine Geschwindigkeit; dieselbe wird meistens durch v bezeichnet. Ist s der in der Zeit t zurückgelegte Weg, so folgt:

$$v = \frac{s}{t}. \tag{3}$$

Ist die Bahn nicht gerade, sind die in gleichen Zeiten zurückgelegten Strecken nicht gleichbleibend, so verstehen wir unter der Geschwindigkeit zur Zeit t die unendlich kleine Wegstrecke ds, welche von diesem Zeitpunkte ab in der unendlich kleinen Zeit dt zurückgelegt wird, dividiert durch die letztere; es ist also:

$$v = \frac{ds}{dt}. \tag{4}$$

Infolge der vorausgesetzten Stetigkeit der Bewegung stellt $\frac{ds}{dt}$ einen ganz bestimmten Grenzwert dar, einzelne Punkte allenfalls ausgenommen. Da $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ ist, so haben wir:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt}} = \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \tag{5}$$

Über das Vorzeichen der rechts stehenden Wurzelgröfse ist das Folgende zu bemerken. Jede einfache Kurve kann in doppeltem Sinne durchlaufen werden; den einen Sinn kann man willkürlich als den positiven festsetzen, so dafs s zunimmt, wenn man sich nach ihm in der Kurve bewegt. Hierdurch ist auch das Zeichen von $v = \frac{ds}{dt}$ eindeutig bestimmt und das Zeichen der rechten Seite von (5) ist dem entsprechend zu wählen.

Der Geschwindigkeit kommt in jedem Punkte der Bahn eine bestimmte Richtung zu, nämlich die der Tangente der Bahnkurve in dem fraglichen Punkte, in dem Sinne genommen, in welchem die Bewegung stattfindet. Wir bestimmen sie durch die Kosinus der Winkel (s, x), (s, y), (s, z), welche sie mit den positiv gerichteten Koordinatenachsen bildet. Es ist

$$\cos(s, x) = \frac{dx}{ds}, \quad \cos(s, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(s, z) = \frac{dz}{ds} \tag{6}$$

oder

$$\cos(s, x) = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \quad \text{u. s. w.,} \tag{7}$$

wo der Nenner dasselbe Zeichen hat, wie die rechte Seite von (5).

3. Sowie wir die Bewegung eines Punktes durch die Bewegung seiner Projektionen auf die Koordinatenachsen bestimmen, können wir auch seine Geschwindigkeit der Gröfse und Richtung nach durch die Geschwindigkeit der Projektionen des Punktes ausdrücken, also durch die Gröfsen $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$. Es sind aber die Projektionen von $\frac{ds}{dt}$ auf die x, y, z-Achse:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{ds}{dt}\cos(s, x) = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt} \cdot \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}} = \frac{dx}{dt}, \\ &\frac{ds}{dt}\cos(s, y) = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{ds}{dt}\cos(s, z) = \frac{dz}{dt}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

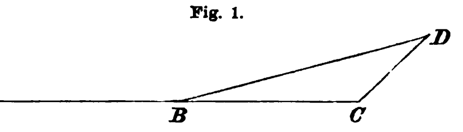
Die Projektionen der Geschwindigkeiten auf die Koordinatenachsen sind also identisch mit den Geschwindigkeiten der Projektionen auf die Koordinatenachsen. Man nennt dieselben die Komponenten der Geschwindigkeit nach den Koordinatenachsen.

4. Ist die Bahn geradlinig, so bezeichnet man, falls die Geschwindigkeit ungleichförmig ist, deren Zuwachs in einem Zeitteilchen, dividiert durch dieses, als Beschleunigung; eine Verringerung der Geschwindigkeit wird als negative Beschleunigung aufgefaſst. Wir haben für die Beschleunigung:

$$\frac{d\frac{ds}{dt}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{9}$$

5. Ist die Bahn krummlinig, so muſs der Begriff der Beschleunigung modifiziert werden. Befinde sich (Fig. 1) der bewegte Punkt zur Zeit t im Punkte A, zur Zeit $t + dt$ in B, so ist das als geradlinig zu betrachtende Bahnelement $AB = ds$. Wäre die Geschwindigkeit und ihre Richtung konstant, so würde der Punkt im nächsten Zeitmomente dt die Strecke $BC = AB$ in der Verlängerung von AB zurücklegen. In Wirklichkeit gelange aber der Punkt, infolge der Ungleichmäſsigkeit der Geschwindigkeit und ihrer Richtung, nach D. Dann bezeichnen wir den Quotienten aus der Strecke CD und dt^2 als die Beschleunigung des Punktes*), während die Richtung von CD die Richtung der Beschleunigung markiert. Die Quotienten der Projektionen von CD auf die Koordinatenachsen und dt^2 nennen wir die Komponenten der Beschleunigung. Die Komponente nach der x-Achse ist:

Fig. 1.



$$\frac{x + dx + dx + d^2x - (x + 2dx)}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2},$$

die Komponenten nach der y-, resp. z-Achse sind:

$$\frac{d^2y}{dt^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Die Komponenten der Beschleunigung sind also den Beschleunigungen der Projektionen des Punktes auf die Koordinatenachsen gleich. Die Gesamtbeschleunigung ist demnach ihrem absoluten Werte nach:

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}; \tag{10}$$

ihre Richtungskosinus sind:

*) Wenn BC von der ersten Ordnung unendlich klein ist, so wird die Abweichung CD bei stetiger Bewegung im allgemeinen unendlich klein von der zweiten Ordnung sein, wie dies auch die folgenden Ausdrücke für die Komponenten zeigen.

$$(11)\qquad \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},\quad \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}},$$
$$\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}.$$

Es ist zu bemerken, dafs die Gröfsen

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\quad \text{und}\quad \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}$$

von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig sind, wie aus ihrer Bedeutung hervorgeht, weshalb wir auf den leicht zu erbringenden analytischen Nachweis verzichten.

6. Die Änderung der Geschwindigkeit und ihrer Richtung läfst sich noch in anderer, sehr instruktiver Weise darstellen. Die drei unendlich benachbarten Punkte A, B, D der Bahnkurve bestimmen eine Ebene, die Krümmungs- oder Schmiegungsebene dieser Linie für Punkt A. Errichtet man auf der Kurve in B und D Normalen, welche in der Krümmungsebene liegen, so giebt deren (als gleich zu betrachtende) Länge bis zum Schnittpunkte den ersten Krümmungsradius ϱ für die Stelle A. Da die Bewegung während der in Betracht kommenden Momente in die Krümmungsebene fällt, so genügt es, die Projektionen (Komponenten) von DC auf die Tangente und die oben festgesetzte Normale der Kurve, dividiert durch dt^2, anzugeben, um die Änderung der Geschwindigkeit nach Gröfse und Richtung vollkommen zu bestimmen. Die Komponente nach der Tangente ist offenbar $\frac{d^2s}{dt^2}$; in der That haben wir:

$$(12)\qquad \frac{d^2s}{dt^2}=\frac{d\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}\cdot\left[\frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}\right.$$
$$\cdot\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}+\frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}\cdot\frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}$$
$$\left.+\frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}\cdot\frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}\right],$$

wo die Klammer den Kosinus des Winkels zwischen der Tangente und der Richtung der Beschleunigung bezeichnet*). $\frac{d^2 s}{dt^2}$ heifst die Tangentialbeschleunigung des Punktes. Um die Gröfse der Komponente nach der Normalen, die Normal- oder Zentripetalbeschleunigung, zu finden, müssen wir (Fig. 2) DE bestimmen und durch dt^2 dividieren. Es ist aber bei Vernachlässigung unendlich kleiner Gröfsen höherer Ordnung

Fig. 2.

O

A B C E D

$$DE = BC \sin DBC = BC \sin BOD,$$

und da

$$\sin BOD = \frac{BC}{\varrho}$$

ist,

$$DE = \frac{BC^2}{\varrho},$$

woraus die Zentripetalbeschleunigung

$$(13) \qquad = \frac{v^2}{\varrho}$$

folgt. Dieselbe hängt also nur von dem ersten Krümmungsradius und der Geschwindigkeit ab.

7. Die analytische Ableitung des gefundenen Resultates ist etwas umständlicher. Der Ausdruck für den Krümmungshalbmesser**) ist

$$(14) \qquad \varrho = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}},$$

während die Richtungskosinus desselben

$$(15) \qquad \varrho\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \varrho\frac{d^2y}{ds^2}, \quad \varrho\frac{d^2z}{ds^2}$$

sind. Für die Projektion der Gesamtbeschleunigung auf die Richtung des Krümmungshalbmessers haben wir demnach

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2} \cdot \frac{\varrho\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \varrho\frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \varrho\frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^2z}{dt^2}}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}}$$

$$= \varrho\left(\frac{d^2x}{ds^2}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{d^2z}{dt^2}\right)$$

oder, da

---

*) Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, und $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ die Richtungskosinus zweier Geraden, so ist der Kosinus des Winkels φ zwischen beiden Geraden bekanntlich:

$$\cos\varphi = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2.$$

**) S. z. B. Joachimsthal, a. a. O., p. 15 u. 16.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}\,\frac{ds}{dt},$$

also

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x}{ds^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{dx}{ds}\,\frac{d^2s}{dt^2}$$

ist,

$$= \varrho\left\{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \right.$$

$$\left. + \left[\frac{dx}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\,\frac{d^2z}{ds^2}\right]\frac{d^2s}{dt^2}\right\}$$

oder, da aus

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \tag{16}$$

durch Differentiation

$$\frac{dx}{ds}\,\frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds}\,\frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds}\,\frac{d^2z}{ds^2} = 0 \tag{17}$$

folgt,

$$= \frac{\varrho}{\varrho^2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{v^2}{\varrho}. \tag{18}$$

8. Legt man durch einen festen Punkt O Halbgerade, welche den Geschwindigkeitsrichtungen eines bewegten Punktes P jeweilig parallel sind, und trägt auf ihnen von O aus den entsprechenden Geschwindigkeiten proportionale Strecken ab, so bilden die Endpunkte dieser Strecken eine Kurve, welche man mit ihrem Erfinder Hamilton den Hodographen der Bewegung nennt. Geht die Bewegung in einer Ebene vor sich, so ist auch der Hodograph eine ebene Curve. Einer Schmiegungsebene der Bahnkurve entspricht eine Tangentialebene des Kegels, welcher von den durch O gelegten Halbgeraden gebildet wird. Eine Tangente des Hodographen giebt die Richtung der Beschleunigung für den entsprechenden Punkt an u. s. w.

Wir gehen auf die Theorie des Hodographen nicht weiter ein.

9. Ähnliche Betrachtungen wie über die Änderung der Geschwindigkeit lassen sich über die Änderung der Beschleunigung anstellen u. s. w. Man gelangt so zu den Beschleunigungen höherer Ordnung, welche erst in neuerer Zeit untersucht wurden. Man sehe hierüber Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte, 2. Aufl., Bd. 1, p. 544. Aus später ersichtlichen Gründen spielen jedoch in der Mechanik, welche sich mit den in der Natur vorkommenden Bewegungen beschäftigt, nur die Geschwindigkeit und die erste Beschleunigung eine wichtige Rolle, weshalb wir auf eine Behandlung der Beschleunigungen höherer Ordnung verzichten.

§ 2.

Physikalische Grundlagen.

1. Die physikalischen Gesetze, nach denen sich die Welt bewegt, sind zur Zeit durchaus noch nicht erforscht; wir sehen uns bei der Beschreibung der wirklichen Bewegungen fortwährend genötigt, zu näherungsweise richtigen, der Beobachtung entlehnten Ansätzen unsere Zuflucht zu nehmen. Trotzdem giebt es einige einfache Thatsachen, die sich aus dem Chaos der Erscheinungswelt klar hervorheben und sich bei allen Beobachtungen so durchaus bewährt haben, daſs man sie mit einer Wahrscheinlichkeit, die an Gewiſsheit grenzt, als allgemeine Wahrheiten bezeichnen kann. Dieselben liegen immerhin nicht so unmittelbar zu Tage, daſs sie dem forschenden Menschen nicht lange verborgen geblieben wären; so ist das klassische Altertum und das Mittelalter nie über sie ins Klare gekommen. Erst durch Galilei, Newton u. A. sind sie entwickelt worden*). Wir schlagen zu ihrer Aufsuchung einen Weg ein, der nicht gerade der historische ist, aber sich sehr wohl dazu eignet, die in Frage kommenden Begriffe klar werden zu lassen.

2. Jeder Mensch besitzt die Fähigkeit, mit Hilfe seiner Glieder, z. B. der Arme, Gegenstände, die bisher in Ruhe waren, in Bewegung zu versetzen. Wir bezeichnen diese Fähigkeit als Kraft. Jede Kraftäuſserung ist mit einer gewissen, unmittelbar als Muskelgefühl wahrnehmbaren Anstrengung verbunden, die gröſser oder kleiner sein kann. Wir haben so ein unmittelbares, wenn auch ganz rohes Maſs der Kraftäuſserung in unserem Gefühle. Untersuchen wir nun an einem geeigneten Beispiele, in welcher Weise eine solche Kraftäuſserung sich bemerklich macht. Es befinde sich etwa auf einer ruhigen Wasserfläche in der Nähe des Ufers ein Boot in Ruhe, und wir suchen es durch die Kraft des Armes vom Ufer abzustoſsen. Das Boot wird durch eine anhaltende, gleichmäſsige Kraftanwendung thatsächlich in Bewegung gebracht; wie verhält es sich aber mit der erzeugten Geschwindigkeit?**)

Am nächsten würde für den unbefangenen Beurteiler wohl die Annahme liegen, daſs die erteilte Geschwindigkeit der Anstrengung proportional und — bei gleichförmiger Anstrengung — gleichbleibend sei, daſs insbesondere bei Aufhören des Druckes das Boot sofort wieder zur Ruhe komme. Dies widerspricht aber den Thatsachen durchaus. Ein gleich-

*) Eingehenderes über die historische Entwicklung der Grundlagen der Mechanik findet man u. a. in Jolly, Prinzipien der Mechanik, Stuttgart 1852; Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik, Leipzig 1877 (2. Aufl.); Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt, Leipzig 1883; Streintz, Die physikalischen Grundlagen der Mechanik, Leipzig 1883.

**) Um die Betrachtung nicht unnötig zu komplizieren, nehmen wir an, daſs die Kraft allen Punkten des Bootes die gleiche Geschwindigkeit erteile. Wie dies zuwege gebracht werden kann, mag hier unerörtert bleiben.

bleibender Druck ruft keine gleichförmige Geschwindigkeit hervor; vielmehr bewegt sich das Boot anfangs sehr langsam, um nach und nach in immer raschere Bewegung überzugehen. Hört der Druck auf, so bleibt das Boot nicht stehen, sondern bewegt sich weiter. Die Geschwindigkeit ist also der angewandten Kraft nicht proportional. Vielfache Beobachtungen dieser Art führen, wenn man die Wirkung von Einflüssen berücksichtigt, die sich erst später präzisieren lassen, zu der Annahme, dafs Körper, auf welche keine Kräfte wirken, die sich aber einmal in Bewegung befinden, sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit in derselben Richtung weiter bewegen; dafs ferner durch eine Kraft eine Beschleunigung oder Verzögerung der vorhandenen Geschwindigkeit hervorgerufen wird. Wenden wir bei unserem Versuche verschiedene Kraftanstrengungen an, so finden wir, dafs die Beschleunigung mit der Kraft wächst und bei gleicher Kraft die gleiche bleibt. Wenn auch eine direkte, genauere Messung der Muskelkraft unthunlich ist, so führen doch mannigfache Umstände zu der Annahme, dafs die Beschleunigung *ceteris paribus* der Kraft proportional gesetzt werden kann.

3. Führen wir unseren Versuch an einem kleinen Boote und einem gröfseren Schiffe aus, so bemerken wir alsbald, dafs durch die gleiche Kraftäufserung das Schiff eine weit geringere Beschleunigung erfährt, als das kleinere Boot. Sei etwa die Beschleunigung des letzteren zehnmal gröfser als die des ersteren. Variieren wir nun die Kraft oder bringen wir sie auf andere Weise hervor, so bemerken wir, dafs das Verhältnis der Wirkungen immer das gleiche bleibt. Die Beschleunigung hängt also nicht blos von der angewandten Kraft, sondern auch von einer inhärenten Eigentümlichkeit des bewegten Körpers ab, die sich allen Kräften gegenüber in gleicher Weise geltend macht. Wir schreiben daher jedem Körper eine gewisse Masse m zu und sagen, dass die Beschleunigungen, welche zwei Körpern durch dieselbe Kraft erteilt werden, ihren Massen umgekehrt proportional seien. Es stellt sich heraus, dafs diese Massen dem Gewichte (wie es auf der Wage durch Vergleichung bestimmt wird) proportional sind, sodafs man Gewicht und Masse ohne Nachteil als gleichbedeutend gebrauchen kann.

Anmerkung 1. Diese Identifizierung von Gewicht und Masse wird vielfach nicht vorgenommen, da angeblich das Gewicht eines Körpers von der Stärke der Attraktion der Erde abhänge. In der That würde ein Gegenstand auf einer Federwage gewogen am Pole und am Äquator der Erde verschiedenes Gewicht zeigen. Allein dies kommt hier für uns nicht in Betracht. Die gewöhnlichen Gewichtsangaben, z. B. nach Kilogrammen u. s. w., beruhen alle nur auf einer Vergleichung mit dem Gewichte anderer Körper. Wiegt aber ein gewisses Stück Eisen an einer Stelle der Erde das Sechsfache von einem Liter Wasser, so wird dies Verhältnis auch auf dem Monde oder irgendwo sonst statthaben. Die Gewichte sind ebenso wie die Massen Verhältnisgröfsen, und der Identifizierung, die in neuerer Zeit gebräuchlich wird, steht nichts im Wege.

Anmerkung 2. Die Masse ist, wie Physik und Chemie lehren, etwas der Materie als solcher inhärentes. Vereinigt man zwei materielle Körper zu einem einzigen, so ist dessen Masse der Summe der Massen der Einzelkörper gleich; zerlegt man einen Körper in beliebige Teile, so ist die Summe der Massen dieser der ursprünglichen Masse gleich. Physikalische und chemische Änderungen lassen die Masse einer bestimmten Materie ungeändert.

Die Erfahrung zeigt, dafs die Masse immer, wenn auch keineswegs ausschliefslich, von dem Volumen des Körpers abhängig ist; eine Masse ohne Ausdehnung lehrt sie uns nicht kennen. Trotzdem sehen wir uns in der theoretischen Mechanik immerfort genötigt, auch Punkten eine Masse beizulegen; wir werden sogar in den nächsten Abschnitten nur von der Bewegung solcher materiellen Punkte handeln. Möglicherweise ist diese Annahme blofs eine irreal hypothetische, die nur insofern praktische Bedeutung hat, als man bei vielen mechanischen Problemen sich die Masse mancher Körper genau oder näherungsweise in einen Punkt verlegt denken darf. Möglicherweise sind aber die Atome, aus welchen die moderne Naturwissenschaft sich die ganze Welt aufgebaut denkt, als wirkliche materielle Punkte anzunehmen.

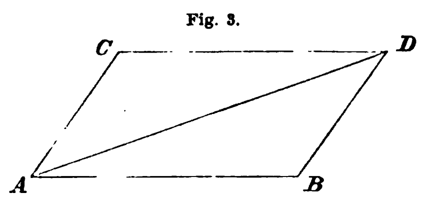
4. Der Begriff der Kraft, wie wir ihn eingeführt haben, ist für jeden Menschen ein unmittelbar gegebener; er ist psycho-physiologischer Natur und kann auf unbelebte Gegenstände nicht ohne Weiteres übertragen werden. Die Beobachtung zeigt nun, dafs in der leblosen Natur Bewegungen statthaben, welche mit der durch die Kraft des Armes hervorgerufenen unleugbare Ähnlichkeit besitzen. Ein fallender Stein bewegt sich z. B. mit gleichmäfsig wachsender Geschwindigkeit ungefähr gegen den Mittelpunkt der Erde hin; er würde sich ganz ebenso bewegen, wenn ein unserem Arm analoger Mechanismus ihn mit gleichbleibender Kraft nach dem Erdmittelpunkte ziehen würde, und ähnliche Vorkommnisse beobachten wir überall. Wir gelangen zu dem für die gesamte Mechanik fundamentalen Resultate, dafs die Erklärung der Bewegungsvorgänge in der Natur am einfachsten gelingt, wenn man das Vorhandensein von Kräften, welche der besprochenen analog wirken, substituiert. So schreibt man der Erde eine Anziehungskraft zu, die sie auf alle an ihrer Oberfläche befindlichen Körper ausübt. Hierdurch soll in keiner Weise etwas über die metaphysische Natur dieser Kräfte ausgesagt werden; vielmehr handelt es sich lediglich um die Erlangung eines einfachen, durchsichtigen, mathematischen Ausdrucks für die Bewegungserscheinungen. Wenn wir z. B. sagen, dafs von einem Punkte eine Kraft ausgehe, welche nach ihm gerichtet und dem Kubus der Entfernung proportional sei, so heifst das, dafs sämtlichen materiellen Punkten eine Beschleunigung nach dem betreffenden Punkte hin erteilt wird, die der Masse derselben umgekehrt, dem Kubus der Entfernung von jenem Punkte direkt proportional ist.

5. Die gegebene Einführung der Kräfte bedarf noch einer wichtigen Ergänzung; es fragt sich, in welcher Weise sich ein Körper bewegt, wenn

mehrere Kräfte, zu denen noch eine ursprüngliche Geschwindigkeit hinzukommen kann, zusammenwirken. Die Beantwortung dieser Frage liefert folgender Satz, der, durch zahlreiche Beobachtungen bewahrheitet, als vollkommen feststehend angesehen werden kann:

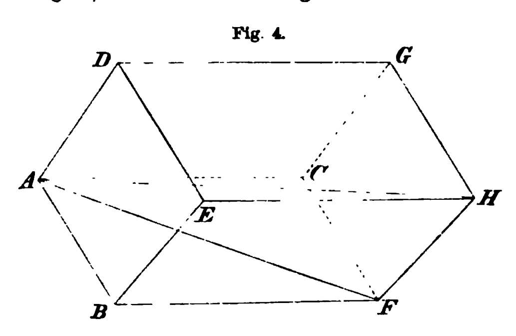
Wenn ein materieller Punkt A (Fig. 3) zwei Einflüssen ausgesetzt ist, von denen jeder einzelne ihn mit konstanter Geschwindigkeit in einer bestimmten Richtung fortführen würde, so dafs er in einer bestimmten Zeit durch den einen von A nach B, durch den andern von A nach C geführt würde, so durchläuft er in derselben Zeit mit gleichförmiger Geschwindigkeit die Diagonale AD des durch A, B, C bestimmten Parallelogramms (Parallelogramm der Geschwindigkeiten). Wir nennen AD die Resultante der Geschwindigkeitskomponenten AC und AB, welche durch die ihnen proportionalen Strecken der Gröfse und Richtung nach repräsentiert werden. Sind die erteilten Geschwindigkeiten nicht gleichförmig, so darf der Satz vom Parallelogramm der Geschwindigkeiten doch auf unendlich kleine Teile der Bewegung angewandt werden. — Sind mehr als zwei Einflüsse vorhanden, so kann man sie nach und nach in derselben Weise vereinigen; dafs die Reihenfolge hierbei ohne Einflufs bleibt, ist leicht einzusehen.

Fig. 3.



Hat man insbesondere drei nicht in einer Ebene gelegene Geschwindigkeiten AB, AC, AD (Fig. 4) zusammenzusetzen, so kann man zuerst AB und AC zu der Parallelogrammdiagonale AF, dann AF mit AD zu AH vereinigen. Der Punkt durchläuft also in der fraglichen Zeit die Diagonale des durch $ABCD$ bestimmten Parallelepipedons (Parallelepipedon der Geschwindigkeiten).

Fig. 4.



Wir brauchen kaum hervorzuheben, dafs man sich auch umgekehrt eine vorhandene Geschwindigkeit durch mehrere verschieden gerichtete (Komponenten) ersetzt denken kann. Die in § 1, 2 gegebene mathematische Darstellung einer Geschwindigkeit durch ihre Komponenten nach den Koordinatenachsen gewinnt hierdurch eine physikalische Bedeutung: die drei Komponenten sind thatsächlich der einfachen Geschwindigkeit äquivalent. In einem unendlich kleinen Zeitteilchen gelangt ein materieller Punkt infolge mehrerer Einflüsse dahin, wohin er gelangt sein würde, wenn diese aufeinander gefolgt wären.

6. Die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten überträgt sich unmittelbar auf Beschleunigungen, also auf Kräfte; nur müssen wir uns auf infinitesimale Wegteile beschränken. Würde die eine Kraft den materiellen Punkt in einer sehr kleinen Zeit von A nach B, die andere von A nach C führen, so gelangt er nach dem Diagonalpunkte D. Die Diagonale bestimmt also nicht nur die Richtung der resultierenden Kraft, sondern auch ihre Gröſse. Die Resultante verhält sich zu den beiden Einzelkräften wie $AD:AB:AC$. Die weitere Zusammensetzung und Zerlegung ist analog derjenigen der Geschwindigkeiten (Parallelogramm und Parallelepipedon der Kräfte). Die analytischen Komponenten der Beschleunigung (§ 1, 5) sind auch physikalisch betrachtet der Gesamtbeschleunigung äquivalent. Kräfte können genau wie Beschleunigungen zerlegt werden.

Fallen insbesondere die Richtungen zweier Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen in dieselbe Gerade, so summieren sie sich, falls sie den gleichen Richtungssinn haben; die kleinere ist von der gröſseren zu subtrahieren, falls sie entgegengesetzten Richtungssinn haben.

Man bezeichnet die Erfahrungsthatsache, daſs sich mehrere Geschwindigkeiten oder Kräfte in der besprochenen Weise vereinigen, ohne sich sonst zu modifizieren, auch als das Unabhängigkeitsprinzip.

7. Wir fassen die gewonnenen Resultate in die folgenden Sätze zusammen:

a) Ein materieller Punkt, auf den keine Kraft einwirkt, bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit in gerader Linie (Beharrungsgesetz).

b) Durch eine Kraft wird einem materiellen Punkte eine Beschleunigung erteilt, welche der Kraft direkt, der Masse des Punktes umgekehrt proportional ist.

c) Wirken mehrere Kräfte und eventuell das Beharrungsvermögen auf einen Punkt ein, so gelangt er innerhalb eines infinitesimalen Zeitteils dahin, wohin sie ihn (bei beliebiger Reihenfolge) nacheinander wirkend geführt hätten (Unabhängigkeitsprinzip).

Wirken auf einen materiellen Punkt x, y, z mit der Masse m Kräfte ein, deren Komponenten nach den Koordinatenachsen X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2 u. s. w. sind, die wir uns resp. zu X, Y, Z vereinigt denken können, so genügt seine Bewegung den Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} m\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = X_1 + X_2 + \cdots = X \\ m\,\dfrac{d^2y}{dt^2} = Y_1 + Y_2 + \cdots = Y \\ m\,\dfrac{d^2z}{dt^2} = Z_1 + Z_2 + \cdots = Z. \end{cases}$$

Die Gröſsen X, Y, Z können von den jeweiligen Koordinaten des Punktes

(x, y, z), seinen Geschwindigkeitskomponenten, der Zeit und andern Variabeln abhängen.

8. Aus Vorstehendem gewinnen wir bereits einen Einblick in den mathematischen Charakter der mechanischen Untersuchungen. Da bei der Mehrzahl der Probleme die wirkenden Kräfte gegeben werden, diese aber Beschleunigungen hervorrufen, so erscheinen meistens die zu lösenden Aufgaben in Gestalt von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Von der Entwicklung der Theorie der letzteren hängt der mathematische Teil der Mechanik grofsenteils ab. Bei der Integration dieser Differentialgleichungen treten doppelt so viele Konstanten auf, als abhängige Variabeln vorhanden sind; diese sind zu bestimmen aus den sogenannten Anfangsbedingungen, d. h. aus der Lage und Geschwindigkeit der bewegten Punkte im Anfange der zu betrachtenden Bewegung oder ähnlichen Relationen.

9. Aufser den Gesetzen von 7., die wir durchgehends den folgenden Untersuchungen zu Grunde legen, existiert noch ein Weiteres, von dem wir mitunter abstrahieren werden. Schon bei unserem Fundamentalversuche, mit dem wir die Theorie der Kräfte einleiteten, können wir bemerken, dafs bei der Bemühung das Boot in Bewegung zu setzen auch unser Körper in Bewegung versetzt wird, aber in umgekehrter Richtung. Weitere Untersuchung des Gegenstandes führt zu dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung: Übt einer von zwei materiellen Punkten eine Kraftwirkung auf den andern aus, so geht von dem zweiten eine gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Wirkung auf den ersten aus *(actio par est reactioni)*. Die Beschleunigungen, welche sich die Körper gegenseitig erteilen, stehen daher im umgekehrten Verhältnis ihrer Massen.

10. Wir haben es bis hierher verschoben, einen der ersten Fundamentalbegriffe der Mechanik, die Zeit, einer eingehenderen Besprechung zu unterziehen, und ohne Weiteres angenommen, dafs die Zeit eine mefsbare Gröfse sei. Wie dies bei so vielen Fundamentalbegriffen der Fall ist, enthält auch dieser mehr Schwierigkeiten, als auf den ersten Blick erscheint. Wie gelangen wir zu einem sicheren und ursprünglichen Mafse der Zeit? Von einem direkten Zusammenlegen zweier Zeitteilchen, wie man zwei Strecken behufs Vergleichung aufeinanderlegt, kann keine Rede sein, und von irgend zwei Vorgängen kann man nicht behaupten, dafs sie gleiche Dauer besäfsen, wenn man nicht vorher schon ein Zeitmafs besitzt; es hat also den Anschein, dafs man sich bei den Versuchen der Zeitmessung immer im Zirkel bewegt und manche Gelehrte halten es für unmöglich, zu einer solchen mit Sicherheit zu gelangen.

In Wirklichkeit ist die Sache so verzweifelt nicht. Wir besitzen von Natur eine Empfindung für die Länge von Zeitteilen und haben hierdurch ein zwar ganz rohes, aber doch direktes Mafs der Zeit; auf keine andere Weise gelangen wir zu einem solchen. Es ist nur unsere Aufgabe, von dieser höchst unvollkommenen Messungsweise ausgehend zu genaueren fortzuschreiten. Hierzu giebt es nun freilich keinen direkten, unfehlbar sicheren

Weg. Allein dieser ist auch bei keiner andern Erkenntnis vorhanden; gewisse Gründe der Wahrscheinlichkeit müssen immer in Betracht gezogen werden.

Wir können etwa das folgende Verfahren wählen. Die unmittelbare Zeitempfindung genügt zur Erkenntnis, dafs ein Pendel, welches z. B. eine Uhr reguliert und durch den Mechanismus der letzteren in Gang erhalten wird, näherungsweise isochrone Schwingungen ausführt; auch gelangen wir auf demselben Wege zur Annahme, dafs ein Tag dem andern an Dauer ziemlich gleich sei. Es liegt nahe, beide Beobachtungen zu vergleichen. Finden wir nun, dafs während einer Reihe von Tagen das Pendel zwischen je zwei Kulminationen der Sonne nahezu die gleiche Zahl Schwingungen ausführt, so wird unsere Vermutung des Isochronismus von Pendelschwingungen und Tagen fast zur Gewifsheit. Allerdings könnten die Pendelschwingungen und ebenso die Tage ganz verschiedene Dauer haben, während doch jeder Tag dieselbe Zahl von Pendelschwingungen aufwiese. Da aber kein innerer Zusammenhang zwischen Tageslänge und Schwingungsdauer des Pendels ersichtlich ist, wäre es ein höchst auffallendes und unwahrscheinliches Zusammentreffen, dafs bei unregelmäfsiger Dauer der Einzelvorgänge ein solches Zusammenstimmen stattfinden sollte. Beobachtungen dieser oder ähnlicher Art, welche fortgesetzt verfeinert werden können, führen zu der Annahme, verschiedene Vorgänge, wie die eben betrachteten, mit der höchsten Wahrscheinlichkeit als isochron anzunehmen. Hat man einmal die Überzeugung gewonnen, dafs gewisse kongruente Vorgänge, wie Pendelschwingungen, immer dieselbe Zeit in Anspruch nehmen, so bedarf es keiner weiteren Erörterung, wie man dieselben als Hilfsmittel zur Vergleichung von Zeitteilen benutzen kann*).

11. Auch der Begriff des Raumes kann zu mancherlei Schwierigkeiten Veranlassung geben; indessen dürfen wir von diesen meistens voraussetzen, dafs sie bereits in der Geometrie zur Besprechung gelangen. Nur ein Punkt bedarf hier einer eingehenderen Betrachtung, den wir bis jetzt aufser acht gelassen haben.

Alle Ortsveränderungen, welche wir betrachten, sind relativ, nicht absolut. Es existiert kein Punkt im Weltall, von dem wir mit Sicherheit oder nur mit einiger Wahrscheinlichkeit behaupten könnten, dafs er

*) Wenn Streintz in dem oben angeführten Buche, welches zur eingehenderen Orientierung über die Gegenstände dieses Paragraphen besonders geeignet ist, es mit d'Alembert und Poisson für selbstverständlich hält, dafs identische Bewegungen, wie z. B. Pendelschwingungen, auch isochron sind, wodurch unmittelbar ein Zeitmafs gegeben wäre, so kann sich dem der Verfasser nicht anschliefsen. Wäre z. B. die Attraktionskraft der Erde nicht konstant, sondern würde sie sich von Pendelschwingung zu Pendelschwingung sprungweise ändern, so würden geometrisch kongruente Schwingungen verschiedene Zeit in Anspruch nehmen. Ohne ein schon vorhandenes Zeitmafs ist die Identität von zwei Bewegungen gar nicht zu erkennen; denn erst durch Benutzung eines Zeitmafses läfst sich die Kraft, welche die Bewegung hervorbringt, als unabhängig von der Zeit nachweisen.

unbewegt sei; es ist nicht möglich, im Raume ein festes Koordinatensystem aufzustellen, auf das alle Bewegungen bezogen werden. Nur die gegenseitigen Ortsänderungen eines Systems von Punkten können wir konstatieren. Wir fragen nun: wie vertragen sich die aufgestellten physikalischen Grundgesetze mit der bloſsen Relativität der Bewegung?

Nehmen wir an, ein Punkt A bewege sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit in einer Geraden, falls ein bestimmtes Koordinatensystem als fest gedacht wird. Nun möge dieses Koordinatensystem selbst sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit so bewegen, daſs sämtliche Punkte des mit ihm fest zusammenhängenden Raumteils geradlinige, untereinander parallele Bahnen beschreiben. Die doppelte Bewegung, welche so Punkt A erhält, setzt sich nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten zu einer einzigen, wieder geradlinigen und gleichförmigen Bewegung zusammen. Galt also das Beharrungsgesetz für die Ruhelage des Koordinatensystems, so bleibt es auch für die beschriebene Bewegung desselben bestehen. Damit erfahren aber auch die Gesetze über die Wirkungsweise der Kräfte keine Änderung.

Ganz anders wird die Sache, wenn wir dem Koordinatensystem eine andere Bewegung (z. B. eine ungleich schnelle und eine ungleich gerichtete Verschiebung oder eine Drehung) beilegen. Dann verlieren das Beharrungsgesetz und damit auch die übrigen Bewegungsgesetze ihre Gültigkeit vollkommen. Wollen wir also die aufgestellten physikalischen Bewegungsgesetze beibehalten, so müssen wir die Hypothese zufügen, daſs das als fest angenommene Raumsystem absolut betrachtet keine andere Bewegung besitzt, als eine gleichförmig schnelle Parallelverschiebung*).

12. Die meſsbaren Gröſsen, welche in der Mechanik auftreten, lassen sich alle auf drei Elementargröſsen reduzieren, welche untereinander nicht vergleichbar sind: Länge**), Zeit und Masse. Behufs Messung dieser Gröſsen müssen willkürliche Einheiten angenommen werden; je nach Wahl derselben kann ein und derselbe Ausdruck durch sehr verschiedene Zahlenwerte dargestellt werden. Die gebräuchlichsten Einheiten sind gegenwärtig: Zentimeter, Sekunde (mittlerer Sonnenzeit) und Grammmasse, oder auch Meter, Sekunde und Kilogrammmasse. Für unsere

---

*) In sehr anregender Weise werden die hier zuletzt erörterten Fragen in der Schrift von C. Neumann, Über die Prinzipien der Galilei-Newtonschen Theorie, Leipzig 1870, behandelt. Streintz (a. a. O.) hält schon die Hypothese eines absolut festen Bezugssystems für unzulässig und spricht das Beharrungsgesetz nur für die gegenseitige Bewegung zweier materiellen Punkte aus, welche beide keiner Kraftwirkung unterliegen. Allein jene Hypothese wird von ihm doch schon implizite gemacht, wenn er die physikalische Nachweisbarkeit einer Drehung darthut; ohne festes Bezugssystem ist eine absolute Drehung kein mathematisch bestimmter Begriff.

**) Alle übrigen geometrischen Gröſsen lassen sich durch Längen darstellen.

theoretischen Untersuchungen kommen diese Festsetzungen nicht in Betracht; dagegen werden wir bei den Anwendungen die Einheiten immer angeben.

Wichtiger für uns ist die Frage: in welcher Art hängt ein Ausdruck von den drei Elementargröfsen ab, und wie ändert er sich demgemäfs, wenn die Einheiten geändert werden?

Wir sagen, ein Ausdruck sei in seinen Variabeln homogen und von der k^{ten} Dimension, wenn er nach Multiplikation sämtlicher Variabeln mit einer beliebigen Gröfse n in das n^k-fache seines früheren Wertes übergeht. Auf dem Gebiete der Mechanik können nur Ausdrücke, welche in den Längengröfsen, Zeitgröfsen und Massengröfsen einzeln genommen homogen und von gleicher Dimension sind, in derselben Gleichung auftreten. Andernfalls würden Änderungen der Einheiten den Inhalt der Gleichung beeinflussen.

Um anzugeben, dafs ein Ausdruck in den Längengröfsen, den Zeitgröfsen und den Massengröfsen resp. von den Dimensionen k_1, k_2, k_3 sei, legen wir ihm das Symbol

$$l^{k_1}\, t^{k_2}\, m^{k_3} \tag{2}$$

bei, indem wir Länge, Zeit und Masse durch l, t, m bezeichnen. Werden die drei Mafseinheiten resp. durch ihr n_1, n_2, n_3-faches ersetzt, so nimmt ein Ausdruck (2) den $n_1^{k_1}$, $n_2^{k_2}$, $n_3^{k_3}$ ten Teil seines früheren Wertes an.

Den bisher eingeführten zusammengesetzten Ausdrücken kommen folgende Dimensionen zu:

$$\begin{array}{ll} \text{Geschwindigkeit:} & l\,t^{-1}, \\ \text{Beschleunigung:} & l\,t^{-2}, \\ \text{Kraft:} & l\,t^{-2}\,m. \end{array}$$

Dies leuchtet ein, wenn man die Einheiten dieser drei Gröfsen folgendermafsen definiert:

Die Einheit der Geschwindigkeit ist diejenige Geschwindigkeit, bei welcher ein Punkt in der Zeiteinheit die Längeneinheit zurücklegt.

Die Einheit der Beschleunigung ist diejenige Beschleunigung, bei welcher die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um die Geschwindigkeitseinheit zunimmt.

Die Einheit der Kraft ist diejenige Kraft, welche der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung erteilt.

13. Man kann zwei Bewegungsvorgänge als ähnlich bezeichnen, wenn die sie bestimmenden Gleichungen identisch werden, nachdem man die drei Einheiten für eine der Bewegungen geeignet geändert hat. Nimmt man z. B. entsprechende Zeiten und Massen bei beiden Bewegungen als übereinstimmend an, giebt aber der einen k-fach gröfsere Längendimensionen wie der anderen, so müssen Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Kräfte bei der ersteren k-mal so grofs genommen werden wie bei der zweiten.

14. Wenn sich die Kräfte, welche auf ein System materieller Punkte einwirken, gegenseitig zerstören, so sagt man, das System befinde sich im

Gleichgewicht; die Punkte bewegen sich dann lediglich nach dem Beharrungsgesetze geradlinig mit gleichbleibender Geschwindigkeit.

Der Teil der Mechanik, welcher die Bewegungen rein mathematisch, ohne Rücksicht auf die verursachenden Kräfte behandelt, heifst Kinematik oder Phoronomie. Die Lehre vom Gleichgewicht heifst Statik; die Lehre von der Bewegung, welche durch Kräfte, die sich nicht zerstören, zu stande gebracht wird, heifst Dynamik. Wir werden nicht, wie dies oft geschieht, unsere Darstellung der Mechanik in diese drei Teile zerlegen, da hierdurch zu häufig Gleichartiges getrennt, Ungleichartiges vereinigt wird. Nur in einzelnen Abschnitten wird sich diese Einteilung geltend machen.

§ 3.

Bewegung eines materiellen Punktes infolge einer konstanten und gleichgerichteten Kraft.

1. Die einfachste Art einer Kraft ist die konstante, gleichgerichtete Kraft; die Bewegung materieller Punkte im luftleeren Raume infolge der Anziehungskraft der Erde bietet das nächstliegende, bekanntlich von Galilei behandelte Beispiel hierfür; es mufs nur vorausgesetzt werden, dafs die Bewegung auf einem so engen Raume vor sich geht, dafs innerhalb desselben die Attraktion als gleichgrofs und gleichgerichtet angesehen werden kann. Die Erde zieht nach dem später zu erörternden Newton'schen Attraktionsgesetze verschiedene Körper mit einer Kraft an, die ihrer Masse proportional ist; da indessen nach dem Vorhergehenden die Beschleunigung der Masse umgekehrt proportional ist, so hebt sich die Masse ganz heraus und die Bewegung erscheint von ihr vollständig unabhängig.

2. Die Bewegung geht offenbar in einer Ebene vor sich, nämlich in derjenigen, welche der Richtung der Attraktion parallel ist und in der ein willkürlich gegebenes Bahnelement liegt. Stellen wir die x-Achse vertikal, die positive Seite nach oben gerichtet, die y-Achse horizontal und bezeichnen wir die in Metern ausgedrückte Beschleunigung*), welche die Schwerkraft dem materiellen Punkte in einer Sekunde erteilt, mit g, so haben wir, weil die Schwere die Koordinate x zu verkleinern strebt:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0. \tag{1}$$

Die erste Integration giebt:

$$\frac{dx}{dt} = -gt + c, \quad \frac{dy}{dt} = C; \tag{2}$$

die beiden Konstanten c und C sind die Komponenten der Geschwindigkeit, welche der materielle Punkt zur Zeit $t = 0$ besitzt, wie man durch Einsetzen dieses Wertes erkennt. Die zweite Integration liefert

*) Für Berlin ist $g = 9{,}81278$, für Paris $g = 9{,}80896$; g hat als Beschleunigung die Dimension lt^{-2}.

$$x = -\frac{gt^2}{2} + ct + c_1, \quad y = Ct + C_1; \tag{3}$$

die Konstanten c_1 und C_1 sind die Koordinaten des Punktes zur Zeit $t = 0$. Wir können also den Ort des Punktes, sowie Gröfse und Richtung der Geschwindigkeit für eine beliebige Zeit $t = 0$ willkürlich festsetzen.

3. Nehmen wir den Ausgangspunkt der Bewegung (zur Zeit $t = 0$) zum Anfangspunkt der Koordinaten und setzen fest, dafs zu dieser Zeit der Punkt sich in Ruhe befinde, dafs also

$$c = 0, \quad C = 0, \quad C_1 = 0$$

sei, so haben wir für den freien Fall

$$x = -\frac{gt^2}{2}, \quad \frac{dx}{dy} = v = -gt, \tag{4}$$

wo sich die Minuszeichen aus der Wahl der Anfangsrichtung erklären. Die Geschwindigkeit wächst also hier proportional der Zeit, der zurückgelegte Weg proportional dem Quadrate derselben. Durch Elimination von t aus den Gleichungen (4) finden wir noch:

$$x = -\frac{v^2}{2g} \quad \text{und} \quad v = \sqrt{-2gx}. \tag{5}$$

Aus der ersten dieser Formeln können wir den Ort, an welchem eine gewisse Geschwindigkeit stattfindet, berechnen, aus der zweiten die Geschwindigkeit an jeder Stelle des Weges; da nur negative x auftreten, so bleibt der Wert von $\sqrt{-2gx}$ reell. Das Vorzeichen der Wurzel ist hier, wie aus der Natur der vorliegenden Bewegung hervorgeht, negativ zu nehmen.

4. Nehmen wir an, dafs eine Anfangsgeschwindigkeit in der Richtung der x-Achse vorhanden sei, so haben wir

$$x = -\frac{gt^2}{2} + ct, \quad \frac{dx}{dt} = v = -gt + c. \tag{5a}$$

Ist die Anfangsgeschwindigkeit nach unten gerichtet, also $c < 0$, so geht die Bewegung immer abwärts. Im umgekehrten Falle, also für $c > 0$, ist die Geschwindigkeit positiv, bis $-gt + c = 0$ oder $t = \frac{c}{g}$ geworden ist; dann wird sie negativ. Der materielle Punkt steigt zuerst aufwärts, dann wieder abwärts. Man berechnet ferner durch Elimination von t

$$x = \frac{c^2 - v^2}{2g} \quad \text{oder} \quad v^2 = c^2 - 2gx; \tag{6}$$

der absolute Betrag von v ist also derselbe, wenn x dasselbe ist. Der materielle Punkt hat demnach bei dem Aufsteigen wie bei dem Absteigen in demselben Punkte gleiche absolute Geschwindigkeit.

Die höchste erreichte Höhe h für $c > 0$ erhält man, indem man in (6) $v = 0$ einsetzt; man findet

$$h = \frac{c^2}{2g} \quad \text{oder} \quad c^2 = 2gh, \tag{7}$$

so daſs die Wurfhöhe dem Quadrate der Anfangsgeschwindigkeit proportional ist.

5. Wir wollen nun die Bewegung eines materiellen Punktes untersuchen, welcher bei Beginn derselben eine irgendwie gerichtete Anfangsgeschwindigkeit besitzt. Eine solche Bewegung tritt z. B. auf, wenn wir einen Stein in schräger Richtung in die Höhe werfen oder eine Kugel aus einem Geschütz in einer solchen Richtung abschieſsen*), vorausgesetzt, daſs dies im luftleeren Raume geschieht. Sei die erteilte Anfangsgeschwindigkeit v_0 und sei α der spitze Winkel zwischen ihrer Richtung und der positiven y-Achse (der Elevationswinkel), und gehe endlich die Bewegung wieder vom Anfangspunkte der Koordinaten aus, so hat man in (3)

$$c_1 = C_1 = 0\,, \quad c = v_0 \sin\alpha\,, \quad C = v_0 \cos\alpha$$

und man erhält

$$x = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin\alpha \,.\, t\,, \quad y = v_0 \cos\alpha \,.\, t\,. \tag{8}$$

Eliminirt man hieraus t, so ergiebt sich die Gleichung der Bahnkurve:

$$x = -\frac{g y^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha} + y \operatorname{tg}\alpha\,. \tag{9}$$

Die Bahn ist also eine Parabel, deren Hauptachse parallel der x-Achse ist. Den Scheitel der Parabel erreicht der Punkt in dem Augenblicke, in welchem die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit zu Null wird, d. h. für

$$v_0 \sin\alpha = g t\,,$$

also für

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}\,; \tag{10}$$

das entsprechende y ist

$$y = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2g}\,. \tag{11}$$

Für den Punkt, in welchem der materielle Punkt die y-Achse zum zweiten Male erreicht, haben wir aus (9)

$$y = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha\,. \tag{12}$$

Wir ersehen aus (11) und (12), daſs der höchste Punkt in der Mitte der Bahn erreicht wird.

Aus (10) folgt weiter, daſs wir den materiellen Punkt dann am weitesten wegschleudern können, wenn wir $\sin 2\alpha$ zu einem Maximum, d. h. $\alpha = 45^0$ machen.

---

*) Natürlich nur insoweit, als diese Körper durch einen materiellen Punkt ersetzt werden können.

Wir wollen endlich noch die folgende Aufgabe stellen: Welchen Elevationswinkel α müssen wir bei gegebenem v_0 einem Geschütze geben, um einen Punkt, dessen Koordinaten x, y sind, zu treffen? Wir lösen dazu einfach die Gleichung (9) nach α auf und erhalten:

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_0^2}{gy} \pm \frac{1}{gy} \sqrt{v_0^4 - 2gxv_0^2 - g^2y^2}.$$

Aus dem doppelten Vorzeichen der Wurzel ersehen wir, dafs zwei Winkel unseren Anforderungen genügen. Welche Punkte nur auf eine Weise, welche gar nicht erreicht werden können, läfst sich leicht aus (13) erkennen. — Ist speziell $x = 0$, d. h. liegen der Anfangs- und Endpunkt der Bahn in gleicher Höhe, so sind die beiden Werte von $\operatorname{tg} \alpha$ zueinander reciprok, d. h. die beiden Werte von α sind komplementär. Man unterscheidet in der Ballistik den Kernschufs, welcher das Ziel unter Anwendung des kleineren Elevationswinkels erreicht, von dem Bombenschufs, bei welchem der gröfsere Elevationswinkel benutzt wird.

Wir haben die Bewegung unter dem Einflusse einer konstanten, gleichgerichteten Kraft an dem praktisch wichtigsten Beispiele erörtert; es braucht nicht angegeben zu werden, wie die gefundenen Resultate zu verallgemeinern sind.

§ 4.

Dieselbe Bewegung im widerstehenden Mittel.

1. Findet die Fall- und Wurfbewegung in einem widerstehenden Mittel, z. B. in der Luft statt, so tritt erfahrungsmäfsig aufser der Schwerkraft eine weitere Kraft in Wirkung, welche lediglich von der augenblicklichen Geschwindigkeit abhängt (wenn nicht auch noch auf die Gestalt des Körpers Rücksicht zu nehmen ist) und deren absoluten Betrag zu verringern strebt; man nennt sie den Luftwiderstand*). Die Berechnung desselben ist eigentlich ein Problem der Aërodynamik, doch begnügen wir uns hier mit erfahrungsmäfsigen Daten. Diesen gemäfs ist der Luftwiderstand ungefähr dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional; wir setzen für ihn kv^2, wo k eine positive Konstante ist, welche der Dichtigkeit der Luft direkt und der Masse des materiellen Punktes umgekehrt proportional ist. Denkt man sich an Stelle des Punktes eine Kugel, so ist k deren Oberfläche direkt proportional; im übrigen ist k durch Versuche zu bestimmen.

Wir betrachten zunächst den Fall, dafs keine seitliche Geschwindigkeit vorhanden ist; auch müssen wir die absteigende Bewegung von der aufsteigenden trennen, da der Luftwiderstand nicht eine Kraft von kon-

*) Mit dem Einflusse des Luftwiderstandes beschäftigt sich bereits Newton in den Philosophiae naturalis principia mathematica; weitere Untersuchungen über die hier behandelten Probleme verdankt man Joh. und Nic. Bernoulli, Euler, Legendre Coriolis, Jacobi u. A.

stanter Richtung, sondern immer der Richtung der Bewegung entgegengesetzt ist, so dafs in beiden Fällen die Gleichung eine andere wird.

2. Im Falle der absteigenden Bewegung haben wir

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g + kv^2 \tag{1}$$

oder, da

$$v = \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt} = -g + kv^2 \quad \text{oder} \quad dt = \frac{dv}{-g + kv^2}, \tag{2}$$

also

$$t + c = -\frac{1}{2\sqrt{gk}} \log \frac{\sqrt{\frac{g}{k}} + v}{\sqrt{\frac{g}{k}} - v} \text{*)}. \tag{3}$$

Hieraus folgt

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{k}} + v}{\sqrt{\frac{g}{k}} - v} = e^{-2\sqrt{gk}(t+c)}, \tag{4}$$

also

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{e^{-2\sqrt{gk}(t+c)} - 1}{e^{-2\sqrt{gk}(t+c)} + 1} = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{e^{-\sqrt{gk}(t+c)} - e^{\sqrt{gk}(t+c)}}{e^{-\sqrt{gk}(t+c)} + e^{\sqrt{gk}(t+c)}}. \tag{5}$$

Die weitere Integration giebt, wie durch Differentation zu verifizieren,

$$x = -\frac{1}{k} \log \left[e^{-\sqrt{gk}(t+c)} + e^{\sqrt{gk}(t+c)}\right] + C. \tag{6}$$

3. Soll für $t = 0$ auch $x = 0$ und $v = 0$ sein, so hat man aus (5)

$$1 = e^{-2\sqrt{gk}.c},$$

also

$$c = 0$$

und aus (6)

$$C = \frac{1}{k} \log \left[e^{-\sqrt{gk}.c} + e^{\sqrt{gk}.c}\right] = \frac{1}{k} \log 2;$$

damit wird

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}} \frac{e^{-\sqrt{gk}.t} - e^{\sqrt{gk}.t}}{e^{-\sqrt{gk}.t} + e^{\sqrt{gk}.t}}, \tag{7}$$

$$x = -\frac{1}{k} \log \frac{e^{-\sqrt{gk}.t} + e^{\sqrt{gk}.t}}{2}. \tag{8}$$

---

*) Unter log verstehen wir überall den natürlichen Logarithmus. — Es ist stets $-g + kv^2 < 0$, da sonst eine nach aufwärts gehende Beschleunigung eintreten würde.

Ist dagegen eine abwärtsgehende Anfangsgeschwindigkeit v_0 vorhanden, so ist

$$\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v_0}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v_0}=e^{-2c\sqrt{gk}},$$

also

$$c=-\frac{1}{2\sqrt{gk}}\log\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v_0}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v_0} \tag{9}$$

und

$$C=\frac{1}{k}\log\left[\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}+v_0}{\sqrt{\frac{g}{k}}-v_0}}+\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{g}{k}}-v_0}{\sqrt{\frac{g}{k}}+v_0}}\right]. \tag{10}$$

Aus (5) ersieht man, daſs für ein ins Unendliche wachsendes t sich v einem Maximalwerte $-\sqrt{\frac{g}{k}}$ nähert, für welchen Schwerkraft und Luftwiderstand sich die Wage halten; die Beschleunigung wird dabei immer kleiner.

4. Ist eine aufwärts gerichtete Anfangsgeschwindigkeit vorhanden, so hat man für den aufsteigenden Teil des Weges

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dv}{dt}=-g-kv^2, \tag{11}$$

also

$$dt=-\frac{dv}{g+kv^2}, \tag{12}$$

woraus

$$t+c=-\frac{1}{\sqrt{gk}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}\,v \tag{13}$$

oder

$$v=\frac{dx}{dt}=-\sqrt{\frac{g}{k}}\operatorname{tg}\left[\sqrt{gk}(t+c)\right] \tag{14}$$

folgt. Weiter ist

$$x+C=\frac{1}{k}\log\cos\left[\sqrt{gk}(t+c)\right]. \tag{15}$$

Ist für $t=0$ $v=v_0$ und $x=0$, so haben wir

$$c=-\frac{1}{\sqrt{gk}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{k}{g}}\,v_0, \tag{16}$$

$$(17) \qquad C = \frac{1}{k} \log \cos \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{g}}\, v_0 = \frac{1}{k} \log \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{k}{g} v_0^2}}$$

$$= -\frac{1}{2k} \log \left(1 + \frac{k}{g} v_0^2\right).$$

Für den höchsten Punkt, bis zu welchem der Körper aufsteigt, haben wir $v = 0$ zu setzen; dann ist

$$t = -c = \frac{1}{\sqrt{gk}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{k}{g}}\, v_0,$$

woraus man für die Steighöhe h findet

$$(18) \qquad h = -C = \frac{1}{2k} \log \left(1 + \frac{k v_0^2}{g}\right).$$

Fällt nun der Körper, nachdem er diese Höhe erreicht hat, wieder abwärts, bis er zur ursprünglichen Stelle zurückkommt, so ist die Zeit t_1, welche er dazu braucht, und die Geschwindigkeit v_1, welche er dabei erlangt, nach (8) und (7) durch

$$(19) \qquad h = \frac{1}{k} \log \frac{e^{-\sqrt{gk}.t_1} + e^{\sqrt{gk}.t_1}}{2}$$

und

$$(20) \qquad v_1 = \sqrt{\frac{g}{k}}\, \frac{e^{-\sqrt{gk}.t_1} - e^{\sqrt{gk}.t_1}}{e^{-\sqrt{gk}.t_1} + e^{\sqrt{gk}.t_1}}$$

bestimmt. Durch Elimination von t_1 aus diesen beiden Gleichungen findet man

$$v_1 = -\sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 - e^{-2hk}},$$

und durch Einsetzen des Wertes für h aus (18)

$$(21) \quad v_1 = -\sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 - e^{-\log\left(1 + \frac{k v_0^2}{g}\right)}} = -\sqrt{\frac{g}{k}} \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{k v_0^2}{g}}}$$

$$= -v_0 \sqrt{\frac{g}{g + k v_0^2}}.$$

Es ist hiernach

$$(22) \qquad -v_1 < v_0.$$

Während also der in die Höhe geworfene Körper auf dem Rückwege an jeder Stelle die gleiche Geschwindigkeit erreicht wie beim Hinwege, wenn kein Luftwiderstand stattfindet, wird infolge des letzteren die Geschwindigkeit bei der Rückkehr geringer als beim Aufsteigen.

5. Wir wollen bei dieser Gelegenheit die Bewegung untersuchen, die ein materieller Punkt, auf den keine Kraft wirkt, infolge des Luft-

widerstandes ausführt. Ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0 in der Richtung der positiven x-Achse vorhanden, so haben wir:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -kv^2, \quad dt = -\frac{dv}{kv^2}, \tag{23}$$

woraus sich

$$t + c = \frac{1}{kv}$$

oder, da $v = v_0$ für $t = 0$ ist,

$$t = \frac{1}{kv} - \frac{1}{kv_0}$$

oder

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}} \tag{24}$$

ergiebt. Hieraus folgt schliesslich, wenn $x = 0$ für $t = 0$ genommen wird,

$$x = \frac{1}{k} \log\left(kt + \frac{1}{v_0}\right). \tag{25}$$

Der Körper kommt also nie zur Ruhe, obgleich seine Geschwindigkeit beständig und unter jede Grenze abnimmt; er legt mit der Zeit einen unendlich grofsen Weg zurück.

6. Wäre das Gesetz des Luftwiderstandes ein anderes, so würden sich die behandelten Aufgaben trotzdem durch blofse Quadraturen lösen lassen. In jedem Falle hätte man nämlich, wenn f irgend eine Funktion bezeichnet:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = f(v), \tag{26}$$

also

$$t = \int \frac{dv}{f(v)} = F(v). \tag{27}$$

Berechnet man hieraus $v = \frac{dx}{dt} = \varphi(t)$, so hat man

$$x = \int \varphi(t)\,dt. \tag{28}$$

7. Geht die Bewegung durch die Schwere nicht in einer Geraden vor sich, so läfst sie sich leicht für den Fall verfolgen, dafs der Luftwiderstand der Geschwindigkeit proportional ist. Wir haben

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g - kv\frac{dx}{ds}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -kv\frac{dy}{ds} \tag{29}$$

und, da

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{v}\frac{dx}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dy}{ds} = \frac{1}{v}\frac{dy}{dt},$$

so folgen

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g - k\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{dy}{dt}, \tag{30}$$

zwei Gleichungen, die sich getrennt behandeln lassen. Sei $\frac{dx}{dt} = u$, so ist

$$\frac{du}{dt} = -g - ku, \quad \text{also} \quad dt = -\frac{du}{g+ku},$$

folglich

$$t + c = -\frac{1}{k}\log(g+ku),$$

woraus

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{e^{-k(t+c)} - g}{k}$$

und endlich

$$x = -\frac{1}{k^2}e^{-k(t+c)} - \frac{gt}{k} + C$$

folgt.

Nehmen wir $g = 0$; so geht die Differentialgleichung für x bis auf die Bezeichnung in diejenige für y über; daher haben wir

$$y = -\frac{1}{k^2}e^{-k(t+c_1)} + C_1.$$

Ist der Ausgangspunkt für $t = 0$ der Nullpunkt, die Anfangsgeschwindigkeit v_0, der Elevationswinkel α, so haben wir

$$c = -\frac{1}{k}\log(g + kv_0\sin\alpha), \quad C = \frac{1}{k^2}(g + kv_0\sin\alpha),$$

$$c_1 = -\frac{1}{k}\log(kv_0\cos\alpha), \quad C_1 = \frac{v_0\cos\alpha}{k}.$$

Somit wird

$$\begin{cases} x = \frac{g + kv_0\sin\alpha}{k^2}(1 - e^{-kt}) - \frac{gt}{k}, \\ y = \frac{v_0\cos\alpha}{k}(1 - e^{-kt}). \end{cases} \tag{31}$$

Bemerkenswert ist, dafs hier y nicht wie bei widerstandsloser Bewegung ins Unendliche wachsen kann, sondern nur den Maximalwert $\frac{v_0\cos\alpha}{k}$ asymptotisch erreicht.

8. Um endlich auch dieselbe Bewegung unter der Voraussetzung zu behandeln, dafs der Luftwiderstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, zerlegen wir die wirkenden Kräfte in zwei Komponenten, von denen die eine der y-Achse parallel, also von der Schwerkraft frei ist, die andere in die Richtung der Normalen der Bahn fällt, also vom Luftwiderstande nicht abhängt. Ist α der Winkel, welchen die Bahnrichtung mit der positiv gerichteten y-Achse bildet, so haben wir

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -kv^2\cos\alpha. \tag{32}$$

Da ferner $\frac{dy}{dt} = v \cos \alpha$ ist, so wird aus (32)

$$\frac{d(v \cos \alpha)}{dt} = - kv^2 \cos \alpha$$

oder

$$\frac{d(v \cos \alpha)}{v \cos \alpha} = - kvdt = - kds. \tag{33}$$

Die Komponente nach der Bahnnormalen ist $- g \cos \alpha$; dieselbe ist in der Richtung des Krümmungsradius, also offenbar immer nach der unteren Seite der Kurve gerichtet. Sie ist nach § 1, (13) der Größe $\frac{v^2}{\varrho}$, worin ϱ den Krümmungshalbmesser bezeichnet, gleichzusetzen. Hiernach erhalten wir, wenn noch $\varrho = \frac{ds}{d\alpha}$ gesetzt wird*),

$$g \cos \alpha = - v^2 \frac{d\alpha}{ds}. \tag{34}$$

Gleichung (33) giebt durch Integration

$$\log (v \cos \alpha) = - ks + c. \tag{35}$$

Bezeichnen α_0 und v_0 die Anfangswerte von α und v für $t = 0$, $s = 0$, so folgt

$$\log (v_0 \cos \alpha_0) = c,$$

also

$$\log \frac{v \cos \alpha}{v_0 \cos \alpha_0} = - ks$$

oder

$$v \cos \alpha = \frac{dy}{dt} = v_0 \cos \alpha_0 e^{-ks}. \tag{36}$$

Den hieraus folgenden Wert von v setzen wir in (34) ein und erhalten

$$g \cos \alpha = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0 e^{-2ks}}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{ds}$$

oder

$$\frac{d\alpha}{\cos^3 \alpha} = \frac{g e^{2ks}}{v_0^2 \cos^2 \alpha_0} ds, \tag{37}$$

somit durch Integration

$$\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + \log \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{g e^{2ks}}{k v_0^2 \cos^2 \alpha_0} + C. \tag{38}$$

---

*) Man beachte, daß wir die Winkel, wie allgemein in der höheren Mathematik üblich, durch den entsprechenden Bogen mit dem Radius 1 ersetzt denken. $d\alpha$ ist daher $\sin d\alpha$ gleichwertig, und die Richtigkeit der Gleichung

$$\varrho \sin d\alpha = ds$$

erhellt unmittelbar.

Die Konstante bestimmt sich durch Einsetzen von $s = 0$, $\alpha = \alpha_0$ in etwas umständlicher Form. Die Gleichung liefert den Bogen s, falls α gegeben ist.

Will man x und y in die Gleichung bringen, so benutzt man

$$dy = ds \cos \alpha$$

und erhält aus (37)

$$dy = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha_0 e^{-2ks}}{g \cos^2 \alpha} d\alpha$$

oder, wenn man mittels (38) die Exponentialgröfse beseitigt,

$$(39) \qquad dy = \frac{d\alpha}{k\left[\sin \alpha + \cos^2 \alpha \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - C \cos^2 \alpha\right]}.$$

Da

$$(40) \qquad dx = \operatorname{tg} \alpha dy$$

ist, so erhalten wir

$$(41) \qquad dx = \frac{\operatorname{tg} \alpha \, d\alpha}{k\left[\sin \alpha + \cos^2 \alpha \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) - C \cos^2 \alpha\right]}.$$

Durch Quadratur werden x und y gefunden.

Beide Koordinaten drücken sich als Funktionen von α aus; man kann demnach für beliebig viele α x und y berechnen und so die Bahnkurve Punkt für Punkt konstruieren. Man erhält eine Kurve, deren Kulminationspunkt jenseit der Mitte der Wurfweite liegt und welche eine zur x-Achse parallele Asymptote besitzt.

Die Berechnung der Geschwindigkeit für einen Punkt der Bahn bietet keine Schwierigkeit.

§ 5.

Arbeit und lebendige Kraft.

1. Die Resultate von § 3 setzen uns in den Stand einige Begriffe einzuführen, welche in der Folge eine grofse Rolle spielen werden: die Begriffe der Arbeit und der lebendigen Kraft. Trotz ihrer Einfachheit gaben dieselben von jeher zu grofser Verwirrung und Unklarheit Veranlassung, und es mufs ausgesprochen werden, dafs diese Mängel aus neueren Darstellungen noch keineswegs überall gewichen sind. Es ist sehr bedenklich, wenn man Begriffen, welchen das gewöhnliche Leben eine, wenn auch nicht gerade präzis formulierte, Bedeutung gegeben hat, bei wissenschaftlichen Untersuchungen willkürlich eine davon verschiedene beilegt; zum mindesten ist in einem solchen Falle zu verlangen, dafs die abweichende Auffassung klar ausgesprochen wird.

2. Unzweifelhaft verbindet auch der nicht mathematisch Gebildete

mit dem Worte **Arbeit** einen gewissen Begriff. Um denselben zu erkennen, müssen wir auf die Betrachtung von § 2 über die Bethätigung der Muskelkraft zurückgreifen. Wenn ein Mensch eine körperliche Arbeit leistet, so mufs er eine gewisse Zeit hindurch eine gewisse Muskelanstrengung ausführen. Die Gröfse der Arbeit wird einerseits von der Zeitdauer, andrerseits von der Stärke der Muskelanstrengung abhängig sein; wir können sie, falls wir die letztere als konstant voraussetzen, beiden direkt proportional annehmen. Wird die Arbeit verwendet, um einem Körper (materiellen Punkte) von der Masse m eine gewisse Beschleunigung g zu erteilen, so ist die Muskelanstrengung dem Produkte mg, die geleistete Arbeit der Gröfse mgt proportional. Dieser Begriff läfst sich nun leicht auf jede andere Kraft übertragen.

Leider hat man in der Mechanik dem Worte Arbeit diese wohlpräzisierte Bedeutung, die sich mit der gewöhnlichen Auffassung vorzüglich deckt, **nicht** beigelegt*). Bewegt eine konstante Kraft k einen materiellen Punkt in ihrer eignen Richtung auf einer Strecke s, so sagt man, sie habe während dessen die Arbeit ks ausgeführt; ist k variabel, so mufs man denselben Ausdruck für jedes Wegteilchen ds bilden und summieren; man hat dann für die Arbeit $\int_0^s k\,ds$. Dieselbe ist positiv, soweit die Bewegung in der Richtung der Kraftwirkung, negativ, soweit sie derselben entgegen geschieht; fällt die Richtung der Kraft nicht in die Bewegungsrichtung, so mufs an Stelle von k die Projektion der Kraft auf die Bewegungsrichtung gesetzt werden.

Um die Verwirrung nicht zu vermehren, wollen wir diese Definition der Arbeit beibehalten, konstatieren jedoch ausdrücklich, dafs sie sich mit dem Begriff der Arbeit im alltäglichen Sinne keineswegs immer deckt, wie doch so oft behauptet wird. Wenn jemand ein Gewicht eine Zeit lang in die Höhe hält, so hat er damit, im gewöhnlichen Sinne, gewifs eine Arbeit ausgeführt; allein im Sinne der Mechanik ist die Arbeit $= 0$, da der Weg des Gewichtes $= 0$ ist. Verwenden wir unsere Muskelkraft, um einen frei beweglichen Körper durch konstanten Druck in Bewegung zu setzen, so wissen wir, dafs derselbe in der ersten Sekunde einen geringeren Weg zurücklegt, als in der zweiten, so dafs auch in der ersten Sekunde eine geringere Arbeit geleistet wird, während doch die Anstrengung dieselbe ist. Nur in speziellen Fällen entspricht das Arbeitsmafs dem Sachverhalte, nämlich dann, wenn die zurückgelegte Strecke bei konstanter Kraft der Zeit proportional ist, z. B. wenn ein Wagen, der Reibung zu überwinden hat, mit konstanter Kraft

*) Man bezeichnet diese Gröfse nach **Belanger** als „**Antrieb der Kraft**". Ist die Kraft k variabel, so beträgt ihr Antrieb in dem Zeitintervall von t_0 bis t:

$$\int_{t_0}^{t} k\,dt\,.$$

vorwärts geschoben wird; macht sich dabei auch anfänglich eine Beschleunigung bemerklich, so tritt doch bald infolge der Reibung nahezu eine gleichmäfsige Bewegung ein. Alles in Allem müssen wir sagen, dafs der rein mathematische Begriff ks oder $\int kds$ den Namen Arbeit mit Unrecht führt*).

3. In engem Zusammenhange mit der Arbeit steht der Begriff der lebendigen Kraft. Es ist eine alltägliche Erfahrung, dafs ein in Bewegung befindlicher Körper Wirkungen ausüben kann, wie man sie sonst einer Kraft zuschreibt. Eine abgeschossene Kanonenkugel vermag eine Mauer zu zertrümmern oder in einen Gegenstand einzudringen; sie vermag auch einen Gegenstand, den sie trifft, in Bewegung zu setzen. Man sagt daher, ein bewegter Körper besitze infolge seiner Bewegung eine lebendige Kraft, und es handelt sich darum, für letztere ein geeignetes Mafs ausfindig zu machen. Zu diesem Zwecke wollen wir uns denken, dafs der Körper (materielle Punkt) mit der Masse m sich mit der Anfangsgeschwindigkeit v einer konstant wirkenden Kraft (der Krafteinheit), welche im stande ist, der Masse 1 die Einheit der Beschleunigung zu erteilen, entgegenbewege. Wir fragen: auf einer wie langen Strecke s bewegt sich dieser Körper der Kraft entgegen, bis seine Geschwindigkeit den Wert Null erreicht hat? Man kann sagen, die Kraft habe dann die negative Arbeit $-s$ ausgeführt, da die Bewegung ihr entgegen geht. Umgekehrt sagt man, durch die im Körper enthaltene lebendige Kraft sei die Arbeit s verrichtet worden. Die Strecke s läfst sich aber nach § 3 leicht berechnen; man mufs nur an Stelle von g die auf den Körper durch jene Krafteinheit ausgeübte Beschleunigung $\frac{1}{m}$ setzen. Wir erhalten $s = \frac{mv^2}{2}$ und diese Gröfse nehmen wir als das Mafs der lebendigen Kraft; ja wir nennen geradezu $\frac{mv^2}{2}$ die lebendige Kraft eines Körpers mit der Masse m und der Geschwindigkeit v. Sie ist identisch mit der Arbeitsmenge, welche der Körper infolge seiner Geschwindigkeit zu leisten im stande ist**).

---

*) Die Bezeichnung „Arbeit" für den erörterten Begriff wurde von Coriolis zuerst gebraucht, von Poncelet aber erst recht eingebürgert. S. z. B. dessen Introduction à la Mécanique industrielle, 2. éd. p. 55 ff. Seine Argumente für das Zutreffende der Bezeichnung gründen sich auf Beispiele von dem Charakter des letztangeführten.

Einsprache gegen die Definition der Arbeit erhebt A. R. Moon in: On the measure of work in the theory of energy (Philos. Mag. 1874) oder Sur la mesure du travail dans la théorie de l'énergie, Les Mondes (2) XXXV, p. 16—18.

**) Leibnitz bezeichnete die Gröfse mv^2, die er als den eigentlichen Ausdruck für die Kraft eines bewegten Körpers ansah, als lebendige Kraft. Er verwickelte sich mit den Anhängern des Descartes, welcher die „Bewegungsgröfse" mv als Mafs jener Kraft betrachtete, in einen lang andauernden Streit, der eigentlich gegenstandslos war, da es sich nur um willkürliche Festsetzungen

4. Wirkt umgekehrt auf den in Ruhe befindlichen Körper die Einheit der Kraft, so wird derselbe derart in Bewegung gesetzt, dafs er nach der Zeit t die Geschwindigkeit $v = \frac{t}{m}$ erreicht und den Weg $s = \frac{t^2}{2m}$ zurückgelegt hat; es ist also $s = \frac{mv^2}{2}$, und dies ist zugleich die Arbeit, welche von der Kraft geleistet wurde. Man kann daher sagen: Die Arbeit, welche nötig ist, um einem ruhenden Körper eine gewisse Geschwindigkeit (lebendige Kraft) zu geben, ist gleich der Arbeit, die er unter Aufzehrung dieser Geschwindigkeit (lebendigen Kraft) zu leisten im stande ist. Dieser Satz, welchen wir später verallgemeinert wiederfinden werden, ist die Grundlage des Prinzips der Erhaltung der lebendigen Kraft.

5. Bei den in die Höhe geworfenen Körpern bemerkten wir, dafs die Schwerkraft (das gleiche gilt natürlich für jede konstante Kraft) die lebendige Kraft derselben aufzehrt, dafs sie nachher aber eine umgekehrt gerichtete Geschwindigkeit hervorruft; ist der Körper in seinen Ausgangspunkt zurückgekehrt, so ist die Geschwindigkeit, also auch die lebendige Kraft, wieder dieselbe. Anders verhält es sich, wenn der Luftwiderstand hinzutritt; die lebendige Kraft, welche der Körper bei seiner Rückkehr hat, ist geringer als die anfängliche. Wir bemerken bereits hier, was wir später weiter ausführen, dafs es einerseits Kräfte giebt, welche die von ihnen aufgezehrte lebendige Kraft wieder neu hervortreten lassen (wie die Schwerkraft), wenn der Körper an seinen Ausgangspunkt zurückkehrt; dafs aber andrerseits solche vorhanden sind, welche lebendige Kraft konsumieren, ohne neue zu erzeugen (wie Luftwiderstand, Reibung u. s. w.); Kräfte, welche lebendige Kraft erzeugen, ohne solche aufzuzehren, existieren erfahrungsmäfsig nicht. Auch der zweite Fall wird später eingehender zu untersuchen sein.

6. Arbeit und lebendige Kraft besitzen, wie nach dem Vorhergehenden selbstverständlich, dieselbe Dimension:

$$l^2 t^{-2} m .$$

Man lasse sich nicht etwa dadurch irre machen, dafs die lebendige Kraft als ein Weg definiert wurde; es ist zu beachten, dafs bei der Definition auch die Krafteinheit eine Rolle spielt.

Ferner ist die Dimension der Bewegungsgröfse und des Antriebs der Kraft:

$$l t^{-1} m .$$

---

handelte. — Es wird gegenwärtig immer mehr gebräuchlich, die Gröfse $\frac{mv^2}{2}$, welche eine direkte mechanische Bedeutung besitzt, als lebendige Kraft zu bezeichnen.

Die Wichtigkeit, welche Arbeit und lebendige Kraft in der Mechanik gewonnen haben, beruht nicht in der Bedeutung dieser Begriffe, sondern lediglich in dem Umstande, dafs sie bei einem der allgemeinen Integrale der Bewegungsgleichungen auftreten (§ 24).

§ 6.

Die Zentralbewegung.

1. Von einem festen Punkte (Zentrum), den wir in der Folge als Nullpunkt des Koordinatensystems annehmen wollen, werde auf einen beweglichen materiellen Punkt eine Kraft ausgeübt, welche der Masse des materiellen Punktes proportional ist, also eine von dieser Masse unabhängige Beschleunigung hervorruft, welche ferner, anziehend oder abstofsend, in der Richtung der Verbindungslinie beider Punkte (des Radiusvektor) wirkt und im übrigen nur von der Entfernung r derselben abhängig ist. Wir nennen eine solche Kraft Zentralkraft, die hervorgerufene Bewegung Zentralbewegung. Die Annahme eines festen Punktes widerspricht allerdings dem Prinzipe von Wirkung und Gegenwirkung; doch werden wir zahlreiche Beispiele kennen lernen, welche den beschriebenen Verhältnissen näherungsweise entsprechen oder sich durch eine einfache Umformung auf den hier zu behandelnden Fall zurückführen lassen.

Die Lehre von den Zentralkräften beherrscht geradezu die Mechanik; die wichtigsten und am besten untersuchten Kräfte gehören hierher. Bemerkt möge werden, dafs die zweite Annahme, welche die Richtung der Kraft in die Verbindungslinie der beiden Punkte fallen läfst, nicht allen von der Physik gebotenen Beispielen, wenn auch den meisten, entspricht; die Wirkung der Elementarteile zweier elektrischen Ströme aufeinander bietet ein Beispiel des Gegenteils.

2. Die Zentralbewegung ist aufser von der Zentralkraft noch von der Lage, Geschwindigkeit und Geschwindigkeitsrichtung des bewegten materiellen Punktes zu einer bestimmten Zeit (etwa $t = 0$) abhängig. Legt man durch das Zentrum und die Richtung der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit eine Ebene, so wird der materielle Punkt durch keine Ursache veranlafst, dieselbe zu verlassen; die Bewegung ist also eine ebene, weshalb wir mit zwei Koordinaten, x und y, ausreichen. Liegt insbesondere das Zentrum in der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit, so ist die Bewegung geradlinig, so dafs wir nur eine Koordinate gebrauchen.

3. Im Falle der geradlinigen Bewegung haben wir für den materiellen Punkt x

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x), \tag{1}$$

worin $f(x)$ eine beliebige Funktion, welche das Gesetz der Anziehung oder Abstofsung enthält, bedeutet; es findet Anziehung statt, wenn $f(x)$ für positive x stets negativ, für negative x stets positiv ist, Abstofsung im entgegengesetzten Falle; in allen übrigen Fällen wechselt Anziehung und Abstofsung. Es kann nötig werden, $f(x)$ für positive und negative

x verschieden zu nehmen und demnach die Bewegung in zwei getrennt zu behandelnde Teile zu zerlegen*).

Setzen wir

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \text{also} \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx},$$

so wird aus (1)

$$v\frac{dv}{dx} = f(x)$$

oder

(2) $$vdv = f(x)dx,$$

woraus durch Integration

(3) $$\frac{v^2}{2} = \int f(x)dx = F(x)$$

folgt. Die in $F(x)$ eintretende Konstante bestimmt sich aus der Anfangsgeschwindigkeit. Wir haben hiernach

$$v = \sqrt{2F(x)}$$

oder

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2F(x)}},$$

(4) $$t = \int \frac{dx}{\sqrt{2F(x)}},$$

wo eine durch die Anfangslage zu bestimmende Konstante hinzukommt. Die Zweideutigkeit der auftretenden Wurzel zeigt, dafs im allgemeinen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten dasselbe x und dieselbe Geschwindigkeit erreicht wird.

Das Problem ist also in jedem Falle durch zwei Quadraturen (Integrationen) lösbar; da dieselben, wenn nicht in geschlossener Form, doch durch Reihenentwicklung oder mechanische Quadratur ausgeführt werden können, so mufs die Aufgabe als allgemein lösbar bezeichnet werden.

4. Im allgemeineren Falle sei der materielle Punkt x, y, also $r = \sqrt{x^2 + y^2}$; die Richtungskosinus von r nach den Koordinatenachsen sind $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$. Wir haben

*) Wenn $f(x)$ eine gerade Funktion von x, d. h. wenn $f(-x) = f(x)$ ist und $f(x)$ überall das gleiche Zeichen besitzt, so hat die Beschleunigung nach (1) auf beiden Seiten des Nullpunktes die gleiche Richtung, so dafs auf der einen Seite Anziehung, auf der anderen Abstofsung statthat. Soll auf beiden Seiten Anziehung oder Abstofsung in Wirksamkeit sein, so mufs $f(x)$ für positive und negative x verschiedene Zeichen erhalten. Bei einer ungeraden Funktion $f(x)$, für welche $f(-x) = -f(x)$ ist, kann in diesem Falle beiderseits das gleiche Zeichen angewandt werden. Andere Funktionen sind in einen geraden und einen ungeraden Teil zu zerlegen.

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = f(r)\,\dfrac{x}{r}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = f(r)\,\dfrac{y}{r}; \end{cases}$$

r ist hierin immer positiv zu nehmen. Ein positiver Wert von $f(r)$ entspricht der Abstofsung, ein negativer der Anziehung; die Umständlichkeiten in Beziehung auf das Vorzeichen wie beim letzten Falle treten hier nicht auf.

5. Subtrahieren wir von der mit x multiplizierten zweiten Gleichung (5) die mit y multiplizierte erste, so erhalten wir:

$$(6)\qquad x\,\frac{d^2y}{dt^2} - y\,\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

woraus durch Integration — durch Differentiation ist das Resultat wieder leicht zu verifizieren —

$$(7)\qquad x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt} = c$$

folgt. Diese Gleichung ist von dem speziellen Gesetze der Attraktion vollkommen unabhängig.

6. Multiplizieren wir die Gleichungen (5) resp. mit $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ und addieren, so erhalten wir:

$$(8)\qquad \frac{dx}{dt}\,\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\,\frac{d^2y}{dt^2} = f(r)\,\frac{x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt}}{r} = f(r)\,\frac{dr}{dt}$$

und durch Integration:

$$(9)\qquad \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = \int f(r)\,dr.$$

7. Die Gleichungen (7) und (9) enthalten, wenn man r durch x und y ausdrückt, nur x, y, $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$; eliminiert man aus beiden dt, so erhält man eine Gleichung zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$, also eine von der Zeit freie, daher nur die Bewegungsbahn bestimmende Differentialgleichung erster Ordnung, von deren Integration die Lösung unseres Problems abhängt. Wie in vielen Fällen, gelingt die Trennung der Variabeln durch Einführung eines neuen Koordinatensystems und zwar hier der Polarkoordinaten; ohne dieses Hilfsmittel müfste der integrierende Faktor bestimmt werden.

Wir setzen:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

also

$$\frac{dx}{dt} = \cos\varphi\,\frac{dr}{dt} - r\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin\varphi\,\frac{dr}{dt} + r\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt},$$

wodurch aus (7) und (9)

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = c \tag{10}$$

und

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = \int f(r)\,dr \tag{11}$$

wird. Setzen wir in (11) den aus (10) folgenden Wert für dt ein, so finden wir:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}\right] = \int f(r)\,dr$$

oder

$$\frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2r^4}{c^2}\int f(r)\,dr - r^2}$$

oder

$$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2r^4}{c^2}\int f(r)\,dr - r^2}}, \tag{12}$$

die Bahngleichung in Polarkoordinaten.

Ist hiernach $\varphi = F(r)$ oder $r = \psi(\varphi)$ gefunden, so folgt aus (10):

$$t = \frac{1}{c}\int r^2\,d\varphi = \frac{1}{c}\int \psi^2(\varphi)\,d\varphi\,. \tag{13}$$

So ist auch das allgemeine Problem der Zentralbewegung durch Quadraturen lösbar; die auftretenden vier Konstanten werden durch die Angaben von x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ für einen bestimmten Zeitpunkt, etwa $t = 0$, bestimmt*).

---

*) Es möge bemerkt werden, dafs bei jeder Art der Attraktion nach einem festen Zentrum die kreisförmige Bewegung um dasselbe als Mittelpunkt mit konstanter Geschwindigkeit möglich ist. Wir haben nämlich:

$$\varphi = kt + c\,, \quad r \text{ konstant},$$
$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,,$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -rk^2\cos\varphi\,, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -rk^2\sin\varphi\,,$$

und die Gleichungen (5) werden befriedigt, wenn

$$f(r) = -rk^2$$

oder

$$k^2 = -\frac{f(r)}{r}$$

gesetzt wird. Für k erhalten wir immer einen reellen Wert, wenn $f(r)$ negativ ist, d. h. wenn eine beständige Attraktion, keine Repulsion stattfindet. — Weitere Untersuchungen über Arten der Zentralbewegung, welche geschlossene Kurven u. s. w. liefern, wurden in neuerer Zeit mehrfach angestellt. Man sehe Bertrand, Darboux, Halphén, Comptes rendus, B. 77, 84, 85; Battaglini, Atti d. Accad. Reale dei Lincei, (3) B. 2; Imchénetsky, Mém. de Bordeaux (2) B. 4; Dainelli, Battaglini (Giorn. mat.), B. 18.

8. Die Gleichungen (7) oder (10) und (9) enthalten wichtige Gesetze der Bewegung. Für die Zeitpunkte t und $t + dt$ haben wir die Radienvektoren r und $r + dr$ und die Winkel φ und $\varphi + d\varphi$; in der Zeit dt überstreicht der Radiusvektor ein unendlich schmales Dreieck mit den Seiten r und $r + dr$ und dem eingeschlossenen Winkel $d\varphi$ (der als Bogen mit dem Radius 1 gemessen wird); der Inhalt dieses Dreiecks ist unter Vernachlässigung von unendlich Kleinem höherer Ordnung:

$$\frac{r(r + dr)\sin d\varphi}{2} = \frac{r(r + dr)d\varphi}{2} = \frac{r^2 d\varphi}{2}.$$

Gleichung (10) sagt uns daher, dafs der Radiusvektor an allen Stellen der Bahn in der Zeit dt dasselbe unendlich schmale Dreieck

$$\frac{r^2 d\varphi}{2} = \frac{c\,dt}{2}$$

überstreicht. Dehnen wir dies Resultat auf endliche Zeiten aus, so haben wir für jede Zentralbewegung das Gesetz:

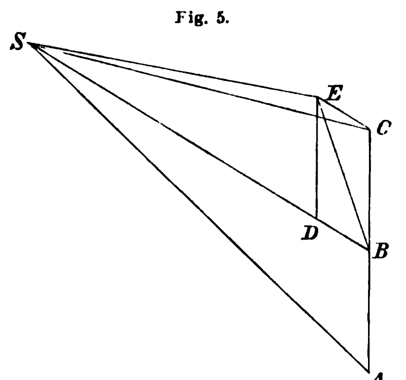
Der Radiusvektor, gezogen vom Sitze der Kraft nach dem bewegten Punkte, überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.

Man bezeichnet diesen Satz, den wir später erweitern werden, als den Flächensatz; bei der Planetenbewegung ist er unter dem Namen des zweiten (oder ersten) Kepler'schen Gesetzes wohlbekannt*). Auch aus der Gleichung (7) ist er unschwer direkt abzuleiten.

---

*) Bewegt sich ein Punkt ohne Einwirkung einer Kraft lediglich nach dem Beharrungsgesetze, so gilt der Flächensatz für die Radienvektoren, welche von ihm nach einem beliebigen Punkte gezogen werden; die elementarsten geometrischen Betrachtungen zeigen dies. — Da $\frac{d\varphi}{dt}$ die scheinbare Geschwindigkeit des Punktes, vom Zentrum aus betrachtet, ist, so kann man das Gesetz auch dahin aussprechen, dafs die scheinbare Geschwindigkeit dem Quadrate des Radiusvektor umgekehrt proportional sei. — In ganz elementar-anschaulicher Weise läfst sich der Flächensatz folgendermafsen beweisen. Bewegt sich der materielle Punkt während eines verschwindend kleinen Zeitteils von (Fig. 5) A nach B in einer als gerade anzunehmenden Linie, so würde er, wenn er nur dem Beharrungsgesetze unterworfen wäre, im nächsten, gleichen Zeitteile in derselben Geraden um das gleiche Stück weiter bis C gelangen. Würde er lediglich irgend einer Attraktion nach dem Zentrum S unterworfen sein, so würde er in der gleichen Zeit bis D in der Geraden SB gelangen. In Wirklichkeit bewegt er sich nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten zu dem Diagonalpunkte E, wo $EC \mathrel{\#} DB$ ist. Nach elementaren Sätzen ist $\triangle\, ABS = BCS = BES$, woraus der Flächensatz zunächst für unendlich kleine, damit aber auch für beliebige Zeitteile hervorgeht.

Fig. 5.



9. Die linke Seite von (9) stellt die lebendige Kraft des bewegten Punktes dar, falls man ihm die Masse 1 beilegt; die rechte Seite ist, von einer durch die Anfangsbedingungen zu bestimmenden Konstanten abgesehen, die von einer beliebig zu fixierenden Anfangszeit t_0 bis zur Zeit t geleistete Arbeit der Kraft. Es ist nämlich $f(r)\frac{dr}{ds}$ die auf die Bewegungsrichtung ds projizierte Kraft, ds der Wegteil, also

$$\int f(r)\frac{dr}{ds}\,ds = \int f(r)\,dr$$

in der That die Arbeit. Da die Arbeit, welche durch die lebendige Kraft des materiellen Punktes geleistet wird, hiervon das Negative ist, so kann man das Gesetz aussprechen:

Bei der Zentralbewegung geben die lebendige Kraft des bewegten Punktes und die von ihm geleistete Arbeit eine konstante Summe; der Wert derselben hängt von den Anfangsbedingungen ab.

Die lebendige Kraft und damit auch die Geschwindigkeit ist nach (9) lediglich eine Funktion von r; kommt der Punkt im Laufe der Bewegung wiederholt in die gleiche Entfernung vom Zentrum, so ist jedesmal seine Geschwindigkeit die gleiche.

Wir werden dieses Gesetz in verallgemeinerter Form als Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft wiederfinden.

10. Die Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichungen (5), die wir, um die Kraftkomponenten zu erhalten, mit der Masse des bewegten Punktes multiplizieren wollen, haben die wichtige Eigenschaft, daſs sie die Differentialquotienten derselben Funktion nach x und y sind. Setzt man nämlich:

$$m\int f(r)\,dr = U, \tag{14}$$

so hat man

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{dU}{dr}\frac{dr}{dx} = \frac{dU}{dr}\frac{x}{r} = mf(r)\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = mf(r)\frac{y}{r}.$$

Ist allgemein die Kraft, welche auf einen materiellen Punkt einwirkt, so beschaffen, daſs ihre Komponenten nach den Achsen der x, y, z durch die Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ einer Funktion U nach denselben Koordinaten ausgedrückt werden können, so nennt man U die Kräftefunktion oder das Potential der bewegenden Kraft auf den bewegten Punkt. Den letztgenannten Ausdruck reserviert man auch vielfach speziell für den Fall des später zu besprechenden Newton'schen Attraktionsgesetzes.

Bei jeder Zentralbewegung existiert also eine Kräftefunktion. Dieselbe ist, von einer Konstanten abgesehen, welche bei der Differentiation doch wegfällt, der *Arbeit* gleich,

welche von der Zentralkraft von einem beliebigen Zeitpunkte ab bis zu dem Augenblicke der Wirkung geleistet worden ist. Man ersieht das letztere aus der Vergleichung des Wertes der Arbeit in (3) mit (14).

11. Sind x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ zwei unendlich benachbarte Punkte mit dem Abstande dn, gerechnet vom ersten zum zweiten Punkte als positiv, so finden wir die Komponente der durch die Kräftefunktion U bestimmten Kraft, welche in die Richtung dn fällt, indem wir die Komponenten nach den Koordinatenachsen auf dn projizieren und dann summieren. Dies geht aus dem Satze vom Parallelepipedon der Kräfte unmittelbar hervor. Die fragliche Komponente ist daher, weil die Richtungskosinus von dn nach den Koordinatenachsen $\frac{dx}{dn}, \frac{dy}{dn}, \frac{dz}{dn}$ sind,

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{dU}{dn}. \tag{15}$$

Man hat sich den Differentialquotienten nach dn so gebildet zu denken, dafs man in U einmal statt x, y, z die Gröfsen

$$x + dx, \; y + dy, \; z + dz$$

einsetzt, dann das U für x, y, z abzieht und durch dn dividiert.

Man erhält also die Kraftkomponente nach irgend einer Richtung, wenn man die Kräftefunktion nach dieser Richtung differentiiert. Die Kräftefunktion ist daher eine von der speziellen Wahl des Koordinatensystems ganz unabhängige Gröfse.

§ 7.

Gegenseitige Anziehung oder Abstofsung zweier materiellen Punkte.

1. Üben zwei materielle Punkte x, y, z und x_1, y_1, z_1 von den Massen m und m_1 eine in der Richtung der Verbindungslinie r wirkende Kraft, also eine Anziehung oder Abstofsung, aufeinander aus, deren Intensität nur von der Entfernung

$$r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}$$

und dem Produkte mm_1 der beiden Massen abhängt, so werden die Beschleunigungen, welche die Körper erhalten, entgegengesetzt sein und sich umgekehrt wie ihre Massen verhalten, wie dies das Prinzip von Wirkung und Gegenwirkung verlangt*). Wir haben hiernach die Bewegungsgleichungen

*) Die Beschleunigungen jedes materiellen Punktes hängen nur von der Masse des andern ab, da $\pm\, mm_1 f(r)$ die Kraftwirkung auf jeden der Körper ist, diese aber durch die Masse desselben dividiert werden mufs, um die Beschleunigung zu liefern.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 x}{dt^2} = m_1 f(r) \dfrac{x - x_1}{r}, \\ \dfrac{d^2 y}{dt^2} = m_1 f(r) \dfrac{y - y_1}{r}, \\ \dfrac{d^2 z}{dt^2} = m_1 f(r) \dfrac{z - z_1}{r}, \\ \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = m f(r) \dfrac{x_1 - x}{r}, \\ \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = m f(r) \dfrac{y_1 - y}{r}, \\ \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = m f(r) \dfrac{z_1 - z}{r}. \end{cases}$$

2. Hier lassen sich die Kraftkomponenten für beide Punkte (also die mit der Masse des betreffenden Punktes multiplizierten Beschleunigungskomponenten) als Differentialquotienten einer Funktion

$$U = m m_1 \int f(r)\, dr$$

darstellen. Wir gelangen hierdurch zu der folgenden Erweiterung des Begriffes der Kräftefunktion:

Eine Funktion U heifst die Kräftefunktion eines Systems materieller Punkte 1, 2, ... n für gewisse Kräfte, wenn die auf die einzelnen Punkte wirkenden Kraftkomponenten durch

$$(2)\quad \begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial x_i}, \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial y_i}, \\ m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z_i} \end{cases}$$

dargestellt werden.

Dafs diese Kräftefunktion von der Wahl des Koordinatensystems unabhängig ist, wird wie in § 6, 11 bewiesen. Die mechanische Bedeutung derselben erörtern wir später.

3. Wir bezeichnen den durch die Koordinaten

$$(3)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{m x + m_1 x_1}{m + m_1}, \\ \eta = \dfrac{m y + m_1 y_1}{m + m_1}, \\ \zeta = \dfrac{m z + m_1 z_1}{m + m_1} \end{cases}$$

bestimmten Punkt als den jeweiligen Schwerpunkt der beiden materiellen Punkte. Derselbe liegt mit den beiden Punkten auf derselben Geraden

und zwar zwischen denselben derart, dafs seine Abstände von x, y, z und x_1, y_1, z_1 sich umgekehrt wie m und m_1 verhalten*).

Hiernach ist

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{m \frac{d^2 x}{dt^2} + m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2}}{m + m_1} \quad \text{u. s. w.}$$

oder, wenn man für $\frac{d^2 x}{dt^2}$ u. s. w. die Werte aus den Gleichungen (1) einführt,

$$(4) \qquad \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = 0 .$$

Integriert man diese Gleichungen, so erhält man

$$(5) \qquad \begin{cases} \xi = c_1 t + C_1 , \\ \eta = c_2 t + C_2 , \\ \zeta = c_3 t + C_3 , \end{cases}$$

aus denen durch Elimination von t folgt

$$(6) \qquad \frac{\xi - C_1}{c_1} = \frac{\eta - C_2}{c_2} = \frac{\zeta - C_3}{c_3} .$$

Der Schwerpunkt zweier Punkte, welche sich gegenseitig anziehen oder abstofsen, bewegt sich also mit gleichförmiger Geschwindigkeit in einer Geraden oder ist in Ruhe.

Der Schwerpunkt befindet sich also im Gleichgewicht.

Es ist dies ein Spezialfall eines viel allgemeineren Gesetzes.

4. Wir wollen jetzt den Schwerpunkt als in Ruhe befindlich ansehen und zum Nullpunkte des Koordinatensystems machen. Befindet sich der Schwerpunkt in Bewegung, so braucht man nur zu den unter der Annahme der Ruhe erhaltenen relativen Bewegungskomponenten der beiden Körper die betreffenden Bewegungskomponenten des Schwerpunktes zu addieren, um die absolute Bewegung zu erhalten. Da die beiden materiellen Punkte immer mit dem ruhenden Schwerpunkte in derselben Geraden liegen und ihre Abstände ϱ und ϱ_1 von ihm immer in demselben Verhältnisse $m_1 : m$ stehen, so sind die von beiden beschriebenen Kurven sowie ihre Bewegungen in denselben ähnlich; homologe Längen und Geschwindigkeiten stehen bei beiden Bewegungen im Verhältnisse $m_1 : m$. Da

$$\varrho : \varrho_1 = m_1 : m \quad \text{und} \quad \varrho + \varrho_1 = r$$

ist, so hat man

---

*) Sucht man nämlich die Koordinaten ξ, η, ζ eines Punktes zu bestimmen, welcher den zuletzt angegebenen Bedingungen genügt, so mufs

$$(\xi - x) : (x_1 - \xi) = m_1 : m \quad \text{u. s. w.}$$

sein, woraus durch Umformung die Gleichungen (3) hervorgehen.

$$r = \frac{\varrho(m + m_1)}{m_1} = \frac{\varrho_1(m + m_1)}{m}. \tag{7}$$

und durch Eintragen des ersten und zweiten Wertes in die drei ersten, resp. drei letzten Gleichungen (1), wobei noch zu benutzen ist, daſs nach (3) bei der jetzigen Lage des Schwerpunktes ($\xi = \eta = \zeta = 0$)

$$x_1 = -\frac{mx}{m_1}, \quad x = -\frac{m_1 x_1}{m} \tag{8}$$

ist,

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{d^2x}{dt^2} = m_1 f\left(\dfrac{m + m_1}{m_1}\varrho\right)\dfrac{x}{\varrho} & \text{u. s. w.,} \\ \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = m f\left(\dfrac{m + m_1}{m}\varrho_1\right)\dfrac{x_1}{\varrho_1} & \text{u. s. w.} \end{array}\right. \tag{9}$$

Man kann also an Stelle der untersuchten Bewegungen Zentralbewegungen setzen, deren Zentrum der Schwerpunkt des Systems ist und die durch die Gleichungen (9) definiert sind.

So ist also die gegenseitige Anziehung und Abstoſsung zweier materiellen Punkte auf die Anziehung oder Abstoſsung nach einem festen Zentrum zurückgeführt, weshalb wir nur noch die letztere Bewegung zu untersuchen haben.

Ist die Masse m_1 sehr groſs gegen m, so ist die Bewegung des Punktes x_1, y_1, z_1 sehr unbedeutend gegen diejenige des Punktes x, y, z; man darf daher in diesem Falle die Formeln von § 6 mit groſser Annäherung direkt zur Anwendung bringen, indem man x_1, y_1, z_1 als festes Zentrum betrachtet.

5. Man kann noch in anderer Art die relative Bewegung der beiden Punkte als einfache Zentralbewegung darstellen, indem man den einen Punkt x_1, y_1, z_1 als fest annimmt und die relative Bewegung von x, y, z aufsucht. Dieses Verfahren wird in der Astronomie bei der Planetenbewegung angewandt; man betrachtet den Mittelpunkt der Sonne als festes Zentrum und bestimmt die relative Bewegung des Planeten zu ihr; ist doch nicht die geringe Verschiebung, welche die Sonne unter den Fixsternen durch die Attraktion der Planeten erleidet, sondern nur die relative Stellung der Planeten gegenüber der Sonne von Wichtigkeit.

Man braucht zu diesem Zwecke nur die Differenzen der Verschiebungen von x, y, z und x_1, y_1, z_1 ins Auge zu fassen. Man hat nach (1)

$$\frac{d^2(x - x_1)}{dt^2} = (m_1 + m) f(r) \frac{x - x_1}{r} \quad \text{u. s. w.}$$

oder, wenn man jetzt x_1, y_1, z_1 als Nullpunkt annimmt,

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2x}{dt^2} = (m + m_1) f(r)\dfrac{x}{r}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = (m + m_1) f(r)\dfrac{y}{r}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = (m + m_1) f(r)\dfrac{z}{r}. \end{array}\right. \tag{10}$$

Man kann also die relative Bewegung des Punktes x, y, z gegen x_1, y_1, z_1 als Zentralbewegung um den letzteren auffassen, wenn man nur diesem die Summe der beiden Massen als Masse zulegt.

Die relative Bewegung ist wiederum den beiden absoluten Bewegungen bei festliegendem Schwerpunkte ähnlich. — Bei beiden Auffassungen bleibt namentlich auch der Flächensatz ungeändert.

§ 8.

Die harmonische Bewegung ohne und mit Widerstand.

1. Die Integration der Zentralbewegungsgleichungen ist am einfachsten auszuführen, wenn eine Attraktion stattfindet, welche der Entfernung vom Zentrum proportional ist; die daraus resultierende Bewegung heifst die harmonische. Anscheinend ist diese Annahme eine unnatürliche, der Wirklichkeit wenig entsprechende; und in der That trifft sie bei einfachen Kräften nicht zu. Dagegen giebt es eine Anzahl komplizierterer Kraftwirkungen, welche sich mit grofser Näherung dem gegebenen Gesetze fügen. Wird z. B. ein Punkt eines elastischen Körpers in geeigneter Weise aus seiner Gleichgewichtslage verschoben, so strebt er diesem Gesetze gemäfs in seine ursprüngliche Lage zurückzukehren. Ein nur kleine Schwingungen ausführendes Fadenpendel bewegt sich, wie wir später sehen werden, nahezu so, wie wenn sein materieller Punkt nach diesem Gesetze in die Ruhelage zurückgezogen würde. Bei schwingenden Saiten, bei oszillierenden Magnetnadeln, bei den Schwingungen von Körpern, welche bifilar oder an einem Drahte aufgehängt sind, welcher durch seine Torsion die Bewegung veranlafst, tritt die harmonische Bewegung auf. Dieselbe ist geradezu eine der wichtigsten in der gesamten Mechanik.

2. Die Bewegungsgleichungen sind hier, wo $f(r) = -k^2 r$ gesetzt werden kann,

$$(1) \qquad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 y. \end{cases}$$

Da die Variabeln x und y in diesen Gleichungen getrennt erscheinen, dürfen wir beide getrennt behandeln.

Dies kann nach § 6, 3 geschehen, doch gestaltet sich die Rechnung eleganter durch eine andere Methode, die auch bei komplizierteren Gleichungen, wie sie weiter unten vorkommen, anwendbar ist.

3. Sei die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung*) mit reellen Koeffizienten

*) Die allgemeinste Form einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung ist

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \tag{2}$$

vorgelegt. Man übersieht leicht, dafs $y = e^{\lambda x}$ bei geeigneter Bestimmung von λ der Gleichung (2) Genüge leisten wird. In der That erhalten wir durch Einsetzen dieses y und Weglassen des gemeinsamen Faktors $e^{\lambda x}$ die Gleichung

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0, \tag{3}$$

welche durch die beiden Werte

$$\begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \\ \lambda_2 = \dfrac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2} \end{cases} \tag{4}$$

befriedigt wird.

Aber nicht nur $e^{\lambda_1 x}$ und $e^{\lambda_2 x}$, sondern auch jeder Ausdruck

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} \tag{5}$$

genügt der Gleichung (2), und da (5) zwei willkürliche Konstanten enthält, so ist es das vollständige Integral von (2); nur im Falle $\lambda_1 = \lambda_2$ oder $a^2 - 4b = 0$ ziehen sich die beiden Konstanten in einzige zusammen, so dafs wir nach einem allgemeineren Integrale zu suchen haben. Durch einen Grenzübergang kann man das Resultat für diesen Fall aus dem allgemeinen herleiten; es ist

$$y = e^{\lambda_1 x}(c + c_1 x). \tag{6}$$

Wir begnügen uns damit, die Richtigkeit desselben durch Einsetzen in (2) nachzuweisen; es wird

$$e^{\lambda_1 x}(c\lambda_1^2 + 2c_1\lambda_1 + c_1\lambda_1^2 x) + ae^{\lambda_1 x}(c\lambda_1 + c_1 + c_1\lambda_1 x) \\ + be^{\lambda_1 x}(c + c_1 x) = 0$$

oder

$$c(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) + c_1(2\lambda_1 + a) + c_1 x(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b) = 0,$$

eine Gleichung, die thatsächlich befriedigt ist, da hier

$$\lambda_1 = -\frac{a}{2}, \quad a^2 = 4b$$

zu setzen ist.

4. Während der Ausdruck (6) für reelle c und c_1 reell ist, bedarf

---

$$\frac{d^n y}{dx^n} + f_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + f_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + f_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + f_n(x)\,y = f(x);$$

alle linearen Differentialgleichungen von der Form

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

lassen sich nach Analogie der obigen behandeln.

(5) noch der weiteren Diskussion. Ist $a^2 - 4b > 0$, sind also λ_1 und λ_2 reell, so erhalten wir aus (5) durch Einsetzen der Werte λ_1 und λ_2 den für reelle c_1 und c_2 reellen Ausdruck

$$y = e^{-\frac{ax}{2}}\left(c_1 e^{\frac{x}{2}\sqrt{a^2-4b}} + c_2 e^{-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-4b}}\right). \tag{7}$$

Haben wir dagegen $a^2 - 4b < 0$, so ist

$$y = e^{-\frac{ax}{2}}\left(c_1 e^{\frac{ix}{2}\sqrt{4b-a^2}} + c_2 e^{-\frac{ix}{2}\sqrt{4b-a^2}}\right)$$

oder

$$y = e^{-\frac{ax}{2}}\left[\frac{c_1+c_2}{2}\left(e^{\frac{ix}{2}\sqrt{4b-a^2}} + e^{-\frac{ix}{2}\sqrt{4b-a^2}}\right) + \frac{c_1-c_2}{2}\left(e^{\frac{ix}{2}\sqrt{4b-a^2}} - e^{-\frac{ix}{2}\sqrt{4b-a^2}}\right)\right]$$

oder bei Einführung neuer Konstanten

$$y = e^{-\frac{ax}{2}}\left[C_1 \cos\frac{x\sqrt{4b-a^2}}{2} + C_2 \sin\frac{x\sqrt{4b-a^2}}{2}\right],$$

ein Ausdruck, der für reelle C_1 und C_2 reell ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir weiter

$$C_1 = C\sin\alpha,\quad C_2 = C\cos\alpha$$

setzen, worin C und α neue willkürliche Konstanten sind; man braucht zu diesem Zwecke nur $C^2 = C_1^2 + C_2^2$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_1}{C_2}$ zu nehmen. Dann erlangt der Ausdruck die einfache Gestalt

$$y = Ce^{-\frac{ax}{2}}\sin\left(\frac{x\sqrt{4b-a^2}}{2} + \alpha\right). \tag{8}$$

5. Als Lösungen von (1) erhalten wir durch geeignete Spezialisierung, da hier $a^2 - 4b = -4k^2 < 0$ ist,

$$\begin{cases} x = A\sin(kt+\alpha), \\ y = B\sin(kt+\beta), \end{cases} \tag{9}$$

worin A, B, α, β Konstanten sind, die von der Anfangslage und der Anfangsgeschwindigkeit nebst deren Richtung abhängen. A und B können ohne Beschränkung der Allgemeinheit als positiv angenommen werden.

6. Geht die Bewegung lediglich in der x-Achse vor sich, ist also $B = 0$, so besteht sie in einem periodischen Oszillieren um den Null-

punkt. Die Dauer einer ganzen Oszillation, d. h. eines Hin- und Hergangs zusammen, ist

$$(10) \qquad T = \frac{2\pi}{k};$$

Hin- und Hergang erfolgen in durchaus symmetrischer Weise. Die gröfsten Entfernungen vom Zentrum betragen $+A$ und $-A$; man bezeichnet A als die Amplitude der Oszillation. Die Schwingungsdauer ist von der Amplitude unabhängig. Die Geschwindigkeit in jedem Momente ist durch Differentiation von (9) zu finden. Beim Durchgang durch das Zentrum erreicht die Geschwindigkeit ihr Maximum.

7. Die allgemeine Bewegung nach den Gleichungen (9) können wir — es ist dies durch eine einfache Konstruktion ausführbar — uns aus zwei Oszillationen der beschriebenen Art mit verschiedener Amplitude und verschiedener Durchgangszeit durch das Zentrum zusammengesetzt denken; die eine geht in der x-Achse, die andere in der y-Achse vor sich. Eliminieren wir t aus den Gleichungen (9), indem wir zuerst die Sinus entwickeln, dann $\sin kt$ und $\cos kt$ berechnen und hierauf quadrieren und addieren, so erhalten wir die Bahngleichung

$$(Bx \sin\beta - Ay \sin\alpha)^2 + (Bx \cos\beta - Ay \cos\alpha)^2 = A^2B^2 \sin^2(\alpha - \beta)$$

oder

$$(11) \qquad B^2x^2 - 2AB\cos(\alpha - \beta)xy + A^2y^2 = A^2B^2\sin^2(\alpha - \beta).$$

Dies ist die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, da

$$B^2A^2 + A^2B^2\cos^2(\alpha - \beta) > 0$$

ist. Die Bahn ist eine Ellipse, deren Mittelpunkt das Zentrum der Attraktion ist.

Die Umlaufszeit ist der Dauer der beiden einzelnen Oszillationen $T = \frac{2\pi}{k}$ gleich; sie ist unabhängig von der Gestalt und Gröfse der Bahn*).

Sollen die x- und y-Achse die Hauptachsen der Ellipse werden, so mufs

$$(12) \qquad \cos(\alpha - \beta) = 0, \quad \text{also} \quad \alpha = \beta + \frac{\pi}{2} + n\pi$$

sein, worin n eine ganze Zahl bedeutet. Die Oszillationen in der x- und y-Achse müssen um eine Vierteloszillation in der Schwingungsphase**) differieren.

Soll die Bahn ein Kreis werden, so mufs aufserdem noch $A = B$ sein.

*) Die Anziehung proportional der Entfernung ist das einzige Attraktionsgesetz, bei dem der bewegliche Punkt eine immer geschlossene Kurve in immer derselben Zeit beschreibt, wie auch die Anfangsbedingungen sein mögen. Dies wurde von Lespiault, Darboux (Bull. d. sc. math.), B. 4 und Chevilliet, Nouv. Ann. de Math., (2), B. 13 bewiesen.

**) D. h. die Zeiten, zu welchen der materielle Punkt infolge einer der Oszillationen durch das Zentrum gehen würde, müssen um jene Gröfse auseinander liegen.

8. Wir wollen die harmonische Bewegung auf einer Geraden noch für den Fall untersuchen, dafs die Bewegung einen von der Geschwindigkeit abhängigen Widerstand findet. Das Problem läfst sich leicht durchführen, wenn der Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist. Dies tritt wirklich mit ziemlicher Genauigkeit in mehreren Fällen ein, z. B. wenn die Bewegung durch Elastizität veranlafst wird und sich sog. innere Reibung geltend macht, oder wenn die Schwingungen einer Magnetnadel durch einen umgebenden Metallring gedämpft werden*).

Wir haben für alle Phasen der Bewegung

$$(13)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x - 2l\frac{dx}{dt} \quad \text{oder} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2l\frac{dx}{dt} + k^2x = 0,$$

worin l eine durch die Beobachtung im einzelnen Falle zu bestimmende Konstante ist.

Die Formeln von 3. und 4. geben uns das Integral

a) für $l^2 > k^2$:

$$(14)\qquad x = e^{-lt}\left(c_1 e^{t\sqrt{l^2-k^2}} + c_2 e^{-t\sqrt{l^2-k^2}}\right);$$

b) für $l^2 = k^2$:

$$(15)\qquad x = e^{-lt}(c + c_1 t);$$

c) für $l^2 < k^2$:

$$(16)\qquad x = Ce^{-lt}\sin\left(t\sqrt{k^2-l^2} + \alpha\right).$$

Der auftretenden Wurzelgröfse wollen wir immer das positive Zeichen geben.

9. Bilden wir im Falle a) den Differentialquotienten $\frac{dx}{dt}$ und setzen ihn gleich Null, so erhalten wir als Bedingung eines Maximums oder Minimums von x

$$(17)\qquad e^{2t\sqrt{l^2-k^2}} = \frac{c_2}{c_1}\cdot\frac{\sqrt{l^2-k^2}+l}{\sqrt{l^2-k^2}-l},$$

der ein reeller Wert von t genügt, wenn c_1 und c_2 verschiedene Zeichen haben. Andrerseits mufs x für unendlich wachsende t sich der Null nähern, da dies beide Glieder der rechten Seite von (14) thun (man bemerke, dafs $l > \sqrt{l^2-k^2}$ ist). Daher entfernt sich der materielle Punkt entweder zuerst vom Zentrum, um dann umzukehren und sich dem Zentrum asymptotisch zu nähern; oder er bewegt sich nach dem Zentrum hin und durch dasselbe hindurch, um dann umzukehren und sich dem Zentrum in gleicher Weise zu nähern; oder er bewegt sich ohne Umkehr asymptotisch gegen das Zentrum.

Im Falle b) wird die Bedingung für ein Maximum oder Minimum

$$(18)\qquad t = \frac{c_1 - lc}{lc_1};$$

die Bewegung verläuft in derselben Weise wie im ersten Falle.

---

*) Siehe z. B. Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, 4. Aufl., B. 4, pag. 1083.

Im Falle c) ist der Verlauf mit der Bewegung ohne Reibung zu vergleichen, wie sie durch die erste der Gleichungen (9) gegeben ist. Auch hier finden Oszillationen um das Zentrum statt, deren Schwingungsdauer

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - l^2}}, \tag{19}$$

also grösser als ohne Reibung ist. Die konstante Amplitude A in (9) wird aber durch die stets abnehmende Grösse Ce^{-lt} ersetzt. Wir haben also in diesem Falle Oszillationen mit gleichbleibender Schwingungsdauer, aber immerfort asymptotisch gegen die Null abnehmender Amplitude. Der Logarithmus der Amplitude nimmt proportional der Zeit ab. Gauss bezeichnete diese Abnahme als das logarithmische Dekrement.

§ 9.

Das Newton'sche Gravitationsgesetz und die Planetenbewegung.

1. Das von Newton entdeckte Gesetz der allgemeinen Gravitation lautet:

Je zwei materielle Teile (Punkte) ziehen sich gegenseitig mit einer Kraft an, welche dem Produkte ihrer Massen direkt und dem Quadrate ihrer Entfernung umgekehrt proportional ist.

Dieses Gesetz, welches durch den Vergleich astronomischer Rechnungen und Beobachtungen immer aufs genaueste bestätigt worden ist*), welches auch bei irdischen Körpern nachgewiesen ist und gegen welches niemals eine widerstreitende Thatsache vorgebracht werden konnte, scheint allgemein giltig und einfach, d. h. auf keine anderen, einfacheren Naturgesetze zurückführbar zu sein. Ob es das einzige Gesetz ist, welches alle Bewegungen in der Welt leitet, ist in keiner Weise nachgewiesen; es stehen dem noch schwerwiegende Bedenken entgegen, deren Beseitigung jedoch nicht ausgeschlossen ist.

Gegen die Einfachheit des Gravitationsgesetzes sind vielfach Bedenken erhoben worden; es erscheint Vielen undenkbar, dass eine Kraft durch den leeren Raum hindurch wirke. Demnach wäre eine Fortpflanzung der Schwerkraft nur durch ein vermittelndes Medium, ähnlich wie bei dem Lichte denkbar; es würde eine stetige Fortwirkung von einem Teilchen zum benachbarten, keine Fernwirkung statthaben. Freilich liegt eine Wirkung dieser Art der Anschauung näher, da wir solche Vorgänge fortwährend beobachten; aber eine Erklärung der kontinuierlichen Fortwirkung ist in keiner Weise leichter als die der Fernwirkung. Leitet doch gerade der Versuch, die Vorgänge in zusammenhängenden Körpern zu erklären, auf

*) Bei wenigen Rechnungen, welche nicht völlig mit der Beobachtung stimmen, ist das Vorhandensein nicht in Rechnung gezogener Einflüsse so gut wie sicher.

die allerdings rein hypothetische Annahme von diskreten Atomen. Auch wäre es sehr unwahrscheinlich, dafs bei einer Fortpflanzung der Schwerkraft durch ein vermittelndes Medium die verschiedenartige Natur des letzteren auf die Wirkung ohne Einflufs bleiben sollte; ein solcher Einflufs ist aber nirgends wahrgenommen worden. Die Hypothese von Atomen, welche eine endliche Ausdehnung besitzen und gegen einander stofsen, führt auf fundamentale Schwierigkeiten, die erst später erörtert werden können. Nehmen wir hinzu, dafs die gesamte Form der räumlichen Anschauung doch nur in der Beschaffenheit unseres Geistes wurzelt und dafs wir in keiner Weise etwas über die Beziehungen der Dinge an sich aussagen können, so gelangen wir zu dem Schlusse, dafs die Einwendungen gegen die Einfachheit des Gravitationsgesetzes nicht stichhaltig sind; wir betrachten dasselbe als einfach und allgemein giltig*).

Noch könnte ein Zweifel entstehen, ob das Gesetz nicht vielleicht für sehr kleine Distanzen modifiziert werden mufs, um die Molekularwirkungen zutreffend zu erklären; aber auch hierfür sind keine zwingenden Gründe vorhanden. Andrerseits ist die Abnahme der Attraktion mit dem Quadrate der Entfernung das einzige Gesetz, welches sich naturgemäfs erklärt. Denken wir uns nämlich den anziehenden Punkt mit konzentrischen Kugelflächen umgeben, so verhalten sich die Flächeninhalte zweier derselben wie die Quadrate der Radien; nehmen wir nun an, dafs die Punkte auf je einer Kugelfläche zusammen die gleiche Kraftwirkung erfahren, so verhalten sich die auf je zwei gleiche Teilchen entfallenden umgekehrt wie die Quadrate der Abstände vom Zentrum. Selbstverständlich kommt dieser Betrachtung keine Beweiskraft zu; sie dient nur dazu, das Gesetz a priori einleuchtend zu machen.

2. Wir werden später nachweisen, dafs Kugeln, welche aus homogenen konzentrischen Schichten zusammengesetzt sind, in Bezug auf die Gravitationswirkung ersetzt werden können durch ihre Mittelpunkte, in die man sich ihre Gesamtmasse verlegt denkt. Da nun die Sonne, soweit die Beobachtungen reichen, wirklich eine Kugel dieser Art ist, die Planeten aber dieser Gestalt so nahe kommen, dafs man die Abweichung wenigstens bei der Wirkung auf gröfsere Distanzen vernachlässigen kann, die Kometen endlich ihrer äufserst geringen Masse wegen gar nicht in Betracht zu ziehen sind**), so kann man mit sehr weitgehender Genauigkeit annehmen, dafs das Planetensystem aus einer Anzahl mate-

---

*) Über die mannigfachen Versuche, die *actio in distans* bei der Gravitation zu beseitigen, siehe: Isenkrahe, das Rätsel von der Schwerkraft (Braunschweig, 1879). — Tissérand untersuchte (Comptes rendus, B. 75) die Attraktion nach dem Weber'schen elektrodynamischen Gesetz:

$$f = \frac{cmm_1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{h^2}\,r\,\frac{d^2r}{dt^2}\right).$$

**) Auch die Wirkung der Fixsterne kann wegen deren aufserordentlicher Entfernung vernachlässigt werden.

rieller Punkte besteht, die sich nach dem Gesetze der Gravitation anziehen. Nur bei der Bahnberechnung der Trabanten der Planeten mufs die Abweichung der letzteren von der Kugelgestalt korrekturweise in Rechnung gezogen werden. Aber auch in dieser vereinfachten Gestalt würde das Problem der Planetenbewegung das zur Zeit durch die Analysis zu Leistende übersteigen, wenn nicht weitere vereinfachende Annahmen gemacht werden dürften. Die Masse der Sonne überwiegt die Massen sämtlicher Planeten derart, dafs man bei der Berechnung der Bahn eines Planeten nur die Wirkung der Sonne auf ihn zu beachten braucht; die Einwirkung der übrigen Planeten kann dann nachträglich als ziemlich geringfügige Korrektur mit genügender Annäherung berücksichtigt werden. Man bezeichnet alle Einwirkungen, welche das Resultat des einfacheren Problems variieren, als Störungen oder Perturbationen.

3. Um die Bahn eines Planeten unter der Hypothese, dafs die Sonne allein auf ihn einwirkt, zu berechnen, betrachten wir § 7, 5 entsprechend den Sonnenmittelpunkt als festliegend; die Ortsänderungen, welche die Sonne durch die Attraktion der übrigen Planeten erleidet, werden bei den Störungen in Rechnung gebracht. Dem allgemeinen Gebrauche der Astronomen zufolge nehmen wir die Masse der Sonne*) als Masseneinheit; die Masse des Planeten sei m.

Bezeichnet noch f eine positive Konstante**), welche für sämtliche Planeten die gleiche ist, so haben wir nach § 7, (10) die Bewegungsgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -f(1+m)\dfrac{x}{r^3} = -\mu\dfrac{x}{r^3}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -f(1+m)\dfrac{y}{r^3} = -\mu\dfrac{y}{r^3}; \end{cases}$$

geht die Bewegung in einer Geraden vor sich, auf welcher der Sonnenmittelpunkt liegt, so gilt die einfachere Gleichung

$$(2)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \mp\frac{f(1+m)}{x^2} = \mp\frac{\mu}{x^2},$$

wo das Minus- oder Pluszeichen zu benutzen ist, je nachdem der bewegte Punkt sich auf der positiven oder negativen Hälfte der x-Achse befindet.

4. Wir behandeln zuerst den letzten, einfacheren Fall nach § 6, 3. Bei der dort gewählten Bezeichnung erhalten wir

$$(3)\qquad \frac{v^2}{2} = F(x) = \pm\frac{\mu}{x} - c,$$

---

*) Oder überhaupt die Masse des angenommenen Zentralkörpers. In den Mittelpunkt desselben verlegen wir, § 7, 5 entsprechend, den Nullpunkt.

**) Die Konstante f besitzt, wie aus Vergleichung der rechten und linken Seiten der folgenden Gleichungen hervorgeht, die Dimension $l^3 t^{-2} m^{-1}$. Benutzt man Millimeter, Milligramm und Sekunde als Einheiten, so ist

$$f = 0{,}0000000657.$$

also, wenn c positiv ist,

$$t = \int \frac{dx}{\sqrt{-2c \pm \frac{2\mu}{x}}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{-2cx^2 \pm 2\mu x}}$$

$$= -\frac{1}{2c}\int \frac{(-2cx \pm \mu)\,dx}{\sqrt{-2cx^2 \pm 2\mu x}} \pm \frac{\mu}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{-2cx^2 \pm 2\mu x}}$$

oder

$$(4) \qquad t = -\frac{1}{2c}\sqrt{-2cx^2 \pm 2\mu x} - \frac{\mu}{(2c)^{\frac{3}{2}}} \arcsin \frac{\mu \mp 2cx}{\mu} + C.$$

Ist c negativ, so tritt an Stelle von Formel (4) die folgende:

$$(5) \qquad t = -\frac{1}{2c}\sqrt{-2cx^2 \pm 2\mu x}$$

$$\mp \frac{\mu}{(-2c)^{\frac{3}{2}}} \log\left[\pm \mu - 2cx + 2\sqrt{c^2x^2 \mp c\mu x}\right] + C.$$

Für $c = 0$ ergiebt sich

$$(6) \qquad t = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\mu}}(\pm x)^{\frac{3}{2}} + C.$$

In welcher Weise die Doppelzeichen zu verwenden sind, wurde oben angegeben. Aufserdem liefern Gleichung (5) und (6) infolge der Zweideutigkeit der Wurzelgröfsen für jedes t zwei Werte, (4) aber doppelt unendlich viele. Im letzteren Falle entspricht, wie aus den vorhergehenden unausgeführten Integralen ersichtlich ist, dem Wechsel des Vorzeichens der Wurzel die Ersetzung von arcsin durch arccos.

Im Falle (4) besteht die Bewegung in einem periodischen Oszillieren des materiellen Punktes um das Zentrum. Die Geschwindigkeit verschwindet nach (3), wenn

$$x = \pm \frac{\mu}{c}$$

wird; der Punkt entfernt sich also beiderseits bis zu diesem Betrage vom Zentrum. Die Dauer einer ganzen Oszillation ist

$$T = \frac{\mu\pi}{c'\sqrt{2}}.$$

In den Fällen (5) und (6) kommt der materielle Punkt aus dem Unendlichen*), um nach Passieren des Zentrums auf der entgegengesetzten Seite wieder ins Unendliche zu gehen. Bei (5) nähert sich die Geschwindigkeit im Unendlichen einem festen, endlichen Werte, bei (6) aber der Null.

Beim Passieren des Zentrums wird die Geschwindigkeit in jedem Falle unendlich.

---

*) Natürlich nur, wenn man sich die Bewegung über ihren wirklichen Anfang hinaus rückwärts fortgesetzt denkt.

5. Behandelt man die allgemeinen Gleichungen (1) nach den Vorschriften von § 6, so erhält man zunächst

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = r^2\frac{d\varphi}{dt} = c, \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{\mu}{r} + C. \tag{8}$$

Weiter findet man für Polarkoordinaten

$$\varphi = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2r^4}{c^2}\left(\frac{\mu}{r} + C\right) - r^2}} = c\int \frac{dr}{\sqrt{2Cr^2 + 2\mu r - c^2}} \tag{9}$$

und durch Integration

$$\varphi = -\arccos\frac{\mu r - c^2}{r\sqrt{\mu^2 + 2c^2C}} + \varphi_0 \tag{10}$$

oder, wenn wir das Koordinatensystem so wählen, dafs $\varphi_0 = \pi$ wird,

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{1 + \frac{2c^2C}{\mu^2}}\cdot\cos\varphi}. \tag{11}$$

6. Die Gleichung eines beliebigen Kegelschnittes in Polarkoordinaten mit dem einen Brennpunkte als Nullpunkt lautet, wenn φ von dem kleineren, resp. endlichen Abschnitte der grofsen Achse aus gerechnet wird,

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}, \tag{12}$$

worin p den Halbparameter, ε die numerische Exzentrizität bezeichnet. Bei der Ellipse und Hyperbel, deren Mittelpunktsgleichungen resp.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sind, ist $p = \frac{b^2}{a}$; bei der Parabel mit der Scheitelgleichung $y = 2px$ ist p die hierin vorkommende Gröfse. Bei der Ellipse und Hyperbel ist

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \quad \text{resp.} \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a},$$

dagegen bei der Parabel $\varepsilon = 1$ zu nehmen.

Wir können daher sagen, dafs (12) eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel darstellt, je nachdem $\varepsilon < 1$, $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon > 1$ ist. Für den Kreis ist im Speziellen $\varepsilon = 0$ *).

*) Will man sich die Formel (12) entwickeln, so geht man am bequemsten von den bekannten Definitionen der Kegelschnitte als geometrische Örter aus. — Bei der Ellipse ist $a > b$ vorausgesetzt.

7. Die Gleichung (11) stellt hiernach einen Kegelschnitt dar, in dessen einem Brennpunkte die Sonne steht, und zwar entspricht $\varphi = 0$ das Perihel (der der Sonne nächste Punkt der Bahn). Dieser Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem $C < 0$, $C = 0$ oder $C > 0$ ist; $C < -\frac{\mu^2}{2c^2}$ ist überhaupt ausgeschlossen; für $C = -\frac{\mu^2}{2c^2}$ wird die Kurve speziell ein Kreis.

Stellt man dies Resultat mit (8) zusammen, so gelangt man zu dem merkwürdigen Ergebnis, daſs man die Art des Kegelschnitts, in welchem sich der Planet bewegt, nach der Geschwindigkeit beurteilen kann, welche er in einer bestimmten Entfernung von der Sonne besitzt; die Bahn ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} < 0, \quad = 0 \quad \text{oder} \quad > 0$$

ist. Die Richtung dieser Geschwindigkeit ist hierfür ganz gleichgiltig.

Die Vorkommnisse von Nr. 4 ergeben sich nur teilweise als Degenerationen dieser drei Fälle.

Wir legen in Zukunft die Gleichung (12) der weiteren Rechnung zu Grunde, indem wir

$$(13) \qquad p = \frac{c^2}{\mu}, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{c^2 C}{\mu^2}}$$

oder

$$(14) \qquad p = \frac{c^2}{f(1+m)}, \quad \varepsilon = \sqrt{1 + \frac{c^2 C}{f^2(1+m)^2}}$$

setzen; umgekehrt ist

$$(15) \qquad c = \sqrt{pf(1+m)}, \quad C = \frac{f(1+m)(\varepsilon^2 - 1)}{p},$$

so daſs die beiden Integrationskonstanten durch die Bestimmungsstücke p und ε der Planetenbahn, die Kraft f und die Masse m ausgedrückt sind.

8. Aus der Gleichung (7) wird durch Einsetzen des Wertes von r aus (12) und Integration

$$(16) \qquad t = \frac{p^2}{c} \int \frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos \varphi)^2}.$$

Diese Gleichung kann entweder direkt weiter behandelt oder durch Einführung einer neuen Variabeln auf eine einfachere Form gebracht werden. Wir führen das letztere zunächst für die elliptische Bewegung durch. Beschreiben wir (Fig. 6) über der groſsen Achse $2a$ der Bahnellipse einen Kreis, fällen vom Endpunkte B des Radiusvektor r eine Ordinate BA auf die groſse Achse, verlängern diese Gerade, bis sie den Kreis in C schneidet, und verbinden diesen Punkt mit dem Mittelpunkte O, so bezeichnen wir den Winkel AOC mit u. Dem astronomischen Sprachge-

brauche folgend nennen wir die grofse Bahnachse die Apsidenlinie, ihre Endpunkte die Apsiden, den Winkel φ die wahre Anomalie und den Winkel u die exzentrische Anomalie (d. h. die vom Zentrum aus konstruierte A.). Wir erhalten, indem wir OA doppelt ausdrücken,

$$a \cos u = r \cos \varphi + a\varepsilon$$

oder nach Einfügung des Wertes von r aus (12)

$$a \cos u = \frac{p \cos \varphi}{1 + \varepsilon \cos \varphi} + a\varepsilon,$$

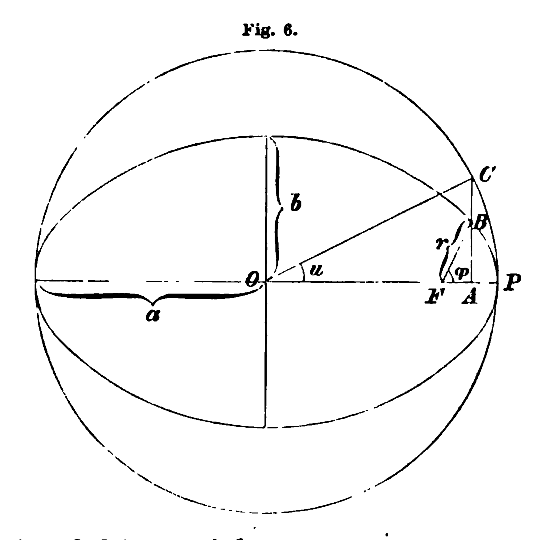
woraus*)

$$\cos \varphi = \frac{\cos u - \varepsilon}{1 - \varepsilon \cos u} \tag{17}$$

und

$$\cos u = \frac{\cos \varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \tag{18}$$

Fig. 6.



folgt. Aufserdem findet man, indem man

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}}$$

berechnet, die zur Umrechnung bequemste Formel

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{u}{2}. \tag{19}$$

Für r erhält man mittels (12) und (17)

$$r = a(1 - \varepsilon \cos u). \tag{20}$$

*) Es ist

$$p + a\varepsilon^2 = \frac{b^2}{a} + \frac{a^2 - b^2}{a} = a.$$

Aus (17) folgt durch Differentiation

$$\sin\varphi d\varphi = \frac{(1-\varepsilon^2)\sin u}{(1-\varepsilon\cos u)^2}du$$

oder, wenn man $\sin\varphi$ aus (17) berechnet,

$$d\varphi = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{1-\varepsilon\cos u}du.$$

Setzt man dies und $\cos\varphi$ aus (17) in (16) ein, so findet man unter Benutzung von (15)

$$t = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f(1+m)}(1-\varepsilon)^{\frac{3}{2}}}\int(1-\varepsilon\cos u)du$$

$$= \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f(1+m)}}\int(1-\varepsilon\cos u)du$$

und nach Ausführung der Integration, falls $t=0$ den Werten $\varphi=u=0$ entspricht,

$$t = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f(1+m)}}(u-\varepsilon\sin u)$$

oder, wenn man

$$\frac{\sqrt{f(1+m)}}{a^{\frac{3}{2}}} = n \tag{21}$$

setzt,

$$nt = u - \varepsilon\sin u, \tag{22}$$

die Kepler'sche Gleichung.

Für $u = 2\pi$ erhält man die Umlaufszeit

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{f(1+m)}}. \tag{23}$$

Hiernach kann die Kepler'sche Gleichung weiter geschrieben werden*)

$$\frac{2\pi t}{T} = u - \varepsilon\sin u. \tag{24}$$

Kennt man daher die leicht zu ermittelnde Umlaufszeit, so kann man nach (19) und (24) t zu einem gegebenen φ berechnen; die wichtigere umgekehrte Aufgabe, u und φ zu t zu berechnen, kann durch numerische Auflösung der transzendenten Gleichung (24) oder durch die folgende von Lagrange herrührende Reihenentwicklung gelöst werden.

---

*) $nt = \frac{2\pi t}{T}$ heißt die mittlere Anomalie. Sie ist die wahre Anomalie eines hypothetischen Planeten, welcher eine kreisförmige Bahn mit dem Radius a um die Sonne beschreibt, gerechnet von der Perihelrichtung des wirklichen Planeten aus.

9. Ist die Gleichung

$$x = z - \varepsilon f(z) \tag{25}$$

vorgelegt, in der x vorläufig als Konstante, ε als unabhängige, z als abhängige Variable betrachtet werde, so wird sich im allgemeinen für hinreichend kleine ε eine Entwickelung von z nach Potenzen von ε gemäfs der Maclaurin'schen Reihe herstellen lassen; die genaueren Bedingungen dafür mögen hier übergangen werden. Es wird

$$z = (z)_0 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\right)_0 \frac{\varepsilon}{1!} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2}\right)_0 \frac{\varepsilon^2}{2!} + \left(\frac{\partial^3 z}{\partial \varepsilon^3}\right)_0 \frac{\varepsilon^3}{3!} + \cdots \tag{26}$$

sein, wo die an die Klammer beigesetzte Null bedeuten soll, dafs der eingeklammerte Ausdruck für $\varepsilon = 0$ zu nehmen ist. Es handelt sich nur darum, die Gröfsen $\left(\frac{\partial^n z}{\partial \varepsilon^n}\right)_0$ zu entwickeln.

Betrachten wir jetzt z als Funktion der beiden Variabeln ε und x, so haben wir durch Differentiation von (25) nach ε

$$0 = \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} - f(z) - \varepsilon f'(z) \frac{\partial z}{\partial \varepsilon},$$

also

$$\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{f(z)}{1 - \varepsilon f'(z)}; \tag{27}$$

durch Differentiation nach x aber folgt

$$1 = \frac{\partial z}{\partial x} - \varepsilon f'(z) \frac{\partial z}{\partial x},$$

also

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 - \varepsilon f'(z)}, \tag{28}$$

somit

$$\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = f(z) \frac{\partial z}{\partial x}. \tag{29}$$

Durch weitere Differentiation von (29) nach ε und x ergiebt sich

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2} = f'(z) \frac{\partial z}{\partial \varepsilon} \frac{\partial z}{\partial x} + f(z) \frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon \partial x}$$

und

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon \partial x} = f'(z) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + f(z) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};$$

die Elimination von $\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon \partial x}$ aus diesen Gleichungen liefert bei Benutzung von (29)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2} = 2 f(z) f'(z) \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + f(z)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial \left[f(z)^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right]}{\partial x}. \tag{30}$$

Setzen wir $\varepsilon = 0$, also $z = x$, so haben wir zunächst nach (29) und (30)

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\right)_0 = f(x), \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon^2}\right)_0 = \frac{\partial [f(x)^2]}{\partial x}.$$

Um die weiteren Koeffizienten der Reihe (26) zu ermitteln, bezeichnen wir vorerst mit $\varphi(z)$ eine beliebige Funktion, während z noch durch die Gleichung (25) bestimmt ist; wir haben

$$(31) \qquad \frac{\partial\left[\varphi(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial \varepsilon} = \varphi'(z)\frac{\partial z}{\partial \varepsilon}\frac{\partial z}{\partial x} + \varphi(z)\frac{\partial^2 z}{\partial \varepsilon\, \partial x}$$

$$= \varphi'(z) f(z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \varphi(z) f'(z)\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \varphi(z) f(z)\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$$

$$= \frac{\partial\left[\varphi(z) f(z)\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x}.$$

Mittels (31) und (30) finden wir nun successive

$$\frac{\partial^3 z}{\partial \varepsilon^3} = \frac{\partial\left[\dfrac{\partial}{\partial x}\left(f(z)^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\right]}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial\left[\dfrac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(f(z)^2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)\right]}{\partial x} = \frac{\partial^2\left[f(z)^3\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^4 z}{\partial \varepsilon^4} = \frac{\partial^3\left[f(z)^4\dfrac{\partial z}{\partial x}\right]}{\partial x^3} \quad \text{u. s. w.}$$

Setzen wir schliefslich $\varepsilon = 0$, so erhalten wir

$$\left(\frac{\partial^n z}{\partial \varepsilon^n}\right)_0 = \frac{\partial^{n-1}[f(x)^n]}{\partial x^{n-1}},$$

und die Reihenentwicklung lautet

$$(32) \qquad z = x + \frac{\varepsilon}{1} f(x) + \frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}\frac{\partial[f(x)^2]}{\partial x} + \frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial[f(x)^3]}{\partial x^2} + \cdots.$$

Wenden wir dieses Verfahren auf Gleichung (22) an, in der wir

$$nt = \frac{2\pi t}{T} = x$$

setzen u. s. w., so finden wir die Reihe

$$(33) \qquad u = nt + \frac{\varepsilon}{1}\sin nt + \frac{\varepsilon^2}{1\cdot 2}\frac{\partial \sin^2 nt}{\partial (nt)} + \frac{\varepsilon^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{\partial^2 \sin^3 nt}{\partial^2 (nt)} + \cdots,$$

oder nach Ausführung der Differentiationen und Umgestaltung der Ausdrücke

$$(34) \qquad u = nt + \varepsilon \sin nt + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \sin 2nt$$
$$+ \frac{1}{8}\varepsilon^3 (3\sin 3nt - \sin nt)$$
$$+ \frac{1}{6}\varepsilon^4 (2\sin 4nt - \sin 2nt)$$
$$+ \frac{1}{384}\varepsilon^5 (125\sin 5nt - 81\sin 3nt + 2\sin nt)$$
$$+ \cdots.$$

Die Konvergenzbedingungen dieser Reihe, welche für die Planetenbahnen vollkommen genügt, wollen wir nicht weiter untersuchen. In vielen Fällen wird man mit der ersten Annäherung

$$u = nt + \varepsilon \sin nt \tag{35}$$

auskommen, da ε bei den meisten Planeten sehr klein ist.

Aus (35) folgt, wenn in gleicher Weise nur die erste Potenz von ε berücksichtigt wird,

$$\cos u = \cos nt \cos(\varepsilon \sin nt) - \sin nt \sin(\varepsilon \sin nt) = \cos nt - \varepsilon \sin^2 nt;$$

ferner nach (17), wenn $\frac{1}{1 - \varepsilon \cos u} = 1 + \varepsilon \cos u$ gesetzt wird*),

$$\begin{aligned}\cos\varphi = \cos u - \varepsilon + \varepsilon\cos^2 u &= \cos nt - \varepsilon\sin^2 nt - \varepsilon + \varepsilon\cos^2 nt\\ &= \cos nt - 2\varepsilon\sin^2 nt\end{aligned}$$

oder

$$\varphi = nt + 2\varepsilon \sin nt, \tag{35a}$$

wovon man sich dadurch überzeugt, daſs man von beiden Seiten den Kosinus nimmt.

Aus (20) folgt mit der gleichen Näherung

$$r = a(1 - \varepsilon \cos nt). \tag{35b}$$

10. Sind die Umlaufszeiten zweier Planeten mit den Massen m_1 und m_2 T_1 und T_2, während ihre mittleren Entfernungen von der Sonne, d. h. die groſsen Halbachsen ihrer Bahnen, welche das arithmetische Mittel ihrer gröſsten und kleinsten Entfernung darstellen, a_1 und a_2, so haben wir nach (23)

$$T_1^2 : T_2^2 = \frac{a_1^3}{1 + m_1} : \frac{a_2^3}{1 + m_2}. \tag{36}$$

Sind die Massen der beiden Planeten gleich oder so klein, daſs sie gegen die Sonnenmasse vernachlässigt werden dürfen, so erhalten wir die einfachere Proportion

$$T_1^2 : T_2^2 = a_1^3 : a_2^3. \tag{37}$$

Kepler stellte auf Grund eingehender Beobachtungen für die Planetenbewegungen die folgenden drei Gesetze auf:

a) Die Bahnen der Planeten sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht;

b) der von der Sonne nach dem Planeten gezogene Radiusvektor überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (§ 6, 8);

---

*) Es ist genau

$$\frac{1}{1 - \varepsilon \cos u} = 1 + \varepsilon \cos u + \varepsilon^2 \cos^2 u + \cdots$$

c) die **Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne.**

Die beiden ersten Gesetze treffen, von den Störungen abgesehen, vollkommen zu; das dritte Gesetz ist nur näherungsweise richtig und mufs nach Gleichung (36) ergänzt werden.

Die drei Gesetze geben eine vollständige Beschreibung der störungsfreien Planetenbewegung; man kann aus ihnen umgekehrt das Gesetz der Gravitation ableiten.

11. Ist die Bahn eines Himmelskörpers parabolisch oder hyperbolisch, so gelangt derselbe aus dem Weltraum in den Attraktionsbereich der Sonne*) und verläfst denselben, falls seine Bahn keine Ablenkung durch die Planeten erfährt, für immer wieder. Bei einigen Kometen ist dies der Fall. Übrigens ist die parabolische Bahn ebenso wie die genau kreisförmige unendlich unwahrscheinlich, da Parabel und Kreis nur ganz spezielle Fälle unter unendlich vielen Möglichkeiten sind. Da indessen die Bahnen vieler Kometen, wenigstens in ihren der Sonne nahen Teilen, der Parabel sehr nahe kommen, so legt man ihrer Berechnung die Annahme der parabolischen Bahn zu Grunde.

Für die letztere wird aus (16)

$$t = \frac{p^2}{c}\int\frac{d\varphi}{(1+\cos\varphi)^2} = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{f(1+m)}}\int\frac{d\varphi}{\cos^4\frac{\varphi}{2}}; \tag{38}$$

die Integration liefert, wenn $\varphi = 0$ für $t = 0$ ist,

$$t = \frac{p^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{f(1+m)}}\left[\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\right]. \tag{39}$$

Die Berechnung der wahren Anomalie aus der mittleren (der Zeit) erfordert also hier die Lösung einer kubischen Gleichung.

12. Die hyperbolische Bewegung können wir aus der elliptischen ableiten. Die Ellipsengleichung geht in die Hyperbelgleichung über, wenn bi an Stelle von b gesetzt wird; soll $p = \frac{b^2}{a}$ positiv bleiben, so müssen wir a als negativ annehmen. Da die rechte Seite von (18) > 1 wird (es ist $\cos\varphi + \varepsilon - 1 - \varepsilon\cos\varphi = (\cos\varphi - 1)(\varepsilon - 1) > 0$), so wird $u = iu_1$ rein imaginär. Wir erhalten aus (18)

$$\frac{e^{u_1} + e^{-u_1}}{2} = \frac{\cos\varphi + \varepsilon}{1 + \varepsilon\cos\varphi}; \tag{40}$$

u_1 und φ können hiernach ohne Schwierigkeit durcheinander ausgedrückt werden. Aus (22) wird

*) D. h. in denjenigen Bereich, in welchem die Attraktion der Sonne eine stärkere Wirkung ausübt als die der anderen Himmelskörper.

$$(41) \qquad \frac{\sqrt{f(1+m)}}{(-a)^{\frac{3}{2}}}\, t = u_1 - \varepsilon\, \frac{e^{u_1} - e^{-u_1}}{2},$$

eine durch Näherung zu lösende transzendente Gleichung, wenn u_1 gesucht ist.

13. Nach den gefundenen Formeln kann man die Stellung der Planeten und Kometen zu jeder Zeit berechnen (ohne Beachtungen der Störungen), wenn man nur die bestimmenden Gröfsen, die sog. Elemente ihrer Bahnen kennt. Es sind deren bei elliptischen und hyperbolischen Bahnen sechs, bei parabolischen fünf. Zwei Elemente bestimmen nämlich die Gröfse und Gestalt der elliptischen oder hyperbolischen Bahn (etwa a und b oder a und ε u. s. w.), eine (p) die der parabolischen. Um die Lage der Bahn im Raume zu fixieren, betrachten wir die Ebene der Erdbahn, die Ebene der Ekliptik, als Fundamentalebene; die Bahn des Himmelskörpers schneidet sie in einer Geraden, welche durch die Sonne geht, der Knotenlinie, ihre Endpunkte auf der Bahn heifsen die Knotenpunkte. Man unterscheidet den aufsteigenden und absteigenden Knoten; im ersteren bewegt sich der Himmelskörper nach derjenigen Seite der Ekliptikebene, auf welcher der Nordpol der Erde liegt. Der Winkel i zwischen der Ekliptik- und Bahnebene, sowie die Länge des aufsteigenden Knotens (d. h. der Winkel, welchen die nach dem aufsteigenden Knoten und dem Frühlingspunkte der Erdbahn von der Sonne aus gezogenen Radienvektoren miteinander bilden, im Sinne der Erdbewegung gerechnet) bestimmen die Lage dieser Ebene. Legt man weiter das Perihel der Bahn fest, indem man den Winkel seines Radiusvektor mit dem des aufsteigenden Knotens angiebt, wozu man gewöhnlich noch die Länge des letzteren addiert (Länge des Perihels*)), so ist auch die Lage der Bahn völlig bestimmt. Man braucht nur noch die Zeit (Epoche) anzugeben, zu der sich der Himmelskörper an einer bestimmten Stelle seiner Bahn befindet.

Die Umrechnung der Bewegung in astronomische Koordinaten, sowie die Bestimmung der Elemente aus Beobachtungen gehören in die Astronomie.

§ 10.

System von n materiellen Punkten, welche sich gegenseitig anziehen oder abstofsen.

1. Wir wollen jetzt untersuchen, welche allgemeineren Sätze über ein System von n materiellen Punkten gelten, die nach irgend welchen Gesetzen sich paarweise in der Richtung der Verbindungslinie Beschleunigungen derart erteilen, dafs die zwischen zwei Punkten wirkende Kraft

*) Dieselbe ist also die Summe zweier Winkel, welche gar nicht in derselben Ebene liegen.

dem Produkte ihrer Massen proportional ist; die Beschleunigung, die der eine von beiden empfängt, hängt daher nur von der Masse des anderen ab. Bezeichnen wir die Koordinaten der Punkte mit $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$, ihre Massen mit m_α und setzen

$$r_{\alpha\beta} = r_{\beta\alpha} = \sqrt{(x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 + (z_\alpha - z_\beta)^2},$$

und ist dem Prinzipe von Wirkung und Gegenwirkung entsprechend $f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}$, so haben wir durch Zusammensetzung der einzelnen Kraftkomponenten die Bewegungsgleichungen:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} = m_2 f_{12}(r_{12})\dfrac{x_1 - x_2}{r_{12}} + m_3 f_{13}(r_{13})\dfrac{x_1 - x_3}{r_{13}} \\ \qquad + \cdots + m_n f_{1n}(r_{1n})\dfrac{x_1 - x_n}{r_{1n}}, \\ \dfrac{d^2y_1}{dt^2} = m_2 f_{12}(r_{12})\dfrac{y_1 - y_2}{r_{12}} + m_3 f_{13}(r_{13})\dfrac{y_1 - y_3}{r_{13}} \\ \qquad + \cdots + m_n f_{1n}(r_{1n})\dfrac{y_1 - y_n}{r_{1n}}, \\ \dfrac{d^2z_1}{dt^2} = m_2 f_{12}(r_{12})\dfrac{z_1 - z_2}{r_{12}} + m_3 f_{13}(r_{13})\dfrac{z_1 - z_3}{r_{13}} \\ \qquad + \cdots + m_n f_{1n}(r_{1n})\dfrac{z_1 - z_n}{r_{1n}}; \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} = m_1 f_{21}(r_{21})\dfrac{x_2 - x_1}{r_{21}} + m_3 f_{23}(r_{23})\dfrac{x_2 - x_3}{r_{23}} \\ \qquad + \cdots + m_n f_{2n}(r_{2n})\dfrac{x_2 - x_n}{r_{2n}} \qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

2. Multiplizieren wir die Gleichungen für $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2x_2}{dt^2}$ u. s. w. mit m_1, m_2 u. s. w. und addieren, und führen dieselben Operationen mit den beiden analogen Gruppen durch, so erhalten wir, da sich immer je zwei Glieder wegheben,

$$(2)\quad \begin{cases} m_1\dfrac{d^2x_1}{dt^2} + m_2\dfrac{d^2x_2}{dt^2} + \cdots + m_n\dfrac{d^2x_n}{dt^2} = 0, \\ m_1\dfrac{d^2y_1}{dt^2} + m_2\dfrac{d^2y_2}{dt^2} + \cdots + m_n\dfrac{d^2y_n}{dt^2} = 0, \\ m_1\dfrac{d^2z_1}{dt^2} + m_2\dfrac{d^2z_2}{dt^2} + \cdots + m_n\dfrac{d^2z_n}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Setzen wir

$$(3)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \\ \eta = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2 + \cdots + m_ny_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}, \\ \zeta = \dfrac{m_1z_1 + m_2z_2 + \cdots + m_nz_n}{m_1 + m + \cdots + m_n} \end{cases}$$

und nennen den Punkt ξ, η, ζ den Schwerpunkt des Systems, so folgen aus (2) die Gleichungen

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0, \tag{4}$$

d. h. auf den Schwerpunkt des Systems wirkt keine Beschleunigung ein, er bewegt sich also in einer Geraden (vgl. § 7, 3).

3. Multiplizieren wir die Gleichungen (1) der Reihe nach mit

$$m_1 \frac{dx_1}{dt}, \quad m_1 \frac{dy_1}{dt}, \quad m_1 \frac{dz_1}{dt}; \quad m_2 \frac{dx_2}{dt}, \quad m_2 \frac{dy_2}{dt}, \quad m_2 \frac{dz_2}{dt} \quad \text{u. s. w.}$$

und addieren, so folgt

$$\sum m_\alpha \left[\frac{dx_\alpha}{dt}\frac{d^2x_\alpha}{dt^2} + \frac{dy_\alpha}{dt}\frac{d^2y_\alpha}{dt^2} + \frac{dz_\alpha}{dt}\frac{d^2z_\alpha}{dt^2}\right] = \sum m_\alpha m_\beta f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \times$$

$$\frac{(x_\alpha - x_\beta)\left(\frac{dx_\alpha}{dt} - \frac{dx_\beta}{dt}\right) + (y_\alpha - y_\beta)\left(\frac{dy_\alpha}{dt} - \frac{dy_\beta}{dt}\right) + (z_\alpha - z_\beta)\left(\frac{dz_\alpha}{dt} - \frac{\partial z_\beta}{dt}\right)}{r_{\alpha\beta}}$$

$$= \sum m_\alpha m_\beta f_{\alpha\beta}(r_{\alpha\beta}) \frac{dr_{\alpha\beta}}{dt},$$

worin die Summation links über alle α, die Summation rechts über alle Kombinationen von α und β, unter Ausschluſs von $\alpha = \beta$, jedesmal von 1 bis n auszudehnen ist. Durch Integration der Gleichung folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum m_\alpha \left[\left(\frac{dx_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_\alpha}{dt}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2 = \sum m_\alpha m_\beta \int f(r_{\alpha\beta})\, dr_{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{5}$$

Bezeichnen wir die Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Punkte des Systems als die lebendige Kraft des Systems, die Summe der Einzelarbeiten als die Gesamtarbeit desselben, so können wir das Gesetz § 6, 9 unmittelbar auf das vorliegende System übertragen.

4. Findet die Attraktion zwischen sämtlichen Punkten nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze statt, so ist

$$\frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2 = f\sum \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}} + c. \tag{6}$$

Die linke Seite und das erste Glied der rechten sind ihrer Natur nach positive Gröſsen. Ist daher c negativ, so muſs

$$f\sum \frac{m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}} > -c$$

sein, woraus folgt, daſs nicht alle $r_{\alpha\beta}$ gleichzeitig unendlich werden können. Das System ist insofern wenigstens teilweise stabil, als

sich nicht alle Elemente in unendliche Fernen voneinander verlieren können.

5. Multipliziert man $\frac{d^2 z_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_2}{dt^2}$ u. s. w. mit $m_1 y_1$, $m_2 y_2$ u. s. w. und addiert sie; multipliziert man ferner $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_2}{dt^2}$ u. s. w. mit $m_1 z_1$, $m_2 z_2$ u. s. w. und subtrahiert ihre Summe von der vorigen, so erhält man nach (1)

$$\sum m_\alpha \left(y_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - z_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} \right) = 0; \tag{7}$$

denn es ist z. B., wenn rechts die Glieder mit $m_1 m_2$ zusammengefafst werden,

$$\frac{m_1 m_2 f_{12}(r_{12})}{r_{12}} \left[y_1 (z_1 - z_2) + y_2 (z_2 - z_1) - z_1 (y_1 - y_2) - z_2 (y_2 - y_1) \right] = 0.$$

Durch Integration von (7) und den beiden analogen Gleichungen erhalten wir die drei Flächensätze:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum m_\alpha \left(y_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt} - z_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt} \right) &= c_1, \\ \sum m_\alpha \left(z_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} - x_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt} \right) &= c_2, \\ \sum m_\alpha \left(x_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt} - y_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} \right) &= c_3. \end{aligned} \right. \tag{8}$$

Diese drei Formeln, in denen die speziellen Attraktionsgesetze nicht vorkommen, sind voneinander unabhängig. Durch Vergleichung mit § 6, 5 und 8 folgt, dafs z. B. $y_\alpha dz_\alpha - z_\alpha dy_\alpha$ das Doppelte des unendlich schmalen Dreiecks ist, welches der vom Nullpunkte nach der Projektion des Punktes α auf die yz-Ebene gezogene Radiusvektor in dem Zeitelemente dt überstreicht. Hiernach können wir die Formeln folgendermafsen in Worte kleiden:

Die Flächenräume, welche die Radienvektoren nach den Projektionen der n materiellen Punkte auf eine der Koordinatenebenen in einer bestimmten Zeit überstreichen, geben, mit den betreffenden Massen multipliziert, eine konstante Summe.

Dabei ist zu beachten, dafs der Nullpunkt und die Koordinatenebenen durchaus willkürlich sind; durch eine Änderung des Koordinatensystems werden nur die Werte der Konstanten geändert. Wir untersuchen dies genauer.

6. Zur Transformation eines rechtwinkligen Koordinatensystems in ein anderes mit demselben Nullpunkte dienen bekanntlich die Formeln

$$\left\{ \begin{aligned} \xi &= x \cos(x, \xi) + y \cos(y, \xi) + z \cos(z, \xi), \\ \eta &= x \cos(x, \eta) + y \cos(y, \eta) + z \cos(z, \eta), \\ \zeta &= x \cos(x, \zeta) + y \cos(y, \zeta) + z \cos(z, \zeta), \end{aligned} \right. \tag{9}$$

worin (x, ξ) der Winkel ist, welchen die x-Achse mit der ξ-Achse bildet u. s. w. Es gelten die Gleichungen*)

$$
(10) \qquad \begin{cases} \cos^2(x, \xi) + \cos^2(x, \eta) + \cos^2(x, \xi) = 1 \\ \text{u. s. w.,} \\ \cos^2(x, \xi) + \cos^2(y, \xi) + \cos^2(z, \xi) = 1 \\ \text{u. s. w.;} \end{cases}
$$

$$
(11) \qquad \begin{cases} \cos(x, \xi)\cos(y, \xi) + \cos(x, \eta)\cos(y, \eta) + \cos(x, \zeta)\cos(y, \zeta) = 0 \\ \text{u. s. w.,} \\ \cos(x, \xi)\cos(x, \eta) + \cos(y, \xi)\cos(y, \eta) + \cos(z, \xi)\cos(z, \eta) = 0 \\ \text{u. s. w.} \end{cases}
$$

Die Umkehrungen von (9) sind

$$
(12) \qquad \begin{cases} x = \xi \cos(x, \xi) + \eta \cos(x, \eta) + \zeta \cos(x, \zeta)\,, \\ y = \xi \cos(y, \xi) + \eta \cos(y, \eta) + \zeta \cos(y, \zeta)\,, \\ z = \xi \cos(z, \xi) + \eta \cos(z, \eta) + \zeta \cos(z, \zeta)\,. \end{cases}
$$

Löst man die Gleichungen (9) nach x, y, z auf, wobei

$$
(13) \qquad \begin{vmatrix} \cos(x, \xi) & \cos(y, \xi) & \cos(z, \xi) \\ \cos(x, \eta) & \cos(y, \eta) & \cos(z, \eta) \\ \cos(x, \zeta) & \cos(y, \zeta) & \cos(z, \zeta) \end{vmatrix} = \Delta
$$

gesetzt werden möge, so erhält man Gleichungen, welche mit (12) identisch sein müssen und aus deren Vergleichung mit (12) die Relationen folgen

$$
(14) \qquad \begin{cases} \Delta \cos(x, \xi) = \cos(y, \eta)\cos(z, \zeta) - \cos(y, \zeta)\cos(z, \eta)\,, \\ \Delta \cos(x, \eta) = \cos(y, \zeta)\cos(z, \xi) - \cos(y, \xi)\cos(z, \zeta)\,, \\ \Delta \cos(x, \zeta) = \cos(y, \xi)\cos(z, \eta) - \cos(y, \eta)\cos(z, \xi) \\ \text{u. s. w.} \end{cases}
$$

Quadriert man die drei ersten Gleichungen (14) und addiert dann, so folgt mit Hilfe von (10) und (11)

$$
(15) \qquad \Delta^2 = 1\,, \quad \text{also} \quad \Delta = \pm 1\,.
$$

Sind die beiden Koordinatensysteme so beschaffen, daſs, wenn man die positiven Hälften der x- und y-Achse mit den positiven Hälften der ξ- und η-Achse zusammenlegt, auch die positive Hälfte der z-Achse in die-

---

*) Man kann die Gleichungen (10) und (11) dadurch herleiten, daſs man in der selbstverständlichen Gleichung

$$
x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2
$$

das eine Mal ξ, η, ζ nach (9), das andere Mal x, y, z nach (12) ausdrückt und eine Koeffizientenvergleichung vornimmt. — Allgemein bezeichnen wir den Winkel zwischen zwei Richtungen m und n mit (m, n).

jenige der ζ-Achse fällt, so ist $\Delta = +1$, im umgekehrten Falle $\Delta = -1$, wie aus (13) oder (14) hervorgeht, wenn man

$$\cos(x, \xi) = \cos(y, \eta) = \cos(z, \zeta) = 1,$$

$$\cos(x, \eta) = \cos(y, \xi) = \cos(x, \zeta) = \cos(y, \zeta) = \cos(z, \xi) = \cos(z, \eta) = 0$$

setzt.

Nehmen wir in der Folge das Erste an, so haben wir nach (14) die neun Gleichungen

$$(16)\qquad \cos(x, \xi) = \cos(y, \eta)\cos(z, \zeta) - \cos(y, \zeta)\cos(z, \eta)$$

u. s. w.

7. Mit Benutzung der Gleichungen (16) findet man, indem man für η und ζ die Ausdrücke (9) einsetzt,

$$(17)\ \eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt} = \left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\cos(x, \xi) + \left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\cos(y, \xi) + \left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\cos(z, \xi)$$

und daher nach (8)

$$(18)\ \sum m_\alpha\left(\eta_\alpha\frac{d\zeta_\alpha}{dt} - \zeta_\alpha\frac{d\eta_\alpha}{dt}\right) = c_1\cos(x, \xi) + c_2\cos(y, \xi) + c_3\cos(z, \xi)$$

und zwei analoge Gleichungen.

Nun können wir eine Richtung l derart festsetzen, dafs wir

$$(19)\qquad \begin{cases} \cos(x, l) = \dfrac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}, \\ \cos(y, l) = \dfrac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}}, \\ \cos(z, l) = \dfrac{c_3}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \end{cases}$$

annehmen; denn die Summe der Quadrate dieser drei Gröfsen giebt 1. Daher ist

$$(20)\qquad \sum m_\alpha\left(\eta_\alpha\frac{d\zeta_\alpha}{dt} - \zeta_\alpha\frac{d\eta_\alpha}{dt}\right) =$$

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\,[\cos(x, l)\cos(x, \xi) + \cos(y, l)\cos(y, \xi) + \cos(z, l)\cos(z, \xi)]$$

$$= \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}\cos(l, \xi).$$

Die rechtsstehende Gröfse wird ein Maximum, wenn $\cos(l, \xi) = 1$ wird, d. h. wenn die ξ-Achse mit der Richtung l zusammenfällt; bildet sie dagegen mit der Richtung l einen rechten Winkel, so wird die Konstante gleich Null.

Behält man also fortwährend denselben Nullpunkt bei, so existiert eine feste Ebene (die zur Richtung l senkrechte), für welche die Flächenkonstante einen Maximalwert erreicht, wäh-

rend sie für jede zu ihr senkrechte Ebene Null wird. Die feste Ebene heifst die Laplace'sche unveränderliche Ebene.

8. Sind die Achsen des Koordinatensystems ξ, η, ζ gleichgerichtet mit denen des Systems x, y, z, ist also

$$\xi = x + a, \quad \eta = y + b, \quad \zeta = z + c,$$

so ist

$$\eta \frac{d\zeta}{dt} - \zeta \frac{d\eta}{dt} = y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} + b \frac{dz}{dt} - c \frac{dy}{dt} \quad \text{u. s. w.},$$

also, wenn die Koordinaten des Schwerpunktes im Systeme x, y, z jetzt mit x', y', z' bezeichnet werden,

$$(21) \quad \sum m_\alpha \left(\eta_\alpha \frac{d\zeta_\alpha}{dt} - \zeta_\alpha \frac{d\eta_\alpha}{dt}\right) = c_1 + \left(b \frac{dz'}{dt} - c \frac{dy'}{dt}\right) \sum m_\alpha \quad \text{u. s. w.}$$

Die Änderung, welche die Flächenkonstanten durch eine Verlegung des Nullpunktes erfahren, ist also abhängig von den Gröfsen $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$, d. h. von den konstanten Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes.

Befindet sich der Schwerpunkt des Systems in Ruhe, so werden die Flächenkonstanten durch eine Verlegung des Nullpunktes nicht geändert. — Dafs die Flächensätze in Gültigkeit bleiben, wenn man sich das Koordinatensystem mit dem Schwerpunkte fest verbunden denkt, leuchtet unmittelbar ein.

9. Bei unserem Planetensysteme könnte man den als unbeweglich gedachten Schwerpunkt als Nullpunkt, die unveränderliche Ebene als Fundamentalebene für die Rechnung annehmen; doch empfiehlt es sich für die Praxis mehr, den Nullpunkt in den Mittelpunkt der Sonne zu legen, während die Ebene der Ekliptik als Fundamentalebene zu Grunde gelegt wird*). Übrigens fällt der Schwerpunkt des Systems noch innerhalb des Sonnenkörpers, wenn nicht gerade Jupiter und Saturn in demselben Quadranten stehen. Nach der Berechnung von Laplace bildet die unveränderliche Ebene mit der Ebene der Ekliptik von 1750 den Neigungswinkel $1^0\,35',5$, während ihre Knotenlinie mit der Ekliptik zur gleichen Zeit die Länge $102^0\,57',5$ besafs.

10. Die bisherigen Entwicklungen haben das Prinzip der Wirkung und Gegenwirkung mit zur Voraussetzung. Hebt man dasselbe durch die Annahme von mehreren festen Zentren auf, so werden die Flächensätze alle oder teilweise ungiltig. Dagegen behält das Prinzip der lebendigen Kraft seine Giltigkeit.

11. Ist ein System von nur drei materiellen Punkten vorgelegt, welche sich nach dem Newton'schen Gesetze anziehen, so sind neun Gleichungen (1) vorhanden. Der Schwerpunktssatz, das Prinzip der lebendigen Kraft und die Flächensätze liefern zusammen sieben Integrale derselben, von denen vier noch Differentialgleichungen erster Ordnung sind. Die Inte-

*) Auch unter dieser Annahme bestehen die Flächensätze, da man eine § 7, 5 entsprechende Transformation vornehmen kann.

gration allgemein weiter durchzuführen ist bis jetzt nicht gelungen*); das berühmte **Problem der drei Körper** harrt noch seiner Lösung. Umsomehr ist eine allgemeine Lösung des Problems für n Punkte zur Zeit ausgeschlossen.

Das Problem der Attraktion nach zwei festen Zentren ist allerdings lösbar, wie wir erst an späterer Stelle zeigen werden; doch ist dasselbe in der Natur nicht zu realisieren. Die praktische Lösung des Problems der n Körper, deren die Astronomie bedarf, beruht auf **Näherungsmethoden**; dieselben gründen sich auf die Thatsache, daſs in unserem Planetensysteme die Wirkungen der Planeten aufeinander, verglichen mit denen der Sonne, sehr gering sind.

12. Wir wollen hier ein interessantes und sehr allgemeines **näherungsweise** richtiges Gesetz anschlieſsen. Es mögen die materiellen Punkte mit den Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$ gegenseitig aufeinander den Gleichungen (1) gemäſs einwirken; auſserdem mögen alle von einem festen Zentrum aus, welches wir in den Nullpunkt verlegen, nach dem **gleichen** Gesetze beeinfluſst werden. Dabei wollen wir annehmen, daſs die Abstände sämtlicher Punkte des Systems voneinander sehr klein sind gegen ihre Abstände vom festen Zentrum, so daſs die Quadrate der ersteren Abstände und der Gröſsen, welche sie als Faktor enthalten, gegen die Entfernungen vom Nullpunkte vernachlässigt werden können. Bezeichnen $r_1, r_2, \ldots r_n$ die Abstände der materiellen Punkte vom Zentrum, so gehen die Gleichungen (1) in

$$(22) \qquad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = m_2 f_{12}(r_{12}) \frac{x_1 - x_2}{r_{12}} + m_3 f_{13}(r_{13}) \frac{x_1 - x_3}{r_{13}} + \cdots$$

$$+ m_n f_{1n}(x_{1n}) \frac{x_1 - x_n}{r_{1n}} + f(r_1) \frac{x_1}{r_1} \quad \text{u. s. w.}$$

über; die Funktion f ist in allen Gleichungen dieselbe.

---

*) Die Hilfe, welche der „**letzte Multiplikator**" leistet, kann erst später besprochen werden. — Von den mannigfachen Versuchen, das Problem der drei Körper zu reduzieren oder umzuformen, seien die folgenden erwähnt: **Lagrange**, Essai sur le problème des trois corps. **Jacobi**, Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps nebst Zusatz, Ges. Werke, B. 4, p. 295. (Es handelt sich um die Bewegung der Schnittlinie der invariabeln Ebene mit der Ebene, welche die drei Punkte bestimmen, und um die Neigung der beiden Ebenen gegeneinander; das erzielte Resultat ist mit dem durch Anwendung des Prinzips des letzten Multiplikators zu erreichenden identisch.) Hauptsächlich mit demselben Gegenstande beschäftigen sich **Weiler** (Astron. Nachr. B. 74 u. 75; Liouv. J. (2), B. 14); **Radau**, Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable. Liouv. J. (2), B. 14; **Hesse**, Über das Problem der drei Körper. Borch. J. B. 74. — Weiter kommen noch Arbeiten von **Serret**, **Mathieu**, **Siacci**, **Allegret**, **Veltmann**, **Hill**, **Mayer**, **Poincaré** u. A. in Betracht. Ziehen sich drei Körper, die sich auf einer Geraden bewegen, mit einer Kraft an, welche dem **Kubus** der Entfernung umgekehrt proportional ist, so lassen sich die Bewegungsgleichungen auf eine Quadratur reduzieren: **Jacobi**, Problema trium corporum mutuis attractionibus cubis distantiarum inverse proportionalibus recta linea se moventium, Ges. Werke B. 4.

Nehmen wir nun mit den Gleichungen (22) dieselbe Operation vor, welche aus (1) die Gleichungen (2) herleitete, so erhalten wir mit Benutzung der letzteren und (3), indem jetzt wieder mit ξ, η, ζ die Koordinaten des Schwerpunktes bezeichnen,

$$(23) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = m_1 f(r_1)\frac{x_1}{r_1} + m_2 f(r_2)\frac{x_2}{r_2} + \cdots + m_n f(r_n)\frac{x_n}{r_n}$$

u. s. w.

Bezeichnet r den Abstand des Schwerpunktes des Systems vom Zentrum und setzen wir

$$x_1 = \xi + \Delta\xi_1, \quad y_1 = \eta + \Delta\eta_1, \quad z_1 = \zeta + \Delta\zeta_1$$

u. s. w.,

so sind $\Delta\xi_1$, $\Delta\eta_1$, $\Delta\zeta_1$ u. s. w. als kleine Gröſsen gegenüber r, ξ, η, ζ anzusehen, deren Potenzen und Produkte von der zweiten Dimension ab vernachlässigt werden dürfen. Wir denken uns nun

$$\frac{f(r_1)}{r_1}x_1 = \frac{f\left[\sqrt{(\xi+\Delta\xi_1)^2 + (\eta+\Delta\eta_1)^2 + (\zeta+\Delta\zeta_1)^2}\right]}{\sqrt{(\xi+\Delta\xi_1)^2 + (\eta+\Delta\eta_2)^2 + (\zeta+\Delta\zeta_1)^2}}(\xi + \Delta\xi_1)$$

u. s. w.

nach dem Taylor'schen Satze für mehrere Variabeln entwickelt und ererhalten

$$(24) \qquad \frac{f(r_1)}{r_1}x_1 = \frac{f(r)}{r}\xi + A\Delta\xi_1 + B\Delta\eta_1 + C\Delta\zeta_1$$

u. s. w.,

worin A, B, C u. s. w. Funktionen von ξ, η, ζ, also für die verschiedenen Punkte des Systems dieselben sind.

Durch Einsetzung der Werte (24) in (23) erhalten wir

$$(25) \qquad \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} = {} & \frac{f(r)}{r}\xi[m_1 + m_2 + \cdots + m_n] \\ & + A[m_1\Delta\xi_1 + m_2\Delta\xi_2 + \cdots + m_n\Delta\xi_n] \\ & + B[m_1\Delta\eta_1 + m_2\Delta\eta_2 + \cdots + m_n\Delta\eta_n] \\ & + C[m_1\Delta\zeta_1 + m_2\Delta\zeta_2 + \cdots + m_n\Delta\zeta_n] \end{aligned}$$

u. s. w.

oder, da nach den Gleichungen (3), in welche man $x_1 = \xi + \Delta\xi_1$ u. s. w. eintragen muſs, die drei letzten Klammerinhalte verschwinden,

$$(26) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = (m_1 + m_2 + \cdots + m_n) f(r)\frac{\xi}{r}$$

u. s. w.,

worin nur Glieder vernachlässigt sind, welche $\Delta\xi_1$, $\Delta\eta_1$, $\Delta\zeta_1$ u. s. w. mindestens in der zweiten Dimension enthalten. Man kann das Resultat aussprechen:

Wirkt auf ein System von materiellen Punkten, unter denen beliebige Attraktions- oder Repulsionskräfte thätig sind, ein festes Zentrum ein, und zwar auf alle nach demselben Gesetze, und sind die Dimensionen des Systems klein gegen die Entfernungen der Punkte vom Zentrum, so bewegt sich der Schwerpunkt des Systems mit grofser Näherung so, als wenn in ihm sämtliche Massen des Systems vereinigt wären und das Zentrum nur auf ihn wirkte.

Setzt man an Stelle des festen Zentrums eine relativ grofse Masse, so bleibt der Satz ungeändert.

Hiernach bewegen sich Planeten mit Trabanten in der Weise um die Sonne, dafs der Schwerpunkt jedes Partialsystems nahezu eine Ellipse nach dem zweiten Kepler'schen Gesetze durchläuft.

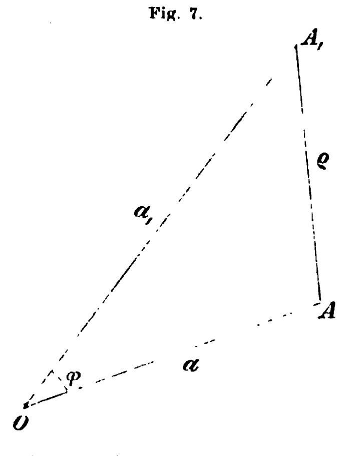
Auch aus den allgemeineren Untersuchungen über die Bewegung des Schwerpunktes eines Systems, die wir später anzustellen haben, läfst sich das gefundene Resultat ableiten.

§ 11.

Mathematische Hilfsmittel.

1. Haben zwei Punkte A und A_1 von einem dritten O die Entfernungen a und a_1, $a_1 > a$, und ist $\sphericalangle AOA_1 = \varphi$, so haben wir für $\varrho = AA_1$ den Ausdruck (Fig. 7)

Fig. 7.



$$(1)\quad \varrho = \sqrt{a_1^2 - 2aa_1 \cos\varphi + a^2}$$
$$= a_1 \sqrt{1 - 2\frac{a}{a_1}\cos\varphi + \left(\frac{a}{a_1}\right)^2}$$
$$= a_1 \sqrt{1 - 2q\cos\varphi + q^2},$$

wenn $q = \frac{a}{a_1}$ gesetzt wird; es ist $q < 1$. Wir brauchen in der Folge Reihenentwicklungen für ϱ^{-1} und ϱ^{-3}, die wir jetzt herstellen wollen. Dieselben rühren von Laplace her.

2. Es ist allgemein bei Anwendung des binomischen Lehrsatzes

$$(2)\quad (1 - 2q\cos\varphi + q^2)^{-r} = [1 - q(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) + q^2]^{-r}$$
$$= (1 - qe^{i\varphi})^{-r}(1 - qe^{-i\varphi})^{-r}$$
$$= \left[1 + \frac{r}{1} qe^{i\varphi} + \frac{r(r+1)}{1.2} q^2 e^{2i\varphi} + \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3} q^3 e^{3i\varphi} + \cdots\right]$$
$$\times\left[1 + \frac{r}{1} qe^{-i\varphi} + \frac{r(r+1)}{1.2} q^2 e^{-2i\varphi} + \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3} q^3 e^{-3i\varphi} + \cdots\right].$$

Da beide eingeklammerten Reihen unter der Voraussetzung $q < 1$ unbedingt konvergieren, dürfen wir sie Glied für Glied multiplizieren. Dabei erscheinen die Gröfsen $e^{ki\varphi}$ und $e^{-ki\varphi}$ infolge der Symmetrie beider Klammern mit demselben Coefficienten behaftet, können also zu

$$e^{ki\varphi} + e^{-ki\varphi} = 2 \cos k\varphi$$

zusammengefafst werden. Wir erhalten eine Reihe von der Form

$$(3) \quad (1 - 2q \cos \varphi + q^2)^{-r} = \frac{1}{2} C_0 + C_1 \cos \varphi + C_2 \cos 2\varphi + \cdots,$$

worin, wie die wirkliche Ausführung eines Teiles der Multiplikation zeigt,

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} C_0 = 1 + \left(\frac{r}{1}\right)^2 q^2 + \left(\frac{r(r+1)}{1.2}\right)^2 q^4 + \left(\frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3}\right)^2 q^6 + \cdots, \\ \frac{1}{2} C_1 = \frac{r}{1} q + \frac{r}{1} \cdot \frac{r(r+1)}{1.2} q^3 + \frac{r(r+1)}{1.2} \cdot \frac{r(r+1)(r+2)}{1.2.3} q^5 + \cdots \end{cases}$$

ist.

Die weiteren Koeffizienten lassen sich ebenso leicht direkt angeben; für die wirkliche Berechnung ist es jedoch vorteilhafter, dieselben mittels einer Rekursionsformel aus C_0 und C_1 abzuleiten.

3. Durch Differentiation von (3) nach φ folgt

$$(5) \quad \begin{aligned} &-2rq \sin \varphi (1 - 2q \cos \varphi + q^2)^{-r-1} \\ &= - C_1 \sin \varphi - 2C_2 \sin 2\varphi - \cdots - kC_k \sin k\varphi - \cdots \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} &-2rq \sin \varphi \left(\frac{1}{2} C_0 + C_1 \cos \varphi + C_2 \cos 2\varphi + \cdots\right) \\ &= (1 - 2q \cos \varphi + q^2)(- C_1 \sin \varphi - 2C_2 \sin 2\varphi - \cdots \\ &- kC_k \sin k\varphi - \cdots). \end{aligned}$$

Führt man die Multiplikationen aus und setzt

$$(6) \quad \begin{cases} \sin k\varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} [\sin (k+1)\varphi + \sin (k-1)\varphi], \\ \sin \varphi \cos k\varphi = \frac{1}{2} [\sin (k+1)\varphi - \sin (k-1)\varphi], \end{cases}$$

so findet man als Koeffizienten von $\sin k\varphi$

links: $\quad - rqC_{k-1} + rqC_{k+1}$,

rechts: $\quad - (1 + q^2)kC_k + q(k-1)C_{k-1} + q(k+1)C_{k+1}$,

durch deren Gleichsetzung man die Rekursionsformel

$$(7) \quad (k + 1 - r)qC_{k+1} = (1 + q^2)kC_k - (k - 1 + r)qC_{k-1}$$

erhält. Da man C_0 und C_1 kennt, so kann man mittels derselben der Reihe nach C_2, C_3 u. s. w. berechnen.

4. Für $r = \frac{1}{2}$ folgt hieraus, wenn wir

(8) $(1 - 2q\cos\varphi + q^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos\varphi + A_2\cos 2\varphi + \cdots$

setzen,

$$(9)\quad \begin{cases} A_0 = 2\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 q^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 q^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 q^6 + \cdots\right], \\ A_1 = 2\left[\frac{1}{2}q + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}q^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}q^5 + \cdots\right] \end{cases}$$

und

$$(10)\qquad \left(k + \frac{1}{2}\right)qA_{k+1} = (1 + q^2)kA_k - \left(k - \frac{1}{2}\right)qA_{k-1}.$$

Setzen wir wieder $q = \frac{a}{a_1}$ und $\mathfrak{A}_k = \frac{1}{a_1}A_k$, $\mathfrak{A}_{-k} = \mathfrak{A}_k$, so haben wir, da $\cos(-k\varphi) = \cos k\varphi$ ist,

$$(11)\qquad \varrho^{-1} = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\,\mathfrak{A}_k\cos k\varphi$$

und

$$(12)\quad (2k + 1)aa_1\mathfrak{A}_{k+1} = 2(a_1^2 + a^2)k\mathfrak{A}_k - (2k - 1)aa_1\mathfrak{A}_{k-1},$$

während $\mathfrak{A}_0$ und $\mathfrak{A}_1$ mittels (9) zu berechnen sind.

5. Setzen wir:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho^3} &= \frac{1}{a_1^3}(1 - 2q\cos\varphi + q^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{2a_1^3}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\,B_k\cos k\varphi = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\,\mathfrak{B}_k\cos k\varphi, \end{aligned}$$

also

$$\mathfrak{B}_k = \frac{1}{a_1^3}B_k,$$

so können wir die B_k oder $\mathfrak{B}_k$ entweder direkt aus (4) und (7) herleiten, oder, was der besseren Konvergenz wegen vorzuziehen ist, aus den A_k oder $\mathfrak{A}_k$ berechnen. Um das letztere zu bewerkstelligen, gehen wir von der Gleichung

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\,A_k\cos k\varphi = (1 - 2q\cos\varphi + q^2)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\,B_k\cos k\varphi$$

aus, welche durch Ausführung der Multiplikation auf der rechten Seite, Benutzung der Formel

$$\cos\varphi\cos k\varphi = \frac{1}{2}\left[\cos(k + 1)\varphi + \cos(k - 1)\varphi\right]$$

und Koeffizientenvergleichung die Beziehung

$$(14)\qquad A_k = (1 + q^2)B_k - q(B_{k-1} + B_{k+1})$$

liefert, aus der weiter folgt:

$$(14\text{a})\qquad A_{k+1} = (1 + q^2)B_{k+1} - q(B_k + B_{k+2}).$$

Aus (7) wird

$$\left(k - \frac{1}{2}\right) qB_{k+1} = (1 + q^2)kB_k - \left(k + \frac{1}{2}\right) qB_{k-1},$$

woraus

$$\left(k + \frac{1}{2}\right) qB_{k+2} = (1 + q^2)(k + 1)B_{k+1} - \left(k + \frac{3}{2}\right) qB_k$$

hervorgeht. Statt dieser beiden Gleichungen können wir auch schreiben:

$$\left(k + \frac{1}{2}\right) q(B_{k-1} + B_{k+1}) = \quad qB_{k+1} + (1 + q^2)kB_k,$$

$$\left(k + \frac{1}{2}\right) q(B_k \quad + B_{k+2}) = -qB_k + (1 + q^2)(k + 1)B_{k+1}.$$

Aus (14) und (14a) wird infolge dieser Relationen:

$$A_k \left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + q^2)B_k - qB_{k+1},$$

$$A_{k+1}\left(k + \frac{1}{2}\right) = qB_k - \frac{1}{2}(1 + q^2)B_{k+1},$$

woraus durch Elimination von B_{k+1} die Gleichung

$$(15)\qquad (1 - q^2)^2 B_k = (2k + 1)\left[(1 + q^2)A_k - 2qA_{k+1}\right]$$

oder

$$(16)\qquad (a_1^2 - a^2)^2 \mathfrak{B}_k = (2k + 1)\left[(a_1^2 + a^2)\mathfrak{A}_k - 2aa_1\mathfrak{A}_{k+1}\right]$$

folgt.

Da die $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{B}_k$ die Koeffizienten der Reihenentwicklungen von Ausdrücken sind, welche in Bezug auf a und a_1 vollkommene Symmetrie zeigen, so müssen sie selbst als symmetrische Funktionen dieser beiden Gröfsen angesehen werden; daher sind auch (12) und (16) in a und a_1 symmetrisch. Ist $a > a_1$, so mufs in den Berechnungen der $\mathfrak{A}_k$ und $\mathfrak{B}_k$ a mit a_1 vertauscht werden. Der Fall $a = a_1$ kann überhaupt einfacher behandelt werden, kommt aber nicht weiter in Betracht. In der Folge brauchen wir auf das Gröfsenverhältnis von a und a_1 keine Rücksicht zu nehmen.

6. Um auch noch die Ausdrücke $\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}$, $\frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1}$, $\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}$, von denen wir gleichfalls Gebrauch zu machen haben, darzustellen, bilden wir

$$\frac{d}{da}(a^2 - 2aa_1\cos\varphi + a_1^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$= -(a^2 - 2aa_1\cos\varphi + a_1^2)^{-\frac{3}{2}}(a - a_1\cos\varphi)$$

oder

$$(17)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\cos k\varphi = -(a - a_1\cos\varphi)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_k\cos k\varphi$$

$$= -a\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_k\cos k\varphi + \frac{1}{2}a_1\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_k\cos(k+1)\varphi$$

$$+\frac{1}{2}a_1\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_k\cos(k-1)\varphi$$

$$= -a\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_k\cos k\varphi + \frac{1}{2}a_1\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_{k-1}\cos k\varphi$$

$$+\frac{1}{2}a_1\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}\mathfrak{B}_{k+1}\cos k\varphi\,.$$

Die Koeffizientenvergleichung liefert:

$$(18)\qquad \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} = \frac{1}{2}a_1\mathfrak{B}_{k+1} - a\mathfrak{B}_k + \frac{1}{2}a_1\mathfrak{B}_{k-1}\,;$$

ebenso findet man:

$$(19)\qquad \frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1} = \frac{1}{2}a\mathfrak{B}_{k+1} - a_1\mathfrak{B}_k + \frac{1}{2}a\mathfrak{B}_{k-1}\,,$$

worin man an Stelle der $\mathfrak{B}_k$ auch die $\mathfrak{A}_k$ einführen kann.

Differentiiert man die so transformierte Gleichung (18) nochmals nach a, so erhält man $\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}$ durch die $\mathfrak{A}$ und deren erste Differentialquotienten ausgedrückt, also mittels (18) durch die $\mathfrak{A}_k$ oder $\mathfrak{B}_k$ allein.

Ferner bemerken wir, dafs

$$a\frac{d\frac{1}{\varrho}}{da} + a_1\frac{d\frac{1}{\varrho}}{da_1} = -\frac{a(a-a_1\cos\varphi)+a_1(a_1-a\cos\varphi)}{\varrho^3} = -\frac{1}{\varrho}$$

ist, woraus durch Koeffizientenvergleichung folgt:

$$a\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a_1\frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1} = -\mathfrak{A}_k$$

oder

$$(19\text{a})\qquad a_1\frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1} = -\mathfrak{A}_k - a\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\,.$$

Durch weitere Differentiationen von (19a) folgt:

$$(19\text{b})\qquad a_1\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da\,da_1} = -2\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} - a\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}\,,$$

$$a_1\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da_1^2} + \frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1} = -\frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1} - a\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da\,da_1}$$

oder

$$(19\text{c})\qquad a_1^2\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da_1^2} = 2\mathfrak{A}_k + 4a\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a^2\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}\,.$$

7. Wir haben uns weiter mit der linearen Differentialgleichung*)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y + A_0 + A_1 \cos m_1x + A_2 \cos m_2x + \cdots = 0 \tag{20}$$

zu beschäftigen, welche als eine Erweiterung der in § 8 behandelten anzusehen ist. Wäre die spezielle Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0$$

vorgelegt, so hätten wir nach § 8, (8)

$$y = C \sin(nx + \alpha)$$

zu setzen, worin C und α willkürliche Konstanten sind. Die Vermutung liegt nahe, daſs durch Zufügung geeigneter Glieder die Lösung von (20) gefunden werden kann. Wir setzen zu diesem Zwecke:

$$y = C \sin(nx + \alpha) + C_0 + C_1 \cos m_1x + C_2 \cos m_2x + \cdots$$

in (20) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} &- n^2C \sin(nx + \alpha) - m_1{}^2C_1 \cos m_1x - m_2{}^2C_2 \cos m_2x - \cdots \\ &+ n^2C \sin(nx + \alpha) + n^2C_0 + n^2C_1 \cos m_1x + n^2C_2 \cos m_2x + \cdots \\ &+ A_0 + A_1 \cos m_1x + A_2 \cos m_2x + \cdots = 0\,, \end{aligned}$$

eine Gleichung, die wirklich erfüllt wird, wenn

$$n^2C_0 + A_0 = 0, \quad - m_1{}^2C_1 + n^2C_1 + A_1 = 0 \quad \text{u. s. w.},$$

also

$$C_0 = -\frac{A_0}{n^2}, \quad C_1 = \frac{A_1}{m_1{}^2 - n^2} \quad \text{u. s. w.}$$

gesetzt wird. Somit erhalten wir das zwei willkürliche Konstanten C und α in sich schlieſsende, also allgemeine Integral

$$\begin{aligned} y = C \sin(nx + \alpha) - \frac{A_0}{n^2} + \frac{A_1}{m_1{}^2 - n^2} \cos m_1x \\ + \frac{A_2}{m_2{}^2 - n^2} \cos m_2x + \cdots. \end{aligned} \tag{21}$$

Dieses Resultat wird unbrauchbar, wenn etwa $m_1 = n$ wird. In diesem Falle setzen wir in y an Stelle von $C_1 \cos m_1x$ den Ausdruck $C_1x \sin nx$; wird dieses y in (20) eingeführt, so treten die Glieder

$$2nC_1 \cos nx - n^2C_1x \sin nx + n^2C_1x \sin nx + A_1 \cos nx$$

auf, welche sich zerstören müssen. Es ist daher

$$C_1 = -\frac{A_1}{2n}$$

---

*) Auch wenn $\cos(m_\alpha x + l_\alpha)$ an Stelle von $\cos m_\alpha x$ tritt, bleibt das Verfahren ungeändert.

zu setzen, so dafs

$$(22)\quad y = C\sin(nx+\alpha) - \frac{A_0}{n^2} - \frac{A_1}{2n}\,x\sin nx + \frac{A_2}{m_2{}^2 - n^2}\cos m_2 x + \cdots$$

wird.

§ 12.

Die planetarischen Störungen erster Ordnung und die Elemente der Mondtheorie.

1. Die Masse sämtlicher bekannten Planeten ist gegen die Sonnenmasse sehr gering; selbst die Jupitermasse beträgt nur $\frac{1}{1047{,}9}$ der letzteren. Infolge dessen kann man die Planetenbahnen zunächst unter der Voraussetzung berechnen, dafs nur die Sonne auf den fraglichen Planeten einwirke. An den so erhaltenen elliptischen Bahnen können dann wegen der Ablenkungen durch die übrigen Planeten wenig bedeutende Korrekturen angebracht werden; man bezeichnet diese, wie schon erwähnt, als Störungen oder Perturbationen.

Die Störungen können in doppelter Art in Berücksichtigung gezogen werden. Man kann die Stellung des Planeten nach der elliptischen Hypothese für irgend einen Zeitpunkt berechnen und dann nachträglich an den Koordinaten die nötigen Änderungen anbringen (Störung der Koordinaten). Man kann aber auch annehmen, dafs die Elemente der elliptischen Bahn fortwährenden Änderungen unterliegen, so dafs für jeden Moment eine etwas andere elliptische Bahn der Rechnung zu Grunde zu legen ist (Störung der Elemente). In der Folge werden wir manche Störungen durch Änderung der Elemente, andere durch Änderung der berechneten Koordinaten berücksichtigen.

Unter der Voraussetzung, dafs die Exzentrizitäten und die Neigungswinkel zwischen je zwei Bahnebenen bei den in Frage kommenden Planeten sehr klein sind, lassen sich für die Störungen allgemeinere Formeln aufstellen; dies trifft für die gröfseren Planeten in hinreichendem Mafse zu. Bei den Planetoiden und Kometen ist diese Voraussetzung nicht mehr zulässig; man mufs sich hier auf das stückweise Berechnen der störenden Wirkungen beschränken (spezielle Störungen). Nur der erste Fall soll hier in Betracht gezogen werden, da aus den Formeln, welche er liefert, die allgemeiner interessanten Resultate gefolgert werden können.

2. Setzt man wie bisher die Sonnenmasse gleich 1, so sind die Massen der Planeten kleine Brüche, deren Werte sämtlich unter 0,001 liegen. Denkt man sich die Gleichung der gestörten Bewegung eines Planeten nach Potenzen dieser Massen $m_1, m_2, \ldots m_n$ entwickelt, so wird es in den meisten Fällen genügen, nur die Glieder, welche die ersten Potenzen dieser Massen enthalten, in Berücksichtigung zu ziehen. Man bezeichnet die unter dieser Annahme berechneten Störungen als solche erster Ordnung; werden noch die zweiten Potenzen der Massen in Betracht gezogen, so erhält man die Störungen zweiter Ordnung u. s. w.

Wir beschäftigen uns hier nur mit den Störungen erster Ordnung*), welche eine relativ einfache Behandlung zulassen.

3. Denken wir uns die Bewegung des gestörten Planeten fertig entwickelt, so dafs seine Koordinaten x, y, z einzeln durch t ausdrückbar sind, und eine solche Gleichung nach den Massen m_1, m_2, ... m_n der störenden Planeten geordnet, so hat sie, falls nur die ersten Potenzen dieser Massen beachtet werden, die Gestalt

$$(1) \qquad x = f_0(t) + m_1 f_1(t) + m_2 f_2(t) + \cdots + m_n f_n(t)$$

und entsprechend für die beiden anderen Koordinaten. Wir setzen nun

$$(2) \qquad x_0 = f_0(t), \quad x_1 = m_1 f_1(t), \quad x_2 = m_2 f_2(t) \ldots x_n = m_n f_n(t),$$

also

$$x = x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n .$$

Dann ist x_0 der Wert, welchen x ohne das Vorhandensein der störenden Planeten annehmen würde, x_α ist die Änderung, welche er erleidet, falls lediglich der Planet mit der Masse m_α störend wirkt; x_α ist von derselben Gröfsenordnung klein wie m_α. Man sieht, dass man die Störungen, welche durch jeden einzelnen Planeten hervorgerufen werden, gesondert berechnen kann und dann nur sämtliche Störungen zu summieren braucht, um die Gesamtstörung zu erhalten.

Diese Zerlegung kann jedoch noch weiter getrieben werden. Sind ε und ε_1 die Exzentrizitäten der Bahnen des noch ungestörten und des störenden Planeten und ist J die Neigung ihrer Bahnebenen, so werden wir wegen der vorausgesetzten Kleinheit dieser Gröfsen nur deren erste Potenzen berücksichtigen, soweit sie noch mit der störenden Planetenmasse m_1 multipliziert sind; es werden also $m_1\varepsilon$, $m_1\varepsilon_1$, $m_1 J$, aber nicht $m_1\varepsilon^2$, $m_1\varepsilon J$ u. s. w. in Rechnung gezogen. Ordnet man nun die Bewegungsgleichungen des gestörten Planeten nach Muster von (1) in der Weise

$$x = f_0(t) + m_1 f_1(t) + m_1\varepsilon f_2(t) + m_1\varepsilon_1 f_3(t) + m_1 J f_4(t)$$

u. s. w.,

so kann man

$$x_0 = f_0(t), \quad x_1 = m_1 f_1(t), \quad x_2 = m_1\varepsilon f_2(t),$$
$$x_3 = m_1\varepsilon_1 f_3(t), \quad x_4 = m_1 J f_4(t),$$
$$x = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

setzen und darf wieder, da jede der Gröfsen ε, ε_1, J einzeln gleich

*) Die Störungen erster Ordnung wurden von Laplace (Mécanique céleste, B. I), diejenigen zweiter Ordnung von Poisson entwickelt. Einfache Darstellungen der Theorie der Störungen erster Ordnung findet man bei Möbius, die Elemente der Mechanik des Himmels, Leipzig 1843, und bei Israel-Holtzwart, Elemente der Astromechanik, Wiesbaden 1886. An das letztere Werk schliefst sich die folgende Behandlung im wesentlichen an; das erstere wurde namentlich bei der Theorie der Mondbewegung mehrfach benutzt.

Null gesetzt werden kann, die Gröfse x_0, welche ihre frühere Bedeutung hat, und x_1, x_2, x_3, x_4 gesondert berechnen. Die drei letzten Gröfsen sind gegen x_1 im allgemeinen ziemlich klein und können bei manchen Untersuchungen aufser Acht bleiben.

Durch diese weitgehenden Zerlegungen verliert das Störungsproblem viel von seiner Komplikation.

4. Wirken zwei Planeten mit den Massen m und m_1 aufeinander ein, so erfährt nicht allein der erste eine Störung, welche m_1 als Faktor enthält; auch der zweite Planet ist einer Störung ausgesetzt, welche der Masse m proportional ist. Diese Störung des zweiten Planeten mufs aber wieder seine Wirkung auf den ersten modifizieren und zwar um eine Gröfse, welche den Faktor m_1 hinzunimmt, also im ganzen mit dem Faktor mm_1 behaftet ist. Dieselbe ist somit von der zweiten Ordnung und kann hier vernachlässigt werden. Wir nehmen daher an, dafs der störende Körper sich in einer ungestörten elliptischen Bahn bewegt; die thatsächlichen Abweichungen hiervon verursachen nur Störungen zweiter Ordnung.

5. Wir bezeichnen die Koordinaten des gestörten und des störenden Planeten mit x, y, z und x_1, y_1, z_1, ihre Massen mit m und m_1 und unterscheiden überhaupt alle auf sie bezüglichen Gröfsen in analoger Weise. Der Sonnenmittelpunkt, den wir wie früher als fest betrachten, liege im Nullpunkt des Koordinatensystems, r und r_1 seien die Abstände der beiden Planeten von der Sonne, ϱ sei ihr Abstand voneinander, so dafs

$$(3)\qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \\ \varrho = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} \end{cases}$$

ist. Die Bahn des ersten Planeten möge im ungestörten Zustande eine Ellipse sein, welche in der xy-Ebene liegt; die Schnittlinie dieser Ebene und der Bahnebene des störenden Planeten (die Knotenlinie im weiteren Sinne) möge als x-Achse angenommen werden, und zwar sei ihre positive Hälfte nach dem aufsteigenden Knoten gerichtet*). J sei der Neigungswinkel dieser beiden Ebenen und werde auf der Seite der positiven y als positiv, auf der umgekehrten als negativ gerechnet.

Die Bewegung des Planeten m wird nun von drei in Rechnung zu ziehenden Beschleunigungen abhängen. Es wirkt auf ihn die Attraktion der Sonne, die wie früher in Rechnung zu stellen ist, und die direkte Attraktion des Planeten m_1. Aufserdem übt der letztere eine Attraktion auf die Sonne aus, wodurch diese ihre absolute Lage ändert; da aber der Sonnenmittelpunkt beständig als festes Zentrum der zu berechnenden

---

*) Als aufsteigenden Knoten wollen wir denjenigen Schnittpunkt der Bahn des störenden Planeten mit der Ebene des noch ungestörten anderen bezeichnen, in welchem sich jener auf die nördliche Seite dieser Ebene begiebt. Da die Neigungen der Hauptplanetenbahnen zueinander geringe sind, so ist der Begriff „nördliche Seite“ durch die Lage des Erdnordpols genügend bestimmt.

relativen Bewegung betrachtet wird, so müssen wir diese Beschleunigung in der Weise in Rechnung bringen, dafs wir dem Planeten m eine gleiche, aber entgegengesetzte Beschleunigung zulegen. So gelangen wir zu den drei Differentialgleichungen der gestörten Bewegung:

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{f(1+m)}{r^2}\frac{x}{r} - \frac{fm_1}{\varrho^2}\frac{x-x_1}{\varrho} - \frac{fm_1}{r_1^2}\frac{x_1}{r_1}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{f(1+m)}{r^2}\frac{y}{r} - \frac{fm_1}{\varrho^2}\frac{y-y_1}{\varrho} - \frac{fm_1}{r_1^2}\frac{y_1}{r_1}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{f(1+m)}{r^2}\frac{z}{r} - \frac{fm_1}{\varrho^2}\frac{z-z_1}{\varrho} - \frac{fm_1}{r_1^2}\frac{z_1}{r_1}. \end{cases}$$

Zu diesen Gleichungen treten diejenigen hinzu, welche die elliptische Bewegung des störenden Planeten bestimmen, durch welche also x_1, y_1, z_1 als Funktionen der Zeit gegeben sind. Aufserdem wird die Bahn des Planeten m unter der Voraussetzung, dafs $m_1 = 0$ sei, d. h. seine ungestörte Bahn als bekannt angenommen.

6. Bei dem gewählten Koordinatensystem ist

$$z_1 = y_1 \operatorname{tg} J = y_1\left(J + \frac{J^3}{3} + \cdots\right);$$

da nun J^2 vernachlässigt werden soll, dürfen wir zwar nicht z_1 gegen x_1 und y_1, aber doch z_1^2 gegen x_1^2 und y_1^2 vernachlässigen. Da die Gröfse z erst ein Ergebnis der Störung, also mit dem Faktor m_1 behaftet ist, werden wir auch z weglassen dürfen. Hierdurch werden r, ϱ, r_1 von z und z_1, die beiden ersten Gleichungen (4) also von J unabhängig. Da ferner z für $J = 0$ verschwinden würde, dürfen wir annehmen, dafs z noch J als Faktor enthält, also von der Gröfsenordnung $m_1 J$ ist. Infolge dessen tritt in allen Gliedern der dritten Gleichung der Faktor $m_1 J$ auf, weshalb wir solche Posten, welche auch noch z und z_1 als Faktor aufweisen, vernachlässigen dürfen. Hierdurch gelangen wir zu einer neuen, sehr wichtigen Reduktion des Problems.

Setzen wir

$$x = r \cos l \cos b, \quad y = r \sin l \cos b, \quad z = r \sin b;$$
$$x_1 = r_1 \cos l_1 \cos b_1, \quad y_1 = r_1 \sin l_1 \cos b_1, \quad z_1 = r_1 \sin b_1$$

und bezeichnen r und r_1 als die Radienvektoren, l und l_1 als die Längen, b und b_1 als die Breiten der beiden Planeten*), so dürfen wir in Gliedern, welche m_1 enthalten, $\cos b = 1$ annehmen, da $\sin b$ von der Gröfsenordnung J, also $\cos b = 1 - 2\sin^2\frac{b}{2}$ von 1 nur um eine Gröfse höherer Kleinheit verschieden ist. Ebenso ist $\cos b_1 = 1$ zu nehmen. Es ist also

---

*) b und b_1 sind die Neigungswinkel von r und r_1 gegen die xy-Ebene, l und l_1 sind die Winkel, welche die Projektionen von r und r_1 auf diese Ebene mit der Linie des aufsteigenden Knotens bilden.

$$
(5) \quad \begin{cases} x = r \cos l, & y = r \sin l, & z = r \sin b, \\ x_1 = r_1 \cos l_1, & y_1 = r_1 \sin l_1, & z_1 = r_1 \sin b_1 \end{cases}
$$

zu setzen.

Wir können nun nach den gemachten Vereinfachungen das Resultat aussprechen:

Die beiden ersten Gleichungen (4) bestimmen die Störungen des Radiusvektor und der Länge; sie sind von J, z, z_1 (oder b, b_1) unabhängig. Man kann diesen Teil der Aufgabe als ein planimetrisches Problem behandeln, indem man sich die Ebene der Bahn des störenden Planeten in die Ebene der x, y umgeklappt denkt.

Die dritte Gleichung (4) bestimmt die Störung der Breite; man braucht hier auf die Exzentrizitäten keine Rücksicht zu nehmen, kann sich also beide Bahnen als kreisförmige denken.

Wir werden beide Teile getrennt behandeln, bei dem ersten aber nach den früheren Auseinandersetzungen noch weitere Teilungen vornehmen.

7. Mit Hilfe der Gleichungen (5) führen wir jetzt in die beiden ersten Gleichungen (4) Polarkoordinaten ein; durch Differentiation folgt aus (5):

$$
(6) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \cos l \dfrac{d^2r}{dt^2} - 2 \sin l \dfrac{dr}{dt}\dfrac{dl}{dt} - r \cos l \left(\dfrac{dl}{dt}\right)^2 - r \sin l \dfrac{d^2l}{dt^2}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \sin l \dfrac{d^2r}{dt^2} + 2 \cos l \dfrac{dr}{dt}\dfrac{dl}{dt} - r \sin l \left(\dfrac{dl}{dt}\right)^2 + r \cos l \dfrac{d^2l}{dt^2}. \end{cases}
$$

Multiplizieren wir die Gleichungen (6) mit $\cos l$ und $\sin l$ und addieren, dann mit $\sin l$ und $\cos l$ und subtrahieren, so folgt:

$$
(7) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} \cos l + \dfrac{d^2y}{dt^2} \sin l = \dfrac{d^2r}{dt^2} - r \left(\dfrac{dl}{dt}\right)^2, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2} \sin l - \dfrac{d^2y}{dt^2} \cos l = - r \dfrac{d^2l}{dt^2} - 2 \dfrac{dr}{dt}\dfrac{dl}{dt}. \end{cases}
$$

Die gleiche Operation nehmen wir mit den beiden ersten Gleichungen (4) vor, nachdem wir rechts für x, y, x_1, y_1 die Polarkoordinaten eingesetzt haben; nach Ausführung dieser Rechnung setzen wir statt der linken Seiten die durch (7) gegebenen Ausdrücke ein. Es folgt:

$$
(8) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{dl}{dt}\right)^2 = -\dfrac{f(1+m)}{r^2} - \dfrac{fm_1}{\varrho^3}[r - r_1 \cos(l - l_1)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \dfrac{fm_1}{r_1^2} \cos(l - l_1), \\ - r\dfrac{d^2l}{dt^2} - 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dl}{dt} = \dfrac{fm_1}{\varrho^3} r_1 \sin(l - l_1) - \dfrac{fm_1}{r_1^2} \sin(l - l_1). \end{cases}
$$

8. Wir setzen jetzt

$$
r = r_0 + \varDelta r, \quad l = l_0 + \varDelta l,
$$

indem wir unter r_0 und l_0 diejenigen Teile der Koordinaten verstehen, welche übrig bleiben, wenn man $m_1 = 0$ setzt, d. h. die Koordinaten der ungestörten Planetenbahn. $\varDelta r$ und $\varDelta l$ sind also die Störungen der Polarkoordinaten und als solche mit dem Faktor m_1 behaftet zu denken. Aus

diesem Grunde dürfen wir in Gliedern, welche aufserdem m_1 enthalten, ohne weiteres $r = r_0$, $l = l_0$ setzen; insbesondere können wir diese Ersetzung in ϱ vorgenommen denken, ohne die Bezeichnung ändern zu müssen. Allgemein ist zu beachten, dafs Δr^2, $\Delta r \Delta l$, Δl^2 u. s. w. zu vernachlässigen sind, weshalb z. B.

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(r_0 + \Delta r)^2} = \frac{1}{r_0^2\left(1 + \frac{\Delta r}{r_0}\right)^2} = \frac{1}{r_0^2}\left(1 - 2\frac{\Delta r}{r_0}\right)$$

wird. Hiernach wird aus (8)

$$(9)\begin{cases} \frac{d^2 r_0}{dt^2} - r_0\left(\frac{dl_0}{dt}\right)^2 + \frac{d^2\Delta r}{dt^2} - \Delta r\left(\frac{dl_0}{dt}\right)^2 - 2r_0\frac{dl_0}{dt}\frac{d\Delta l}{dt} \\ = -\frac{f(1+m)}{r_0^2} + \frac{2f(1+m)\Delta r}{r_0^3} - \frac{fm_1}{\varrho^3}\left[r_0 - r_1\cos(l_0 - l_1)\right] \\ \quad -\frac{fm_1}{r_1^2}\cos(l_0 - l_1), \\ -r_0\frac{d^2 l_0}{dt^2} - 2\frac{dr_0}{dt}\frac{dl_0}{dt} - r_0\frac{d^2\Delta l}{dt^2} - \Delta r\frac{d^2 l_0}{dt^2} \\ -2\frac{d\Delta r}{dt}\frac{dl_0}{dt} - 2\frac{dr_0}{dt}\frac{d\Delta l}{dt} = \frac{fm_1}{\varrho^3}r_1\sin(l_0 - l_1) - \frac{fm_1}{r_1^2}\sin(l_0 - l_1). \end{cases}$$

Nach einer früheren Bemerkung müssen die Glieder, welche m_1 als Faktor enthalten, für sich und die übrigen für sich übereinstimmen. Die letzteren geben nichts anderes als die Differentialgleichungen der ungestörten Bahn in Polarkoordinaten, die wir nicht weiter zu behandeln brauchen. Die ersteren aber liefern die Differentialgleichungen der Störungen Δr und Δl:

$$(10)\begin{cases} \frac{d^2\Delta r}{dt^2} = \left[\frac{2f(1+m)}{r_0^3} + \left(\frac{dl_0}{dt}\right)^2\right]\Delta r \\ \qquad + 2r_0\frac{dl_0}{dt}\frac{d\Delta l}{dt} + fm_1\left[\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)r_1\cos(l_0 - l_1) - \frac{r_0}{\varrho^3}\right], \\ r_0\frac{d^2\Delta l}{dt^2} = -\frac{d^2 l_0}{dt^2}\Delta r - 2\frac{dl_0}{dt}\frac{d\Delta r}{dt} \\ \qquad - 2\frac{dr_0}{dt}\frac{d\Delta l}{dt} - fm_1\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right)r_1\sin(l_0 - l_1). \end{cases}$$

Die rechten Seiten von (10) enthalten jetzt aufser Δr und Δl nur die Variabeln r_0, b_0, r_1, l_1; diese sind aber als die Koordinaten des ungestörten Planeten m und des störenden m_1 als bekannte Funktionen der Zeit anzusehen. Es wird unsere Aufgabe sein, sie durch die Zeit auszudrücken.

9. Zu diesem Zwecke benutzen wir die Formeln (35a) und (35b) von § 9, in denen bereits die Potenzen der Exzentrizität weggelassen sind. Bezeichnen wir die Längen der Perihelien beider Bahnen mit Π und Π_1 und setzen:

$$\lambda = nt + \lambda', \quad \lambda_1 = n_1 t + \lambda_1', \tag{11}$$

worin λ' und λ_1' die Längen zur Zeit $t = 0$ bedeuten, so werden jene Formeln zu*)

$$\left\{\begin{aligned} r_0 &= a\left[1 - \varepsilon \cos(\lambda - \Pi)\right], \\ l_0 &= \lambda + 2\varepsilon \sin(\lambda - \Pi), \\ r_1 &= a_1\left[1 - \varepsilon_1 \cos(\lambda_1 - \Pi_1)\right], \\ l_1 &= \lambda_1 + 2\varepsilon_1 \sin(\lambda_1 - \Pi_1). \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Aus denselben folgt, da $\frac{d\lambda}{dt} = n$ ist,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{1}{r_0} &= \frac{1}{a}\left[1 + \varepsilon \cos(\lambda - \Pi)\right], \\ \frac{1}{r_0^2} &= \frac{1}{a^2}\left[1 + 2\varepsilon \cos(\lambda - \Pi)\right], \\ \frac{1}{r_0^3} &= \frac{1}{a^3}\left[1 + 3\varepsilon \cos(\lambda - \Pi)\right], \\ \frac{dr_0}{dt} &= na\varepsilon \sin(\lambda - \Pi), \quad \frac{d^2 r_0}{dt^2} = n^2 a\varepsilon \cos(\lambda - \Pi), \\ \frac{dl_0}{dt} &= n + 2n\varepsilon \cos(\lambda - \Pi), \quad \frac{d^2 l_0}{dt^2} = -2n^2\varepsilon \sin(\lambda - \Pi), \\ \left(\frac{dl_0}{dt}\right)^2 &= n^2 + 4n^2\varepsilon \cos(\lambda - \Pi), \\ \frac{1}{r_1^2} &= \frac{1}{a_1^2}\left[1 + 2\varepsilon_1 \cos(\lambda_1 - \Pi_1)\right]. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Weiter ist ϱ eine Funktion von r_0, r_1 und $l_0 - l_1$, so dafs wir

$$\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \cos(l_0 - l_1) - \frac{r_0}{\varrho^3} = f(r_0, r_1, l_0, l_1)$$

$$= f\Big[a - a\varepsilon \cos(\lambda - \Pi),\ a_1 - a_1\varepsilon_1 \cos(\lambda_1 - \Pi_1),\ \lambda + 2\varepsilon \sin(\lambda - \Pi),$$
$$\lambda_1 + 2\varepsilon_1 \sin(\lambda_1 - \Pi)\Big]$$

$$= f(a, a_1, \lambda, \lambda_1) - f_1 a\varepsilon \cos(\lambda - \Pi) - f_2 a_1 \varepsilon_1 \cos(\lambda_1 - \Pi_1)$$
$$+ 2 f_3 \varepsilon \sin(\lambda - \Pi) + 2 f_4 \varepsilon_1 \sin(\lambda_1 - \Pi_1)$$

setzen dürfen, worin f_1, f_2, f_3, f_4 die partiellen Differentialquotienten von f nach seinen vier Variabeln bezeichnen; es folgt dies aus dem Taylorschen Satze für mehrere Variabeln.

Nun ist

$$f(a, a_1, \lambda, \lambda_1) = \left(\frac{1}{\varrho_0^3} - \frac{1}{a_1^3}\right) a_1 \cos(\lambda - \lambda_1) - \frac{a}{\varrho_0^3},$$

wenn

*) Man beachte, dafs in § 9 die Zeit $t = 0$ mit einem Periheldurchgang identifiziert wurde und dafs letzterem $\varphi = 0$ entsprach.

(13a) $$\varrho_0 = [a^2 - 2aa_1 \cos(\lambda - \lambda_1) + a_1^2]^{\frac{1}{2}}$$

gesetzt wird. Nach § 11, (13) ist aber

$$\varrho_0^{-3} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \mathfrak{B}_k \cos k(\lambda - \lambda_1)$$

und nach § 11, (17)

$$\frac{a_1 \cos(\lambda - \lambda_1) - a}{\varrho_0^3} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \cos k(\lambda - \lambda_1),$$

somit

$$f(a, a_1, \lambda, \lambda_1) = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k} \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \cos k(\lambda - \lambda_1) - \frac{1}{a_1^2} \cos(\lambda - \lambda_1)$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'^{k} \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \cos k(\lambda - \lambda_1),$$

wenn in Σ' der Koeffizient $\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} = \frac{d\mathfrak{A}_{-1}}{da}$ durch $\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \frac{1}{a_1^2}$ ersetzt wird.

Man berechnet hieraus durch Differentationen

$$f_1 = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'^{k} \frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2} \cos k(\lambda - \lambda_1),$$

$$f_2 = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'^{k} \frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da\,da_1} \cos k(\lambda - \lambda_1),$$

$$f_3 = -\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'^{k} k \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \sin k(\lambda - \lambda_1),$$

$$f_4 = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'^{k} k \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \sin k(\lambda - \lambda_1),$$

so dafs schliefslich*)

(14) $$\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \cos(l_0 - l_1) - \frac{r_0}{\varrho^3} = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'^{k} \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \cos k(\lambda - \lambda_1)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'^{k} \left[2k \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} - a \frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}\right] \cos[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi]$$

$$- \frac{\varepsilon_1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'^{k} \left[2k \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a_1 \frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da\,da_1}\right] \cos[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1 - \Pi_1]$$

wird.

---

*) Man beachte, dafs z. B.

$2 \cos k(\lambda - \lambda_1) \cos(\lambda - \Pi) = \cos[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi] + \cos[-k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi]$ ist; es kommt jedes Glied in der Summe doppelt vor, wodurch der Faktor 2 heraustritt.

Ferner folgt aus (13a)

$$\frac{d\varrho_0^{-1}}{d\lambda} = -aa_1 \sin(\lambda - \lambda_1)\varrho_0^{-3}$$

oder nach § 11, (11)

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{k\mathfrak{A}_k}{a} \sin k(\lambda - \lambda_1) = a_1\varrho_0^{-3} \sin(\lambda - \lambda_1),$$

also

$$(14\text{a}) \left(\frac{1}{\varrho_0^{\,3}} - \frac{1}{a_1^{\,3}}\right) a_1 \sin(\lambda - \lambda_1) = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k \frac{k\mathfrak{A}_k}{a} \sin k(\lambda - \lambda_1) - \frac{\sin(\lambda - \lambda_1)}{a_1^{\,2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{k\mathfrak{A}_k}{a} \sin k(\lambda - \lambda_1),$$

wenn in Σ' statt $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_{-1}$ die Gröfse $\mathfrak{A}_1 - \frac{a}{a_1^{\,2}}$ gesetzt wird, was mit der oben angegebenen Bedeutung von Σ' vollkommen zusammenstimmt.

Nach der vorigen Methode wird

$$(15) \quad \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^{\,3}}\right) r_1 \sin(l_0 - l_1) = \frac{1}{2a}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' k\mathfrak{A}_k \sin k(\lambda - \lambda_1)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{2a}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k k\left[(2k+1)\mathfrak{A}_k - a\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\right] \sin[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi]$$

$$- \frac{\varepsilon_1}{2a}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k k\left[2k\mathfrak{A}_k + a_1\frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1}\right] \sin[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1 - \Pi_1].$$

10. Die sämtlichen Ausdrücke der vorigen Nummer führen wir in (10) ein und erhalten, da nach § 9, (21) $f(1+m) = n^2a^3$ ist und

$$fm_1 = f(1+m)m_1 = n^2a^3m_1$$

gesetzt werden darf, weil mm_1 zu vernachlässigen ist,

$$(16) \quad \frac{d^2\Delta r}{dt^2} = 3n^2\Delta r + 2an\frac{d\Delta l}{dt} + \frac{a^3n^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} \cos k(\lambda - \lambda_1)$$

$$+ \varepsilon\left\{10n^2 \cos(\lambda - \Pi)\Delta r + 2an\cos(\lambda - \Pi)\frac{d\Delta l}{dt}\right.$$

$$\left. + \frac{a^3n^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left[2k\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} - a\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}\right] \cos[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi]\right\}$$

$$- \frac{\varepsilon_1 a^3n^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \left[2k\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a_1\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da\,da_1}\right] \cos[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1 - \Pi_1]$$

und, indem wir die zweite Gleichung vor der Umformung durch r_0 dividieren,

$$(17)\quad \frac{d^2\Delta l}{dt^2} = -\frac{2n}{a}\frac{d\Delta r}{dt} - \frac{an^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\, k\mathfrak{A}_k \sin k(\lambda-\lambda_1)$$

$$+\,\varepsilon\left\{\frac{2n^2}{a}\sin(\lambda-\Pi)\Delta r - \frac{6n}{a}\cos(\lambda-\Pi)\frac{d\Delta r}{dt} - 2n\sin(\lambda-\Pi)\frac{d\Delta l}{dt}\right.$$

$$-\frac{an^2m_1}{2}\cos(\lambda-\Pi)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\, k\mathfrak{A}_k\sin k(\lambda-\lambda_1)$$

$$\left.-\frac{an^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\, k\left[(2k+1)\mathfrak{A}_k - a\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\right]\sin[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda-\Pi]\right\}$$

$$+\frac{\varepsilon_1 an^2m_1}{2}\sum_{+\infty}^{+\infty}{}'_k\, k\left[2k\mathfrak{A}_k + a_1\frac{d\mathfrak{A}_k}{da_1}\right]\sin[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda_1-\Pi_1].$$

Wir können nun Δr_0 und Δl_0 in je zwei Teile zerlegen, welche von ε und ε_1 frei, resp. von ε und ε_1 abhängig sind. Nach (12) ist aber zu setzen, wenn wir den von ε und ε_1 abhängigen Teil durch den Index ε kenntlich machen,

$$r_0 = a + r_\varepsilon,\quad l_0 = \lambda + l_\varepsilon,$$

also

$$(18)\qquad \Delta r = \Delta a + \Delta r_\varepsilon,\quad \Delta l = \Delta\lambda + \Delta l_\varepsilon.$$

Wir könnten die Gleichungen (16) und (17) in je drei Teile zerfällen, begnügen uns jedoch damit, der eingeführten Bezeichnung entsprechend, einen von den Exzentrizitäten freien und einen von diesen abhängigen Teil aufzustellen. Für den ersten haben wir

$$(19)\quad \frac{d^2\Delta a}{dt^2} - 3n^2\Delta a - 2an\frac{d\Delta\lambda}{dt} - \frac{a^3n^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\,\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\cos k(\lambda-\lambda_1) = 0,$$

$$(20)\quad \frac{d^2\Delta\lambda}{dt^2} + \frac{2n}{a}\frac{d\Delta a}{dt} + \frac{an^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\, k\mathfrak{A}_k\sin k(\lambda-\lambda_1) = 0;$$

für den zweiten, wenn wir beachten, dafs in Gliedern mit dem Faktor ε oder ε_1 die Gröfsen Δr_ε und Δl_ε weggelassen werden dürfen,

$$(21)\quad \frac{d^2\Delta r_\varepsilon}{dt^2} - 3n^2\Delta r_\varepsilon - 2an\frac{d\Delta l_\varepsilon}{dt} - 10\varepsilon n^2\cos(\lambda-\Pi)\Delta a$$

$$-\,2\varepsilon an\cos(\lambda-\Pi)\frac{d\Delta\lambda}{dt}$$

$$-\frac{\varepsilon a^3n^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k\left[2k\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} - a\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}\right]\cos[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda-\Pi]$$

$$+\frac{\varepsilon_1 a^3n^2m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\left[2k\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a_1\frac{d^2\mathfrak{A}_k}{da\,da_1}\right]\cos[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda_1-\Pi_1] = 0,$$

$$(22)^*)\qquad \frac{d^2\Delta l_\varepsilon}{dt^2}+\frac{2n}{a}\frac{d\Delta r_\varepsilon}{dt}-\frac{2\varepsilon n^2}{a}\sin(\lambda-\Pi)\Delta a$$

$$+\frac{6\varepsilon n}{a}\cos(\lambda-\Pi)\frac{d\Delta a}{dt}+2\varepsilon n\sin(\lambda-\Pi)\frac{d\Delta\lambda}{dt}$$

$$+\frac{\varepsilon a n^2 m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' k\left[(2k+2)\mathfrak{A}_k-a\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\right]\sin[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda-\Pi]$$

$$-\frac{\varepsilon_1 a n^2 m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' k\left[2k\mathfrak{A}_k+a_1\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}\right]\sin[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda_1-\Pi_1]=0.$$

11. Der Gang der Integration dieser Differentialgleichungen ist der folgende. Da a konstant ist, kann (20) direkt einmal integriert werden; wird der sich ergebende Wert für $\frac{d\Delta\lambda}{dt}$ in (19) substituiert, so gelingt die vollständige Integration dieser Gleichung nach § 11, (21). Das hierdurch gefundene Δa wird wieder in das Integral von (20) substituiert, wodurch dieses zum zweiten Male integrierbar wird. Führt man die erhaltenen Werte für Δa und $\Delta\lambda$ in (21) und (22) ein, so kann auf diese das gleiche Verfahren angewandt werden.

Wir haben zuerst aus (20)**)

$$(23)\qquad \frac{d\Delta\lambda}{dt}+\frac{2n}{a}\Delta a-\frac{a n^2 m_1}{2(n-n_1)}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' \mathfrak{A}_k\cos k(\lambda-\lambda_1)=K,$$

dann durch Einsetzen in (19)

$$(24)\qquad \frac{d^2\Delta a}{dt^2}+n^2\Delta a-\frac{a^3 n^2 m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k'\left[\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}+\frac{2n\mathfrak{A}_k}{(n-n_1)a}\right]\cos k(\lambda-\lambda_1)$$
$$-2anK=0$$

und durch Integration, wenn $\frac{n-n_1}{n}=q$ gesetzt wird,

---

*) Man bemerke, dafs

$$\cos(\lambda-\Pi)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' k\mathfrak{A}_k\sin k(\lambda-\lambda_1)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' k\mathfrak{A}_k\sin[k(\lambda-\lambda_1)+\lambda-\Pi]$$

ist, da sich die Glieder von

$$\sin(\lambda-\Pi)\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' k\mathfrak{A}_k\cos k(\lambda-\lambda_1)$$

gegenseitig zerstören.

**) Es ist zu beachten, dafs nach (11) $\lambda-\lambda_1=(n-n_1)t+\lambda'-\lambda_1'$ ist. — Das Glied mit $k=0$, welches in (20) wegfällt, ist in (23) ebenfalls gleich Null zu setzen, was in der Folge immer zu berücksichtigen ist.

$$(25)\qquad \Delta a = C\sin(nt+\alpha) + \frac{2aK}{n} + \frac{1}{2}a^3 m_1 \frac{d\mathfrak{A}_0}{da}$$
$$-\frac{a^3 m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{k^2q^2-1}\left[\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}+\frac{2\mathfrak{A}_k}{qa}\right]\cos k(\lambda-\lambda_1),$$

worin $\mathfrak{A}_0 = 0$ zu nehmen ist, während $\frac{d\mathfrak{A}_0}{da}$ nicht verschwindet.

Setzen wir den erhaltenen Wert für Δa in (23) ein, so können wir integrieren und finden

$$(26)\qquad \Delta\lambda = \frac{2C}{a}\cos(nt+\alpha) - \left(3K + a^2 n m_1 \frac{d\mathfrak{A}_0}{da}\right)t$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{2a^2 m_1 q \frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + a m_1 (k^2q^2+3)\mathfrak{A}_k}{kq^2(k^2q^2-1)}\sin k(\lambda-\lambda_1) + K_1.$$

12. Hier müssen wir eine Bemerkung über die Konstantenbestimmung einschalten. Bisher nahmen wir an, daſs die ungestörte Bahn gegeben und daſs die Störungen nur als Korrekturen an derselben anzubringen seien. Allein der ungestörte Zustand war in Wirklichkeit niemals vorhanden, und die Konstanten der hypothetischen ungestörten Bahn haben sich unter Mitwirkung der Störungen ausgebildet.

Als eine der Bahnkonstanten kann die Umlaufszeit oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Gröſse n angesehen werden. Denkt man sich die Umlaufszeit als Mittel von wirklichen direkten Beobachtungen bestimmt, so enthält dieselbe bereits die Einflüsse der Störungen mit Ausnahme der periodischen, welche sich bei wiederholten Beobachtungen ausgleichen. Da nun

$$l = nt + \lambda'$$

ist, so können wir uns das Glied von (26), welches t als Faktor enthält, bereits mit λ vereinigt, d. h. als bei der Bestimmung von n schon berücksichtigt denken und demgemäſs

$$3K + a^2 n m_1 \frac{d\mathfrak{A}_0}{da} = 0$$

oder

$$K = -\frac{a^2 n m_1 \frac{d\mathfrak{A}_0}{da}}{3}$$

setzen.

Auch die Exzentrizität der Bahn und die Lage ihres Perihels haben sich unter Einfluſs der Störungen ausgebildet. Man überzeugt sich nun leicht davon, daſs man durch eine geeignete Abänderung der Gröſsen ε und Π die ersten Glieder auf der rechten Seite von (25) und (26), welche die Umlaufszeit des gestörten Planeten zur Periode haben, überflüssig machen kann. Setzt man nämlich $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ und $\Pi + \Delta\Pi$ statt ε und Π,

so gehen die beiden ersten Gleichungen (12) bei Vernachlässigung kleiner Gröfsen zweiter Ordnung in

$$r_0 = a[1 - \varepsilon\cos(\lambda - \Pi) - \Delta\varepsilon\cos(\lambda - \Pi) - \varepsilon\sin(\lambda - \Pi)\Delta\Pi],$$
$$l_0 = \lambda + 2\varepsilon\sin(\lambda - \Pi) + 2\Delta\varepsilon\sin(\lambda - \Pi) - 2\varepsilon\cos(\lambda - \Pi)\Delta\Pi]$$

über, und man braucht nur

$$- a\Delta\varepsilon\cos(\lambda - \Pi) - a\varepsilon\sin(\lambda - \Pi)\Delta\Pi = C\sin(nt + \alpha)$$
$$= C\sin[\lambda - \Pi + (\alpha + \Pi - \lambda')]$$
$$= C\sin(\alpha + \Pi - \lambda')\cos(\lambda - \Pi) + C\cos(\alpha + \Pi - \lambda')\sin(\lambda - \Pi),$$
$$2\Delta\varepsilon\sin(\lambda - \Pi) - 2\varepsilon\cos(\lambda - \Pi)\Delta\Pi$$
$$= -\frac{2C}{a}\sin(\alpha + \Pi - \lambda')\sin(\lambda - \Pi) + \frac{2C}{a}\cos(\alpha + \Pi - \lambda')\cos(\lambda - \Pi)$$

zu setzen. Beide Gleichungen werden identisch befriedigt, wenn

$$\Delta\varepsilon = -\frac{C}{a}\sin(\alpha + \Pi - \lambda'),$$
$$\Delta\Pi = -\frac{C}{a\varepsilon}\cos(\alpha + \Pi - \lambda')$$

genommen wird.

Wir sind demnach berechtigt, in (25) und (26) rechts die ersten Glieder wegzulassen, wenn für die Gröfsen ε und Π die Werte benutzt werden, welche sich unter Einflufs der Störungen herausgebildet haben. In gleicher Weise verfahren wir späterhin.

Ebenso darf in (26)

$$K_1 = 0$$

gesetzt werden, da ein anderes K_1 durch Änderung von λ' berücksichtigt werden kann.

So vereinfachen sich die Gleichungen (25) und (26) in

$$(27)\quad \Delta a = -\frac{a^3 m_1}{6}\frac{d\mathfrak{A}_0}{da} - \frac{a^3 m_1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{1}{k^2q^2 - 1}\left[\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + \frac{2\mathfrak{A}_k}{qa}\right]\cos k(\lambda - \lambda_1),$$

$$(27\text{a})\quad \Delta\lambda = \frac{1}{2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_k \frac{2a^2 m_1 q\frac{d\mathfrak{A}_k}{da} + am_1(k^2q^2 + 3)\mathfrak{A}_k}{kq^2(k^2q^2 - 1)}\sin k(\lambda - \lambda_1).$$

13. Die Formeln (27) und (27a) erfordern nach § 11, (22) eine Abänderung, falls

$$k(n - n_1) = n,$$

also

$$\frac{n}{n_1} = \frac{k}{k - 1}$$

wird; da die Umlaufszeiten beider Planeten

$$T = \frac{2\pi}{n}, \quad T_1 = \frac{2\pi}{n_1}$$

sind, so wird hieraus

$$\frac{T_1}{T} = \frac{k}{k-1}. \tag{28}$$

In diesem Falle würde ein nicht-periodisches Glied, d. h. ein Glied auftreten, welches t auch aufserhalb des Sinus und Kosinus enthielte. Während die periodischen Glieder immer zwischen gewissen Grenzwerten hin und her schwanken, würde das nicht-periodische Glied mit der Zeit ins Unendliche wachsen. Nennt man eine Störung säkular, wenn sie nicht periodisch ist, so findet eine säkulare Störung der mittleren Entfernung von der Sonne und damit der Umlaufszeit statt, falls (28) zutrifft. Sonst liefert (27) nur periodische Glieder, deren Werte zwischen gewissen Grenzen hin und her schwanken. Die Perioden derselben betragen

$$\frac{2\pi}{k(n-n_1)} = \frac{1}{k\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right)}.$$

Die sämtlichen Glieder gelangen bei der Wiederkehr der gleichen gegenseitigen Stellung beider Planeten zu ihren früheren Werten.

Von dem Nichtvorkommen säkularer Störungen des Radiusvektor hängt in erster Linie die Stabilität des Planetensystems ab. Wären solche Störungen vorhanden, so müfsten sich die Planetenbahnen mit der Zeit gänzlich ändern. Das Nichtzutreffen von (28) bietet für die Stabilität allein noch keine Garantie. Wenn nämlich in den von der Exzentrizität — auch deren höheren Potenzen — abhängigen Störungen des Radiusvektor nicht-periodische Glieder auftreten, wird die Stabilität ebenfalls vernichtet. Lagrange hat nun für beliebige Exzentrizitäten — bei Berücksichtigung nur der ersten Potenz werden wir das Resultat sogleich bestätigt finden —, aber bei Beachtung nur der ersten Potenz der Masse m_1, Poisson auch unter Rücksichtnahme auf die zweite Potenz von m_1 nachgewiesen, dafs säkulare Störungen des Radiusvektor nur eintreten können, wenn die Umlaufszeiten zweier Planeten in einem rationalen Verhältnis stehen*).

Da nun, wie an sich zu erwarten, die Verhältnisse der Umlaufszeiten

*) Bei Berücksichtigung der Potenzen der Exzentrizität lassen sich die Differentialgleichungen in ganz analoger Weise entwickeln wie hier. — Nach neuesten Untersuchungen von Gyldén, Acta mathematica, B. 9, p. 185, dürften säkulare Störungen des Radiusvektor überhaupt ausgeschlossen sein. Nach den Untersuchungen von Poisson u. A. treten säkulare Störungen bei Berücksichtigung der Glieder dritter Ordnung (in den Massen) auf, nach Mathieu (Borch. J. B. 80) jedoch erst bei Berücksichtigung der Glieder vierter Ordnung.

der Planeten sämtlich **irrational** sind, scheint die Stabilität des Planetensystems gesichert zu sein.

Wenn das Verhältnis der Umlaufszeiten zweier Planeten einem rationalen Werte sehr nahe kommt, welcher sich durch nicht allzu grofse Zahlen ausdrückt, so können einzelne Störungsglieder aufsergewöhnlich grofs werden. Dieser merkwürdige Fall trifft bei **Jupiter** und **Saturn** zu, deren Umlaufszeiten sich fast genau wie 60 : 149 und demnach sehr nahe wie 2 : 5 verhalten. Erst bei Berücksichtigung der dritten Potenz der Exzentrizitäten erhält man hierdurch ein Störungsglied von auffallender Gröfse, das gröfste, welches überhaupt im Planetensysteme vorkommt (die sog. **grofse Gleichung**). Die Periode dieser starken Störung beträgt circa 932 Jahre.

Aus § 10, (5) geht hervor, dafs die Verlangsamung der Bewegung des einen von zwei Planeten die Beschleunigung der Bewegung des andern zur Folge haben mufs. Eine säkulare Änderung der Umlaufszeit könnte nur (vgl. (27a)) bei einer säkularen Änderung des Radiusvektor eintreten.

14. Da die Integration der Gleichungen (21) und (23), wenn darin $\varDelta a$ und $\varDelta\lambda$ durch die in (27) und (27a) gefundenen Werte ersetzt werden, in derselben Weise wie die soeben durchgeführte verläuft, können wir auf ihre detaillierte Ausführung verzichten. Es sind nur einige Transformationen nötig, um eine einheitliche Gestalt zu gewinnen. So ist z. B. die Transformation

$$k(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1 - \Pi_1 = (k-1)(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi_1$$

vorzunehmen; ferner sind die Formeln (19a) und (19b) von § 11 anzuwenden.

Die Endresultate lauten

$$\varDelta r_s = m_1 a \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}{}' \{\varepsilon P_k \cos[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi] + \varepsilon_1 P_k' \cos[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi_1]\}, \tag{29}$$

$$\varDelta l_s = m_1 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{k}{}' \{\varepsilon Q_k \sin[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi] + \varepsilon Q_k' \sin[k(\lambda - \lambda_1) + \lambda - \Pi_1]\}, \tag{30}$$

worin

$$(31)\begin{cases} P_k = \dfrac{-\dfrac{3a}{q}\mathfrak{A}_k - [k^2 q(kq-1)+3]\dfrac{2a\mathfrak{A}_k + qa^2\dfrac{d\mathfrak{A}_k}{da}}{q(k^2q^2-1)} + \dfrac{1}{2}a^3\dfrac{d^2\mathfrak{A}_k}{da^2}}{(kq+1)^2-1}, \\[2ex] P_k' = \dfrac{\dfrac{(k+1)(2k+1)}{kq+1}a\mathfrak{A}_{k+1} + \dfrac{k^2q-1}{kq+1}a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_{k+1}}{da} - \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_{k+1}}{da^2}}{(kq+1)^2-1}, \end{cases}$$

$$
(31\text{a})\begin{cases} Q_k = \dfrac{k+1}{q(kq+1)}\, a\mathfrak{A}_k - \dfrac{k(kq-1)-6}{2(kq+1)} \dfrac{2a\mathfrak{A}_k + qa^2 \dfrac{d\mathfrak{A}_k}{da}}{q(k^2q^2-1)} - \dfrac{2}{kq+1} P_k, \\ Q_k' = -\dfrac{(k+1)a}{2(kq+1)^2}\left\{(2k+1)\mathfrak{A}_{k+1} - a\dfrac{d\mathfrak{A}_{k+1}}{da}\right\} - \dfrac{2}{kq+1} P_k' \end{cases}
$$

gesetzt ist.

Für $k = 0$ ist statt $\dfrac{2a\mathfrak{A}_k + qa^2 \dfrac{d\mathfrak{A}_k}{da}}{q(k^2q^2-1)}$ der Wert $\dfrac{1}{3} a^2 \dfrac{d\mathfrak{A}_0}{da}$ einzufügen.

In diesen Ausdrücken sind jedoch diejenigen Glieder, welche unendlich werden, durch andere zu ersetzen. In (29) insbesondere werden die Glieder mit $k = 0$ unendlich; dieselben lauten, vom unendlich machenden Nenner abgesehen:

$$
(32)\quad \begin{cases} m_1 a\varepsilon\left[a^2 \dfrac{d\mathfrak{A}_0}{da} + \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right]\cos(\lambda - \Pi) \\ + m_1 a\varepsilon_1\left[a\mathfrak{A}_1 - a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right]\cos(\lambda - \Pi_1). \end{cases}
$$

Nach § 11, (22) ist an deren Stelle zu setzen*)

$$
(33)\begin{cases} -\dfrac{m_1 na\varepsilon t}{2}\left[a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_0}{da} + \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right]\sin(\lambda - \Pi) \\ -\dfrac{m_1 na\varepsilon_1 t}{2}\left[a\mathfrak{A}_1 - a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right]\sin(\lambda - \Pi_1) \\ = -\dfrac{m_1 nat}{2}\left[\varepsilon\left(a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_0}{da^2} + \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right)\cos\Pi + \varepsilon_1\left(a\mathfrak{A}_1 - a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)\cos\Pi_1\right]\sin\lambda \\ -\dfrac{m_1 nat}{2}\left[-\varepsilon\left(a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_0}{da} + \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right)\sin\Pi - \varepsilon_1\left(a\mathfrak{A}_1 - a^2\dfrac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \dfrac{a^3}{2}\dfrac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)\sin\Pi_1\right]\cos\lambda. \end{cases}
$$

Andere nicht-periodische Glieder können noch auftreten, wenn n und n_1 in rationalem Verhältnis stehen; doch wollen wir diesen Fall, weil thatsächlich nicht vorhanden, nicht weiter verfolgen.

15. Wir haben bisher die Störungen der Koordinaten betrachtet; nur bei der Störung des Radiusvektor wurde gleichzeitig die Störung der grofsen Halbachse als ein Teil der ersteren in Betracht gezogen. Es empfiehlt sich aber, alle säkularen Störungen, zu welchen die durch (33) dargestellte gehört, auf die Elemente zu übertragen, die periodischen Störungen dagegen bei den Koordinaten zu berücksichtigen. Um die Störung der Exzentrizität und der Perihellänge einzuführen, setzen wir, ähnlich wie in Nr. 12, in

$$
r_0 = a - a\varepsilon\cos(\lambda - \Pi)
$$

---

*) Dafs der Faktor n in den Zähler tritt, während er bei § 11, (22) im Nenner steht, erklärt sich daraus, dafs bei der zweimaligen Differentiation von (29), die ausgeführt werden mufs, um wieder zur Differentialgleichung zweiter Ordnung zu gelangen, der Faktor n^2 heraustritt.

$r_0 + \Delta r$, $\varepsilon + \Delta\varepsilon$ und $\Pi + \Delta\Pi$ an Stelle von r_0, ε und Π; es folgt, da a keine säkulare Störung erleidet,

$$\text{(34)}\qquad \begin{aligned}\Delta r = & - a(\sin\Pi\,.\,\Delta\varepsilon + \varepsilon\cos\Pi\,.\,\Delta\Pi)\sin\lambda \\ & - a(\cos\Pi\,.\,\Delta\varepsilon - \varepsilon\sin\Pi\,.\,\Delta\Pi)\cos\lambda\,.\end{aligned}$$

Soll sich die säkulare Störung (33) nun ungezwungen durch eine Störung der Exzentrizität und der Perihellänge erklären, so müssen die Faktoren von $\sin\lambda$ und $\cos\lambda$ in der zweiten Form von (33) und in (34) identisch sein. Es folgt

$$\frac{m_1 nt}{2}\left[\varepsilon\left(a^2\frac{d\mathfrak{A}_0}{da} + \frac{a^3}{2}\frac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right)\cos\Pi + \varepsilon_1\left(a\mathfrak{A}_1 - a^2\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \frac{a^3}{2}\frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)\cos\Pi_1\right]$$
$$= \sin\Pi\,.\,\Delta\varepsilon + \varepsilon\cos\Pi\,.\,\Delta\Pi,$$

$$\frac{m_1 nt}{2}\left[-\varepsilon\left(a^2\frac{d\mathfrak{A}_0}{da} + \frac{a^3}{2}\frac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right)\sin\Pi - \varepsilon_1\left(a\mathfrak{A}_1 - a^2\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} - \frac{a^3}{2}\frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)\sin\Pi_1\right]$$
$$= \cos\Pi\,.\,\Delta\varepsilon - \varepsilon\sin\Pi\,.\,\Delta\Pi$$

und hieraus

$$\text{(35)}\quad \Delta\varepsilon = \frac{m_1 na\varepsilon_1 t}{4}\left(2\mathfrak{A}_1 - 2a\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} - a^2\frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)\sin(\Pi - \Pi_1),$$

$$\text{(36)}\quad \Delta\Pi = \frac{m_1 na^2 t}{4}\left(2\frac{d\mathfrak{A}_0}{da} + a\frac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2}\right) + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\,\frac{m_1 na}{4}\left(2\mathfrak{A}_1 - 2a\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} - a^2\frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)$$
$$\times\cos(\Pi - \Pi_1).$$

Werden diese Korrekturen an Exzentrizität und Perihellänge angebracht, so brauchen bei r und l nur die periodischen Störungen berücksichtigt zu werden. Man überzeugt sich nämlich durch eine analoge Rechnung davon, dafs bei Berücksichtigung von (35) und (36) auch die säkularen Störungsglieder von (30) weggelassen werden können.

Die Gleichungen (35) und (36) sind nur von den Elementen beider Planetenbahnen, nicht von der augenblicklichen Stellung der Planeten abhängig. Wegen der sehr langsamen Änderung von Π und Π_1 können

$$\frac{\Delta\varepsilon}{t} \quad\text{und}\quad \frac{\Delta\Pi}{t}$$

für lange Zeit als konstant angesehen werden; beide können positiv oder negativ sein.

16. Die Gleichung (35) bildet die Grundlage für eine der merkwürdigen Relationen, welche Laplace in Bezug auf die Gesamtheit der Planeten, soweit die Exzentrizitäten und gegenseitigen Neigungen ihrer Bahnen gering sind*), aufgestellt hat.

Zunächst sei bemerkt, dafs die Gröfse n für alle Planeten dieser Art dasselbe Vorzeichen hat, falls sie ihre Bahnen, wie wirklich der Fall, in

*) Und falls keine rationalen Verhältnisse bei zwei Umlaufszeiten vorkommen.

gleicher Richtung durchlaufen. Setzen wir, was hier ausreichend genau ist,

$$n^2 a^3 = f, \quad \text{also} \quad n = \sqrt{\frac{f}{a^3}},$$

so ist die Quadratwurzel hier wie in analogen Ausdrücken durchgehends positiv zu nehmen.

Die Gröfse

$$M = \left(2\mathfrak{A}_1 - 2a\frac{d\mathfrak{A}_1}{da} - a^2\frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2}\right)$$

bleibt ungeändert, wenn man den störenden und den gestörten Planeten, also a und a_1 vertauscht, wie mit Hilfe von § 11, (19a) und (19c) leicht zu verifizieren ist. Bezeichnet daher $\Delta\varepsilon_1$ die Störung der Exzentrizität, welche der Planet m_1 durch m erfährt, so haben wir

$$\Delta\varepsilon = \frac{m_1\sqrt{f}\,\varepsilon_1}{4\sqrt{a}}\,tM\sin(\Pi - \Pi_1),$$

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{m\sqrt{f}\,\varepsilon}{4\sqrt{a_1}}\,tM\sin(\Pi_1 - \Pi),$$

also

$$m\sqrt{a}\,\varepsilon\Delta\varepsilon + m_1\sqrt{a_1}\,\varepsilon_1\Delta\varepsilon_1 = 0. \tag{37}$$

Sind nun $m_1, m_2, \ldots m_n$ die Massen der n Planeten desselben Systems, welche alle den vorausgeschickten Anforderungen genügen — bei unserem Planetensystem trifft dies zu, wenn die kleineren, an Einflufs unbedeutenden Planeten aufser acht gelassen werden — und werden die Halbachsen und Exzentrizitäten ihrer Bahnen entsprechend bezeichnet, so gelten für die Exzentrizitätsstörungen, welche je zwei aufeinander ausüben, Gleichungen von der Form (37). Verstehen wir jetzt unter

$$\Delta\varepsilon_1, \ \Delta\varepsilon_2, \ \ldots \ \Delta\varepsilon_n$$

die Exzentrizitätsstörungen, welche die betreffenden Planeten durch die Gesamtheit der übrigen erleiden, so ist

$$m_1\sqrt{a_1}\,\varepsilon_1\Delta\varepsilon_1 + m_2\sqrt{a_2}\,\varepsilon_2\Delta\varepsilon_2 + \cdots + m_n\sqrt{a_n}\,\varepsilon_n\Delta\varepsilon_n = 0; \tag{38}$$

denn löst man die Gröfsen $\Delta\varepsilon$ in ihre Einzelbestandteile auf, so zerstören sich je zwei Glieder nach (37).

Die Gleichung (38) kann aber wie eine Differentialgleichung behandelt und integriert werden; wir erhalten

$$m_1\sqrt{a_1}\,\varepsilon_1^2 + m_2\sqrt{a_2}\,\varepsilon_2^2 + \cdots + m_n\sqrt{a_n}\,\varepsilon_n^2 = \text{Const.} \tag{39}$$

M u l t i p l i z i e r t m a n d a s Q u a d r a t d e r E x z e n t r i z i t ä t e i n e s j e d e n P l a n e t e n m i t d e r M a s s e u n d d e r W u r z e l a u s d e r m i t t l e r e n S o n n e n f e r n e , s o i s t d i e S u m m e d i e s e r G r ö f s e n , f ü r d a s g a n z e S y s t e m g e n o m m e n , e i n e K o n s t a n t e .

Da die Gröfsen $\sqrt{a_k}$ bei der Gleichläufigkeit aller Glieder des Systems

positiv sind, so zieht die Vergröſserung eines Teils der Exzentrizitäten die Verkleinerung anderer nach sich. Waren die Exzentrizitäten alle anfänglich sehr klein, so können wenigstens die der gröſseren Planeten nicht über eine gewisse Grenze wachsen. Dieser Satz, der freilich unter Voraussetzungen bewiesen ist, die seinen Wert sehr einschränken, bildet ein neues Argument für die Stabilität des Planetensystems.

17. Es bleibt uns noch übrig, die dritte Gleichung (4), welche die Störung der Breite liefert, umzugestalten und zu integrieren. Wir können in dem zweiten Gliede der rechten Seite, welches schon m_1 enthält, die sehr kleine Groſse z weglassen und dürfen die beiden Planetenbahnen als Kreise mit den Radien a und a_1 ansehen. Wir haben zu setzen

$$r = a,\ r_1 = a_1,\ z = a \sin b = ab,\ z_1 = a_1 \sin b_1 = a_1 \sin J \sin l_1 \\ = a_1 J \sin l_1 = a_1 J \sin \lambda_1$$

und erhalten

$$a \frac{d^2 b}{dt^2} = -\frac{f(1+m)b}{a^2} + \frac{f m_1 a_1 J \sin \lambda_1}{\varrho^3} - \frac{f m_1 J \sin l_1}{a_1^2}$$

oder, wenn $f(1+m) = f = n^2 a^3$ gesetzt wird,

$$\frac{d^2 b}{dt^2} + n^2 b - n^2 m_1 a^2 a_1 J \left[\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{a_1^3}\right] \sin \lambda_1 = 0 \tag{40}$$

oder nach § 11, (13)

$$\frac{d^2 b}{dt^2} + n^2 b - n^2 m_1 a^2 a_1 J \left[\frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' \mathfrak{B}_k \cos k(\lambda - \lambda_1) - a_1^{-3}\right] \sin \lambda_1 = 0 \tag{41}$$

oder nach einer mehrfach angewandten Methode

$$\frac{d^2 b}{dt^2} + n^2 b - \frac{1}{2} n^2 m_1 a^2 a_1 J \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' \mathfrak{B}_k \sin [k(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1] = 0, \tag{42}$$

wenn $\mathfrak{B}_0 - \frac{2}{a_1^3}$ statt $\mathfrak{B}_0$ eingesetzt wird.

Diese Gleichung ist aber nach § 11, (21) sofort zu integrieren; wir erhalten

$$b = -\frac{1}{2} n^2 m_1 a^2 a_1 J \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k' \frac{\mathfrak{B}_k \sin [k(\lambda - \lambda_1) + \lambda_1]}{[k(n - n_1) + n_1]^2 - n^2}, \tag{43}$$

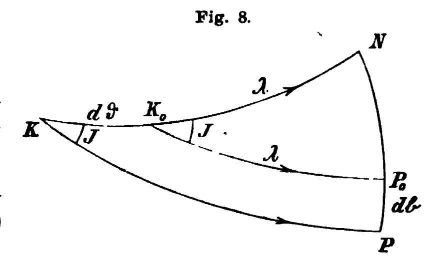
wenn sogleich ein Glied $C \sin (nt + \alpha)$ weggelassen wird, welches durch Verlegung der Knotenlinie und Änderung der Zeit, in welcher diese vom gestörten Planeten passiert wird, überflüssig gemacht werden kann (vgl. Nr. 12).

Einer Verbesserung bedarf wieder das Glied $k = 1$; wir haben es zu ersetzen durch

$$-\frac{1}{4} n m_1 a^2 a_1 J \mathfrak{B}_1 t \cos \lambda. \tag{44}$$

18. Das säkulare Störungsglied kann wieder durch eine geeignete Änderung der Bahnelemente ersetzt werden; wir müssen annehmen, dafs sich die Bahnebene des gestörten Planeten so bewegt, dafs bei gleichbleibender Neigung J der aufsteigende Knoten auf der Bahnebene des störenden Planeten mit konstanter Geschwindigkeit *rückwärts* rückt. Stellen nämlich*) in Fig. 8 KK_0N die Ebene des störenden Planeten, K_0P_0 und KP die Ebenen des gestörten Planeten im Anfangszustande und nach der Zeit t dar, machen wir NP_0P auf K_0P_0 und KP senkrecht (was wegen der Kleinheit des Lagenunterschiedes der beiden letzten Ebenen näherungsweise möglich ist) und setzen wir

Fig. 8.



$$K_0N = K_0P_0 = \lambda, \quad KK_0 = d\vartheta, \quad P_0P = db,$$

so ist

$$db = \sin(\lambda + d\vartheta)\sin J - \sin\lambda \sin J = J\cos\lambda d\vartheta.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (44), so erkennen wir, dafs dieses Störungsglied weggelassen werden darf, wenn man den Knotenpunkt auf der Ebene des störenden Planeten bei ungeänderter gegenseitiger Neigung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\text{(44b)} \qquad \frac{1}{4}\, n m_1 a^2 a_1 \mathfrak{B}_1$$

zurückgehen läfst.

Die Neigung J dürfen wir als unveränderlich annehmen.

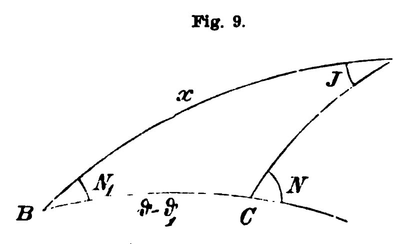
19. Es ist von Interesse, die Lagenänderung der Ebene des gestörten Planeten in Bezug auf eine feste, gegen die Ebene der in Betracht kommenden Planetenbahnen nur sehr wenig geneigte Ebene zu untersuchen. Man kann als solche — ohne dafs dies jedoch notwendig wäre — die Laplace'sche unveränderliche Ebene wählen.

Seien N und N_1 die Neigungen der gestörten und der störenden Bahn gegen die feste Ebene, J die unveränderliche Neigung der beiden Bahnebenen gegeneinander, ϑ und ϑ_1 die in der festen Ebene von einer bestimmten Anfangsrichtung aus gerechneten Längen der aufsteigenden Knoten beider Bahnen in Bezug auf die feste Ebene. Wir denken uns wieder der Anschaulichkeit halber (Fig. 9) an Stelle der durch die drei Ebenen gebildeten Ecke das sphärische Dreieck ABC gesetzt. BC stelle die feste Ebene, AB die Ebene des störenden, AC die des gestörten Planeten dar; die Seite AB bezeichnen wir mit x. Alle Gröfsen werden in der

*) Man denke sich zu diesem Zwecke das Ganze auf eine Kugel projiziert, deren Mittelpunkt mit demjenigen der Sonne zusammenfällt. — J^2 wird vernachlässigt, also $\cos J = 1$ gesetzt.

Richtung der Planetenbewegung, die wir bei allen in Betracht kommenden Gliedern des Sonnensystems als wesentlich gleichsinnig annehmen, als positiv gerechnet; der Neigungswinkel zwischen zwei Bogen (Ebenen) ist der Winkel zwischen ihren positiv gerichteten Teilen. Zwischen den angegebenen Größen bestehen für zwei Zeitpunkte, die um t auseinander liegen — es möge unterdessen nur eine sehr kleine Änderung der Elemente stattgefunden haben — die folgenden Relationen:

Fig. 9.



$$\cos N = \cos N_1 \cos J - \sin N_1 \sin J \cos x,$$

$$\cos (N + \varDelta N) = \cos N_1 \cos J - \sin N_1 \sin J \cos (x + \varDelta x)$$

oder

$$\cos N - \sin N \varDelta N = \cos N_1 \cos J - \sin J [\cos x - \sin x \varDelta x],$$

aus denen folgt

$$\sin N \varDelta N = - \sin N_1 \sin J \sin x \varDelta x$$

oder, da

$$\sin x = \frac{\sin N \sin (\vartheta - \vartheta_1)}{\sin J} \tag{45}$$

ist,

$$\varDelta N = - \sin N_1 \sin (\vartheta - \vartheta_1) \varDelta x = - N_1 \sin (\vartheta - \vartheta_1) \varDelta x, \tag{45a}$$

worin $\varDelta x$ das Stück bezeichnet, um welches die Knotenlinie der beiden Planetenbahnen sich auf der störenden Bahn während der Zeit t verschoben hat.

Weiter folgt aus (45)

$$\sin J \cos x \varDelta x = \cos N \sin (\vartheta - \vartheta_1) \varDelta N + \sin N \cos (\vartheta - \vartheta_1) \varDelta \vartheta$$

oder wegen (45a)

$$\sin N \cos (\vartheta - \vartheta_1) \varDelta \vartheta = [\sin J \cos x + \cos N \sin N_1 \sin^2 (\vartheta - \vartheta_1)] \varDelta x$$

Durch Berücksichtigung der Relationen

$$\cos x = \frac{\cos J \cos N_1 - \cos N}{\sin J \sin N_1}$$

und

$$\cos J = \cos N \cos N_1 + \sin N \sin N_1 \cos (\vartheta - \vartheta_1)$$

folgt hieraus

$$\sin N \varDelta \vartheta = - [\cos (\vartheta - \vartheta_1) \cos N \sin N_1 - \sin N \cos N_1] \varDelta x$$

oder, wenn

$$\sin N = N, \quad \cos N = 1 \quad \text{u. s. w.}$$

gesetzt wird,

$$\varDelta \vartheta = \left[1 - \cos (\vartheta - \vartheta_1) \frac{N_1}{N}\right] \varDelta x. \tag{46}$$

Setzen wir gemäfs (44b)

$$\Delta x = -\frac{1}{4} m_1 n a^2 a_1 \mathfrak{B}_1 ,$$

so haben wir nach (45a) für die Änderung der Neigung gegen die feste Ebene

$$\Delta N = \frac{1}{4} m_1 n a^2 a_1 \mathfrak{B}_1 N_1 \sin(\vartheta - \vartheta_1) \,.\, t \tag{47}$$

und nach (46) für die Bewegung des Knotens auf derselben

$$\Delta \vartheta = \frac{1}{4} m_1 n a^2 a_1 \mathfrak{B}_1 \left[\cos(\vartheta - \vartheta_1) \frac{N_1}{N} - 1\right] t . \tag{48}$$

Wann die Neigung der Ebene der gestörten Bahn gegen die feste Ebene zu-, wann abnimmt, wann die Knotenlinie auf ihr vor-, wann zurückrückt, ist aus (47) und (48) unmittelbar zu erkennen.

20. Für (47) können wir schreiben, da $f = n^2 a^3$ ist,

$$\Delta N = \frac{1}{4} m_1 a_1 \sqrt{a} \sqrt{f} \mathfrak{B}_1 N_1 \sin(\vartheta - \vartheta_1) . t ;$$

bilden wir dieselbe Gleichung für ΔN_1 und addieren nach Multiplikation mit $m \sqrt{a} N$ und $m_1 \sqrt{a_1} N_1$, so erhalten wir:

$$m \sqrt{a} N \Delta N + m_1 \sqrt{a_1} N_1 \Delta N_1 = 0 . \tag{49}$$

Bezeichnen wir jetzt mit N_1, N_2, N_n . . . die (kleinen) Neigungen der Bahnebenen der n Glieder eines Planetensystems gegen eine feste Ebene, so folgt durch Summation einer Reihe von Gleichungen der Form (49)

$$m_1 \sqrt{a_1} N_1 \Delta N_1 + m_2 \sqrt{a_2} N_2 \Delta N_2 + \cdots + m_n \sqrt{a_n} N_n \Delta N_n = 0 , \tag{50}$$

aus der durch Integration die Laplace'sche Relation

$$m_1 \sqrt{a_1} N_1^2 + m_2 \sqrt{a_2} N_2^2 + \cdots + m_n \sqrt{a_n} N_n^2 = \text{Const.} \tag{51}$$

hervorgeht*).

21. Denkt man sich die Erde fest, Sonne und Mond aber sich um dieselbe bewegend, so kann man die Störungen, welche die elliptische Mondbahn durch die Attraktion der Sonne erleidet, in ähnlicher Weise berechnen, wie die Störungen der Planeten. Der wesentliche Unterschied gegen dieses Problem besteht darin, dafs die Masse der Sonne sehr grofs gegen die Erdmasse und nur wegen der bedeutenden Entfernung von verhältnismäfsig geringem Einflufs ist.

Begnügt man sich mit einer ersten Näherung, so ist das Problem einfacher zu behandeln als dasjenige der Planetenstörungen; aus den Resultaten für die letzteren kann man übrigens, wie wir sogleich thun werden, durch Spezialisierung jene Näherungsformeln herleiten. Wenn besonders eine derselben sich von der Wirklichkeit ganz bedeutend entfernt, so beruht dies in dem von uns schon bemerkten Umstande, dafs anscheinend zu vernachlässigende Störungsglieder durch Kleinwerden des Nenners einen unverhältnismäfsig grofsen Wert erlangen. Die genaue

*) Laplace hat in der Gleichung die Gröfsen $\text{tg}^2 N_1$ u. s. w., die wir bei der Kleinheit der Winkel durch N_1^2 u. s. w. ersetzen.

Mondrechnung, bei der u. a. auch Potenzen der Exzentrizität und Neigung, ferner die Störungen durch die Planeten und die Abplattung der Erde in Betracht zu ziehen sind, gehört zu den kompliziertesten Aufgaben der Astromechanik und mufs hier übergangen werden.

Jene erste Näherung der Mondrechnung erhalten wir einfach dadurch, dafs wir zu der Attraktion, welche der Mond durch die Erde erleidet, die Differenz der Attraktionen hinzufügen, welche von der Sonne auf Mond und Erde ausgeübt werden. Setzt man hier die Erdmasse gleich 1, die Mondmasse gleich m, die Sonnenmasse gleich m_1 und wählt im übrigen die Bezeichnung analog wie früher*), so gelangt man auch hier zu den Gleichungen (4), aus welchen (10) und (40) abgeleitet werden. Die weitere Entwicklung dieser Gleichungen geschieht nun in der Weise, dafs aufser den Potenzen von ε und J auch das Produkt von m_1 mit einer höheren als der dritten Potenz von $\frac{a}{a_1}$ vernachlässigt wird.

Die wirkliche Durchführung der Rechnung ist bei diesen Vernachlässigungen nicht schwierig und kann als Übung empfohlen werden; wir begnügen uns damit, die Formeln für die planetarischen Störungen dadurch zu vereinfachen, dafs wir in $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$ u. s. w. alle Potenzen von $\frac{a}{a_1}$ aufser der ersten und eventuell der zweiten unterdrücken. Beachtet man die Bildung der C_k in § 11, so erhellt, dafs man alle $\mathfrak{A}_k$ vernachlässigen darf mit Ausnahme von

$$(52) \qquad \mathfrak{A}_0 = \frac{2}{a_1}, \quad \mathfrak{A}_1 = \frac{1}{a_1} \cdot \frac{a}{a_1}, \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{3}{4a_1} \left(\frac{a}{a_1}\right)^2,$$

ein Resultat, das freilich infolge der Werte der Koeffizienten der Wirklichkeit nicht ganz entspricht. Aus § 11, (16) geht hervor, dafs auch sämtliche $\mathfrak{B}_k$ mit Ausnahme von

$$(53) \qquad \mathfrak{B}_0 = \frac{2a_1}{(a_1^2 - a^2)^2} = \frac{2}{a_1^3}, \quad \mathfrak{B}_1 = \frac{3}{a_1^3} \cdot \frac{a}{a_1}$$

vernachlässigt werden dürfen.

Nach § 11, (18), (19), (19b) u. s. w. findet man noch

$$(54) \begin{cases} \frac{d\mathfrak{A}_0}{da} = \frac{1}{a_1^2} \cdot \frac{a}{a_1}, \quad \frac{d\mathfrak{A}_1}{da} = \frac{1}{a_1^2}, \quad \frac{d\mathfrak{A}_2}{da} = \frac{3}{2a_1^2} \cdot \frac{a}{a_1}, \\ \frac{d\mathfrak{A}_0}{da_1} = -\frac{2}{a_1^2}, \quad \frac{d\mathfrak{A}_1}{da_1} = -\frac{2}{a_1^2} \cdot \frac{a}{a_1}, \\ \frac{d^2\mathfrak{A}_0}{da^2} = \frac{1}{a_1^3}, \quad \frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da^2} = \frac{9}{4a_1^3} \cdot \frac{a}{a_1}, \quad \frac{d^2\mathfrak{A}_2}{da^2} = \frac{3}{2a_1^3}, \quad \frac{d^2\mathfrak{A}_3}{da^2} = \frac{15}{4a_1^3} \cdot \frac{a}{a_1}, \text{**)} \\ \frac{d^2\mathfrak{A}_0}{da\,da_1} = -\frac{3}{a_1^3} \cdot \frac{a}{a_1}, \quad \frac{d^2\mathfrak{A}_1}{da\,da_1} = -\frac{2}{a_1^3}, \quad \frac{d^2\mathfrak{A}_2}{da\,da_1} = -\frac{9}{2a_1^3} \cdot \frac{a}{a_1}, \end{cases}$$

während die übrigen Koeffizienten nicht beachtet zu werden brauchen.

*) Der Erdmittelpunkt bildet den Nullpunkt des Koordinatensystems.

**) Diese Werte findet man am einfachsten durch direktes Bilden der ersten Glieder in § 11, (2) und Differentiation.

In den Reihen Σ' ist übrigens nach Früherem statt $\mathfrak{A}_1$ und $\frac{d\mathfrak{A}_1}{da}$ resp. 0 zu setzen.

22. Nach diesen Vorbereitungen können wir unmittelbar die ersten Näherungswerte der Mondstörungen aus den Gleichungen (25), (26), (29), (30), (43) u. s. w. ableiten. Zur numerischen Berechnung mögen folgende Angaben dienen:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{1}{79{,}667} = 0{,}012552\,, \\
m_1 &= 322\,800\,, \\
a &= 384\,415{,}5 \text{ km}, \\
a_1 &= 148\,670\,000 \text{ km}, \\
\frac{a}{a_1} &= 0{,}002586\,, \\
\varepsilon &= 0{,}054908\,, \\
\varepsilon_1 &= 0{,}016770\,, \\
J &= 5^0 8' 39'',96\,.
\end{aligned}
$$

Mittlere siderische Umlaufszeit*) des Mondes: $T = 27{,}32166\, t$,

mittlere siderische Umlaufszeit der Erde: $T_1 = 365{,}25636\, t$,

woraus

$$q = \frac{n - n_1}{n} = \frac{T_1 - T}{T_1} = 0{,}9252$$

folgt.

Die Störungen der Länge und Breite werden in Bogenteilen mit dem Radius 1 erhalten und müssen in das gewöhnliche Winkelmaſs umgesetzt werden.

Zunächst erhalten wir drei Störungen des Radiusvektor — der häufig durch die Parallaxe ersetzt wird — und der Länge, die resp. von den Exzentrizitäten unabhängig, von ε oder ε_1 abhängig sind; dieselben heiſsen die Variation, die Evektion und die jährliche Gleichung**).

Aus (27) und (27a) erhalten wir als Resultate der Variation:

$$
(55) \qquad \begin{cases} \Delta a = -\dfrac{3am_1(q+1)}{2q(4q^2-1)}\left(\dfrac{a}{a_1}\right)^3 \cos 2(\lambda - \lambda_1), \\[2ex] \Delta \lambda = -\dfrac{3m_1(4q^2+4q+3)}{8q^2(4q^2-1)}\left(\dfrac{a}{a_1}\right)^3 \sin 2(\lambda - \lambda_1) \end{cases}
$$

oder

$$
(56) \qquad \begin{cases} \Delta a = -\,0{,}00718a \cos 2\,(\lambda - \lambda_1), \\ \Delta \lambda = 35',115 \sin 2\,(\lambda - \lambda_1)\,. \end{cases}
$$

---

*) In der Astronomie bezeichnet man die wirkliche Umlaufszeit eines Himmelskörpers als die siderische.

**) Die Mittelpunktsgleichung, welche öfters bei den Störungen der Mondbahn mit aufgeführt wird, gehört nicht hierher; sie ist die nach der Keplerschen Gleichung an der gleichmäſsigen Kreisbewegung anzubringende Korrektur.

Diese Werte sind von denjenigen, welche die ausführlichere Rechnung liefert, nicht sehr verschieden. Die genauere Formel für die Störung der Länge lautet, von höheren Gliedern abgesehen,

$$\Delta\lambda = -2' \sin(\lambda - \lambda_1) + 39',5 \sin 2(\lambda - \lambda_1)\,. \tag{57}$$

Die Ausdrücke (56) haben den halben synodischen Monat*) zur Periode. Es rührt dies daher, dafs zur Zeit des Neumondes und des Vollmondes (der Syzygien) die Schwächung der Erdattraktion durch die Anziehung der Sonne nahezu die gleiche ist; der kleine Unterschied veranlafst das erste Glied in (57), die sog. parallaktische Gleichung. Wir entnehmen (56) das Resultat:

Der Radiusvektor der Mondbahn wird am stärksten verkürzt zur Zeit der Syzygien (Voll- und Neumond), am stärksten vergröfsert zur Zeit der Quadraturen (erstes und letztes Viertel); zu diesen vier Zeitpunkten verschwindet die Variation der Länge. In den vier Zeitpunkten, welche in der Mitte zwischen je zwei der vier ebengenannten liegen, erhält der Radiusvektor seine normale Länge, während die Längendifferenz ihr Maximum von 35′, genauer 39′,5 erreicht. Zu beachten ist, dafs der Mond gerade dann der Erde am nächsten kommt, wenn deren Anziehung am meisten geschwächt erscheint.

In derselben Weise berechnet man aus (29) und (30) die Evektion und die jährliche Gleichung. Die Ausdrücke werden etwas umständlich, weshalb wir uns auf Angabe der (verbesserten) Zahlenwerte der Hauptglieder beschränken. Für die Evektion findet man die auffallend grofsen Werte — das Glied mit $k = -2$ erhält einen kleinen Nenner und soll allein in Betracht gezogen werden —

$$\begin{cases} \Delta r_e = -0{,}00961 \cos\left[2(\lambda - \lambda_1) - \lambda + \Pi\right], \\ \Delta l_e = 76',5 \sin\left[2(\lambda - \lambda_1) - \lambda + \Pi\right]. \end{cases} \tag{58}$$

Das Argument der periodischen Funktionen ist hier die Differenz zwischen dem doppelten mittleren Winkelabstande von Mond und Sonne und der mittleren Anomalie des ersteren. Die Periode der Evektion beträgt:

$$\frac{2\pi}{n - 2n_1} = \frac{T T_1}{T_1 - 2T} = 31{,}7 \text{ Tage},$$

also etwas mehr als ein synodischer Monat. Zur Zeit der Syzygien reduziert sich das Argument auf die mittlere Anomalie, und die Evektion vermischt sich dann mit der Mittelpunktsgleichung.

Für die jährliche Gleichung, die Störung, welche von ε_1 abhängt, kommt besonders das Glied $k = -1$ in (30) in Betracht; man erhält Werte, welche der genaueren Rechnung nach in

*) Der synodische Monat ist die Zeit, welche von einem Neumond bis zum andern verstreicht; er beträgt $29^t\ 12^h\ 44^m\ 2{,}9^s$.

$$(59)\qquad \begin{cases} \Delta r_{\varepsilon_1} = a \,.\, 0{,}000085 \cos(\lambda_1 - \Pi_1), \\ \Delta l_{\varepsilon_1} = -\, 11',22 \cos(\lambda_1 - \Pi_1) \end{cases}$$

zu berichtigen sind. Von dem Werte Δr_{ε_1}, welcher überhaupt sehr geringfügig ist, wurde nicht einmal das gröfste, sondern nur das am einfachsten zu interpretierende Glied angegeben.

Das Argument der periodischen Funktionen in (59) ist die mittlere Anomalie der Sonne, die Periode der Störung also ein (anomalistisches*) Jahr.

Wenn die Erde sich am weitesten von der Sonne entfernt, kommt ihr der Mond am nächsten und umgekehrt. Dies geht schon unmittelbar daraus hervor, dafs mit der Entfernung der Erde von der Sonne die schwächende Wirkung der letzteren auf die Attraktion der Erde abnimmt.

Als periodische Störung der Breite des Mondes, die man wegen der Kleinheit des Neigungswinkels auf die Ekliptik beziehen kann, erhält man nach (43) unter Anbringung von Verbesserungen (Glied $k = -1$):

$$(60)\qquad \Delta b = 8',6 \sin(\lambda - 2\lambda_1),$$

wo die Längen von der Knotenlinie an gerechnet sind.

23. Aus (36) folgt für die Änderung des Perigäums (der Erdnähe) des Mondes der beträchtliche Wert:

$$(61)\qquad \Delta \Pi = \frac{3 m_1 n t}{4}\left(\frac{a}{a_1}\right)^3,$$

oder für das Jahr ein Vorrücken der Apsidenlinie um

$$20^0 9'.$$

Dieses Resultat stimmt mit der Beobachtung durchaus nicht; die letztere liefert $40^0 40'$. Der auffallende Unterschied liefs Clairaut zeitweilig vermuten, dafs das Newton'sche Attraktionsgesetz nicht in voller Strenge gelte; bei einer eingehenderen Berechnung fand er indessen Beobachtung und Theorie in Einklang. Gerade hier macht sich der Einflufs scheinbar unbedeutender Glieder in der stärksten Weise bemerklich.

Aus (35) folgt für $\Delta \varepsilon$ ein sehr geringer Wert; auch ist diese Störung wegen der raschen Änderung von Π als periodisch zu betrachten.

Aus (44) folgt für das Zurückgehen der Knotenlinie die Geschwindigkeit:

$$(62)\qquad \frac{3 m_1 n}{4}\left(\frac{a}{a_1}\right)^3,$$

woraus man ein jährliches Zurückgehen (über 20^0) dieser Linie berechnet, welches mit dem wahren Werte $19^0 20'$ nahe übereinstimmt.

*) Das anomalistische Jahr ist die Zeit, welche zwischen zwei Sonnennähen der Erde verstreicht; es beträgt im Mittel $365^t\ 6^h\ 13^m\ 48{,}5^s$.

§ 13.

Die Planetenbewegung im widerstehenden Mittel.

1. Der Weltraum ist, wie schon die Fortpflanzung des Lichtes durch ihn lehrt, nicht völlig leer, sondern mit einem äufserst wenig dichten Stoffe ausgefüllt, den wir bei der absoluten Unbekanntheit seiner Natur als Weltäther bezeichnen. Der Äther mufs auf die Planetenbewegung einen hemmenden Einflufs ausüben; wir wollen annehmen, dafs dieser bei sonst gleichen Verhältnissen dem Quadrate der Geschwindigkeit des Himmelskörpers direkt proportional sei, da sich diese Annahme bei der Bewegung in der Luft als ziemlich zutreffend erweist. Wir können das Problem als ein planimetrisches behandeln, falls wir den Planeten nur von der Sonne angezogen denken; denn die seitliche Ablenkung, welche ein Himmelskörper von unsymmetrischer Gestalt durch den Ätherwiderstand erfahren kann, ist jedenfalls äufserst gering. Konnte doch überhaupt der gesamte Widerstand noch nicht durch Beobachtungen bei den Planeten nachgewiesen werden; nur an Kometen, insbesondere dem Encke'schen, wurde eine Verkürzung der Umlaufszeit konstatiert, welche vielleicht durch diesen Widerstand zu erklären ist (Encke).

Es ist bis jetzt nicht gelungen, die Differentialgleichungen der Planetenbewegung im widerstehenden Mittel allgemein zu integrieren. Nur wenn der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit umgekehrt proportional wäre, liefse sich die Integration ausführen, doch ist diese Annahme mit den Thatsachen durchaus nicht im Einklang. Die Rechnungen, welche hierüber angestellt wurden, findet man bei Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, pag. 125 ff.; sie sollen wegen ihrer Resultatlosigkeit hier nicht reproduziert werden. Vielmehr wollen wir nach dem Vorgange von Laplace, Lagrange, Poisson u. A. die Aufgabe als ein Störungsproblem unter der Annahme, dafs der Widerstand sehr klein sei, behandeln.

2. Die Differentialgleichungen unseres Problems lauten:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{f(1+m)x}{r^3} - kv\dfrac{dx}{dt}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{f(1+m)y}{r^3} - kv\dfrac{dy}{dt}, \end{cases}
$$

worin k eine sehr kleine Gröfse ist, welche von der Dichtigkeit des Äthers, der Gestalt und Gröfse der Oberfläche sowie der Masse des Planeten abhängt.

Wir setzen $x = r\cos l$, $y = r\sin l$, und finden nach Muster von § 12, (7), (8):

$$
(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{dl}{dt}\right)^2 = -\dfrac{f(1+m)}{r^2} - kv\dfrac{dr}{dt}, \\[2ex] \dfrac{d^2l}{dt^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{dr}{dt}\dfrac{dl}{dt} = -kv\dfrac{dl}{dt}. \end{cases}
$$

3. Wir wollen die Untersuchung nur für den Fall durchführen, dafs die ungestörte Bewegung des Planeten eine kreisförmige ist; die Exzen-

trizität und die Perihellänge erleiden ohnehin nur periodische Störungen. Die genauere Durchführung findet man bei Lagrange, Mécanique analytique (2. Éd.), Poisson, Traité de mécanique.

Wir setzen

$$(2a)\qquad r = a + \Delta a, \quad l = (n + \Delta n)t + l',$$

worin Δa und Δn die Störungen des Radiusvektor und der Geschwindigkeit bedeuten. a und n sind der Radiusvektor und die Winkelgeschwindigkeit des ungestörten Planeten; sie sind von der Zeit unabhängig, während Δa und Δn von ihr abhängen. Aus (2) wird hiernach, wenn noch $f(1 + m) = a^3 n^3$, $v = (a + \Delta a)(n + \Delta n)$ gesetzt wird und die zweiten Dimensionen der Gröfsen, welche von der Gröfsenordnung k sind, vernachlässigt werden*):

$$(3)\qquad \frac{d^2 \Delta a}{dt^2} = 3n^2 \Delta a + 2na\Delta n,$$

$$(4)\qquad \frac{d\Delta n}{dt} = -\frac{2n}{a}\frac{d\Delta a}{dt} - kan^2.$$

Die Integration von (4) liefert

$$(5)\qquad \Delta n = -\frac{2n}{a}\Delta a - kan^2 t,$$

wo keine Konstante zuzufügen ist, wenn angenommen wird, dafs für $t = 0$ die Bewegung mit der ungestörten zusammenfällt. Durch Einsetzung des Wertes für Δn in (3) erhalten wir:

$$(6)\qquad \frac{d^2 \Delta a}{dt^2} = -n^2 \Delta a - 2ka^2 n^3 t.$$

Nun ist aber, wie man leicht verifizieren kann, das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$(7)\qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + n^2 y + ax = 0$$

der Ausdruck

$$(8)\qquad y = -\frac{ax}{n^2} + c \sin(nx + \alpha),$$

falls n von Null verschieden ist. Daher giebt (6) integriert:

$$(9)\qquad \Delta a = -2ka^2 nt + c\sin(nt + \alpha).$$

Soll für $t = 0$ die gestörte Bahn der Gröfse und Richtung nach in die ungestörte übergehen, soll also für $t = 0$

$$\Delta a = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\Delta a}{dt} = 0$$

sein, so wird

$$\alpha = 0, \quad c = 2ka^2,$$

das periodische Glied fällt also nicht weg**). Nimmt man dagegen an

*) Es ist $\frac{d(a + \Delta a)}{dt} = \frac{d\Delta a}{dt}$, $\frac{dl}{dt} = n + \Delta n$, $\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{d\Delta n}{dt}$ u. s. w.

**) Das periodische Glied kann weggelassen werden, wenn man die ursprüngliche kreisförmige Bahn durch eine elliptische ersetzt (vgl. § 12, 12).

— was der Wirklichkeit am besten entspricht —, dafs $\frac{d\Delta a}{dt}$ einen konstanten Wert erlangt habe, so ist einfach

$$\Delta a = -2ka^2nt \tag{10}$$

zu setzen. Im letzteren Falle folgt aus (5)

$$\Delta n = 3kan^2t\,. \tag{11}$$

Die Entfernung des Planeten von der Sonne nimmt also proportional mit der Zeit ab, während sich die Winkelgeschwindigkeit ebenso vergröfsert.

Die Änderung der (linearen) Geschwindigkeit wird durch

$$(a + \Delta a)(n + \Delta n) - an = a\Delta n + n\Delta a = kan^2t \tag{12}$$

dargestellt. Wir haben also die anscheinend paradoxe Thatsache, dafs durch den Ätherwiderstand die Geschwindigkeit des Planeten fortwährend zunimmt.

Zweiter Abschnitt.

Die unfreie Bewegung materieller Punkte.

§ 14.

Einführung der unfreien Bewegung.

1. Es wird nicht selten die Aufgabe gestellt, die Bewegung materieller Punkte zu entwickeln, welche nicht nur der Einwirkung gewisser Kräfte unterliegen, sondern über deren Bahnen noch anderweite Vorschriften gegeben werden. So kann z. B. verlangt werden, dafs ein materieller Punkt, welcher der Schwerkraft unterliegt, immer in derselben Ebene verbleibe; dies giebt das bekannte Beispiel des Falls auf der schiefen Ebene. Wird ein schwerer Körper, der als materieller Punkt gedacht werden möge, an einem unausdehnbaren und unbiegsamen, als massenlos anzunehmenden Faden aufgehängt, so wird hierdurch der Punkt genötigt, sich auf einer Kugelfläche zu bewegen (Pendel). Allgemeiner kann man einem durch Kräfte bewegten Punkte vorschreiben, auf einer Fläche $f(x, y, z) = 0$ zu bleiben; in derselben Weise kann man ihm auch eine beliebige Kurve $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$ als Bahn vorzeichnen. Sind zwei materielle Punkte x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2 vorhanden, so kann man sich dieselben durch einen starren, doch massenlosen Stab von der Länge r verbunden denken, so dafs die Bewegung fortwährend der Gleichung

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2$$

genügen mufs. Dabei kann dann noch der eine der Körper genötigt werden, auf einer bestimmten Fläche zu bleiben u. s. w.

Auch von der Zeit können die Bedingungsgleichungen abhängig sein. So kann man beispielsweise die Bewegung des Fadenpendels untersuchen, falls der Aufhängungspunkt nach einem bestimmten Gesetze bewegt wird. Nur zweierlei möge in betreff der Bedingungen festgehalten werden:

a) sie sollen durch Gleichungen, nicht durch Ungleichheiten gegeben sein;

b) sie sollen aufser der Zeit t nur die Koordinaten der bewegten Punkte selbst, nicht aber Differentialquotienten derselben (also keine Geschwindigkeiten) enthalten.

Bedingungen wie die, dafs ein materieller Punkt in seiner Bewegung auf den inneren Hohlraum einer Kugel angewiesen ist, sollen also vorläufig nicht zur Behandlung kommen.

2. In welcher Weise sind nun diese Bedingungen in die Bewegungsgleichungen einzuführen? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir uns die physikalische Natur solcher Aufgaben klar machen. Bewegt sich etwa ein materieller Punkt auf der Oberfläche eines festen Körpers, so ist der letztere bei dieser Bewegung keineswegs so unthätig, wie man nach dem oberflächlichen Augenschein annehmen könnte. Kein fester Körper ist ohne Elastizität; der Punkt wird daher bei seiner Bewegung die Körperoberfläche etwas zusammendrücken, wogegen der Körper durch einen Gegendruck reagiert. Es wirken mithin auf den materiellen Punkt zahllose, höchst verwickelte und im Einzelnen nicht zu verfolgende Kräfte ein, deren Gesamtresultat, soweit es für die Bewegung des materiellen Punktes in Betracht kommt, dahin geht, dafs der letztere ungefähr an der nur wenig veränderlichen Oberfläche des Körpers gehalten wird. Ähnlich ist es bei dem Fadenpendel; die Molekularkräfte, welche in dem Faden thätig sind, verhindern eine merkliche Ausdehnung desselben und üben auf den materiellen Punkt des Pendels Kraftwirkungen aus, welche ihn nötigen, sich nahezu auf der Oberfläche einer Kugel zu bewegen. Ähnliches gilt für alle übrigen Fälle.

Diese Betrachtungen führen uns zu einem Resultate, welches nur zu oft unbeachtet gelassen wird:

Die Bewegung materieller Punkte nach gegebenen Bedingungsgleichungen läfst sich nicht a priori durch rein mathematische Betrachtungen ermitteln; auch läfst sich kein allgemeingiltiges physikalisches Gesetz für eine solche Bewegung aussprechen von der Art, wie die in § 2 behandelten sind. Die Bewegung nach vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen ist kein einfacher Vorgang; sie ist stets die Folge von zahllosen, verwickelten Kräften, welche nur näherungsweise in Rechnung gezogen werden.

3. Um der praktischen Lösung des Problems näher zu treten, denken wir uns zunächst als einfachstes Beispiel eine Ebene vorgelegt, auf welcher sich ein materieller Punkt infolge irgend welcher Kräfte bewegen soll.

Wir können uns die Geschwindigkeit des Punktes und die Resultante der wirkenden Kräfte in zwei Komponenten zerlegt denken, von denen die eine auf der Ebene senkrecht steht, die andere in die Ebene selbst fällt. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs die erste Komponente durch die von der festen Ebene ausgeübten Kräfte zerstört werden mufs, da sonst der Punkt die Ebene voraussetzungswidrig verlassen müfste. Aber was wird aus der anderen Komponente? Hierüber sagt die Fassung des Problems gar nichts. Die Komponente kann völlig unverändert bleiben, ohne dafs die Bedingung einen Widerspruch erfährt; aber eben-

sowohl ist es denkbar, dafs die Kräfte, welche von der Ebene ausgehen, auch diese Komponente beeinflussen. Befragen wir die Erfahrung, so giebt sie keine einheitliche Antwort. Die Komponente wird wohl immer beeinflufst, und zwar stets in der Art, dafs die Geschwindigkeit eine Verminderung erfährt, aber dieser Einflufs ist je nach der physikalischen Natur der Unterlage*) ein sehr verschiedener, mitunter ein sehr geringer. Da sich aus der gestellten Bedingung keine Beeinflussung dieser Komponente als notwendig ergiebt und diese Beeinflussung, wenn sie vorhanden ist, von Faktoren abhängt, welche sich aus dieser Bedingung selbst nicht ableiten lassen, so nimmt man an, dafs die zweite Komponente überhaupt durch die Bedingung keine Änderung erleidet. Verlangt das Problem, dafs die wirklich vorhandene Beeinflussung nicht vernachlässigt wird, so schreibt man sie einer besonderen Kraft zu, die man in den meisten Fällen als Reibung bezeichnet, und bringt sie besonders in Rechnung. Die folgenden Aufgaben lassen die Reibung aufser acht.

4. Soll sich der materielle Punkt auf einer beliebigen, nach allen Richtungen hin stetig gekrümmten Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

unter dem Einflufs einer Kraft bewegen, deren Komponenten nach den Koordinatenachsen die Beschleunigungen X, Y, Z verursachen würden, wenn die Bedingungsgleichung nicht zu befriedigen wäre, so denken wir uns die Kraft in zwei andere Komponenten zerlegt, von denen die eine in die Normale der Fläche im Punkte x, y, z, die andere in die zugehörige Tangentialebene fällt. Die erste Komponente mufs annulliert werden, während die zweite, soweit man die Reibung aufser acht läfst, unverändert bleibt. Man kann sich die Zerstörung der ersten Komponente dadurch hervorgebracht denken, dafs man in der Normale eine ihr gleiche, entgegengesetzt gerichtete Kraft anbringt. Doch ist noch die Geschwindigkeit zu berücksichtigen, welche der bewegte Punkt besitzt.

Wenn die Bewegung nicht in einer Geraden vor sich geht, so ist eine Zentripetalbeschleunigung**) (§ 1, 6) in der Richtung des ersten Krümmungshalbmessers der Bahnkurve — also im allgemeinen nicht der Flächennormale — vorhanden. Diese Zentralbeschleunigung kann

---

*) Auch nach der Natur des bewegten Körpers, der ja nie ein materieller Punkt ist.

**) Bewegt sich ein Punkt auf einer Kurve, so erhält er infolge dieser Bewegung jene Zentripetalbeschleunigung, die durch eine entsprechende Kraftkomponente erzeugt gedacht werden mufs. Umgekehrt kann man sich aber auch vorstellen, dafs der bewegte Punkt infolge der Krümmung der Bahn und seiner Geschwindigkeit das Bestreben habe, die Bahn in der umgekehrten Richtung zu verlassen (um in der Richtung der Tangente weiter zu gehen). Man spricht daher von einer Zentrifugalkraft, welche auf den Punkt infolge seiner Bewegung einwirkt und die durch eine entgegengesetzt gleiche Zentripetalkraft aufgehoben werden mufs, wenn der Punkt die vorgeschriebene Bahn nicht verlassen soll.

man ebenfalls in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine zur Fläche normal steht, während die andere in sie fällt. Die letztere wird nur durch die wirkende Kraft hervorgerufen, während die erstere, nachdem die Normalkraftkomponente durch eine fingierte Gegenkraft annulliert wurde, zur Annahme einer zweiten Normalkraft führt, welche jener Komponente der Zentripetalbeschleunigung, multipliziert mit der Masse des bewegten materiellen Punktes, gleichzusetzen ist. Die beiden angenommenen Normalkräfte können dann zu einer einzigen vereinigt werden.

Nehmen wir Alles zusammen, so können wir sagen:

Die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Fläche kann als freie Bewegung dargestellt werden, wenn man den Kräften eine neue von geeigneter Gröfse zusetzt, welche in die Normale der Fläche in demjenigen Punkte fällt, an welchem sich der bewegte Punkt gerade befindet. Auch wenn die Fläche mit der Zeit veränderlich ist, wenn also ihre Gleichung $f(x, y, z, t) = 0$ lautet, gilt das Gleiche; in der Richtung der jeweiligen Normale ist eine Zusatzkraft anzubringen.

5. Die Bestimmung der zuzusetzenden Kraft kann folgendermafsen geschehen. Da sie in die Normale n der Fläche im Punkte x, y, z fällt, die Richtungskosinus der Normalen aber bekanntlich

$$(1)\qquad \begin{cases} \cos(n, x) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\[2ex] \cos(n, y) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\[2ex] \cos(n, z) = \dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \end{cases}$$

sind, so verhalten sich die Komponenten der Kraft nach den Achsen wie

$$\frac{\partial f}{dx} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Es sind daher die folgenden Gleichungen der Bewegung des materiellen Punktes auf der Fläche aufzustellen:

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x}, \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z}, \end{cases}$$

worin λ eine noch zu bestimmende Gröfse ist.

Diese Bestimmung kann folgendermafsen ausgeführt werden. Nehmen wir im allgemeinsten Falle die Fläche als von der Zeit abhängig an, setzen ihre Gleichung also

$$f(x, y, z, t) = f = 0\,, \tag{3}$$

so mufs, weil f im Laufe der Zeit den Wert 0 beständig beibehält*),

$$\frac{df}{dt} = 0$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{4}$$

sein. Eine nochmalige Differentiation liefert:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2} \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dt} \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\frac{dx}{dt} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial t}\frac{dy}{dt} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial t}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man in (5) die Werte für $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ aus (2) ein, so erhält man eine Gleichung, aus welcher man λ, ausgedrückt durch x, y, z, t, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, X, Y, Z, linear berechnen kann. Die Bestimmung von λ giebt uns die Gewähr, dafs durch seine Einsetzung in (2) diese Gleichungen wirklich eine Bahn bestimmen, welche in die Fläche $f = 0$ fällt.

6. Soll sich der materielle Punkt auf einer, eventuell veränderlichen, stetig gekrümmten Kurve bewegen, welche durch die Gleichungen

$$f(x, y, z, t) = 0, \quad f_1(x, y, z, t) = 0 \tag{6}$$

bestimmt ist, so kann man sich die Kurve als den Schnitt der beiden Flächen $f = 0$ und $f_1 = 0$ denken. Da sich der materielle Punkt auf $f = 0$ bewegen soll, fügen wir wieder die Kraftkomponenten

$$\lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lambda\frac{\partial f}{\partial z}.$$

zu. Da nun noch die zweite Fläche $f_1 = 0$ beschränkend hinzutritt, setzen wir noch die Komponenten

$$\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}, \quad \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}$$

einer Kraft zu, welche normal zu dieser Fläche ist.

---

*) Man beachte den Unterschied zwischen dem totalen Differentialquotienten $\frac{df}{dt}$ und dem partiellen, sich nur auf das explicite in f enthaltene t beziehenden, $\frac{\partial f}{\partial t}$.

Wir haben hiernach zu setzen:

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda_1\dfrac{\partial f_1}{dx}, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial y}, \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\dfrac{\partial f}{\partial z} + \lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial z}. \end{cases}$$

Differentiiert man die beiden Gleichungen (6) nach Art von (5) und setzt die Werte für $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ aus (7) darin ein, so erhält man zwei in λ und λ_1 lineare Gleichungen, welche diese Gröfsen zu bestimmen gestatten.

Andere Fälle der unfreien Bewegung verschieben wir auf später.

§ 15.

Bewegung eines materiellen Punktes auf einer Kurve oder Fläche infolge des Beharrungsgesetzes.

1. Soll sich ein materieller Punkt ohne äufsere Kraft, lediglich infolge des Beharrungsgesetzes auf einer vorgelegten Kurve bewegen, so erfährt seine Geschwindigkeit in der Richtung der Tangente nirgends eine Änderung; der Punkt bewegt sich in dieser mit gleichbleibender Geschwindigkeit*).

2. Soll sich ein materieller Punkt unter gleichen Bedingungen auf einer Fläche

$$(1)\qquad f(x, y, z) = 0$$

bewegen, die wir als unveränderlich und unbeweglich annehmen, so wird seine Geschwindigkeit ebenfalls keine Änderung erfahren. Wir brauchen uns nur die Kurve, welche der Punkt thatsächlich durchläuft, als vorgeschriebene Bahn zu denken, um diesen Fall auf den vorigen zurückzuführen.

Es ist nur die Bahn des Punktes auf der Fläche zu ermitteln.

3. Zu diesem Zwecke setzen wir nach § 14, (2):

$$(2)\qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \lambda\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda\frac{\partial f}{\partial y},\quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda\frac{\partial f}{\partial z}$$

und eliminieren aus ihnen dt durch die Relation

$$(3)\qquad \frac{ds}{dt} = c,$$

*) Dies Resultat setzt voraus, dafs die Kurve ihre Richtung nur stetig ändert; findet eine plötzliche Richtungsänderung statt, so bleibt nur die Geschwindigkeitskomponente erhalten, welche in die neue Richtung fällt. Analoges gilt für die Bewegung auf nicht stetig gekrümmten Flächen und Kurven im allgemeinen.

worin c die konstante Geschwindigkeit bedeutet. Wir haben dann, wenn

$$\mu = \frac{\lambda}{c^2}$$

gesetzt wird,

$$(4) \qquad \frac{d^2x}{ds^2} = \mu \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = \mu \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = \mu \frac{\partial f}{\partial z},$$

wo μ durch Einsetzen dieser Werte in die entsprechend transformierte Gleichung (5) in § 14 zu bestimmen ist. Die Gleichungen (4) und (1) zusammen bestimmen aber eine geodätische Linie der Fläche, d. h. eine Linie, welche die kürzeste Verbindungslinie je zweier unendlich benachbarter von ihren Punkten in der Fläche darstellt. Dies geht aus den Differentialgleichungen der geodätischen Linie hervor, wie man sie z. B. bei Joachimsthal, a. a. O. pag. 162 findet.

4. Um dasselbe Resultat durch ganz einfache Schlüsse, ohne jede Rechnung zu erlangen, kann man folgende Betrachtung anstellen. Nach § 1, 6 erhält jeder Punkt, welcher sich in einer Kurve bewegt, in jedem Momente eine Zentripetalbeschleunigung, welche in die Richtung des betreffenden (ersten) Krümmungsradius der Kurve fällt. Da aber nach § 14 diese Zentripetalbeschleunigung nur von der Wirkung der Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

herrühren kann und diese Wirkung in die Normale der Fläche fällt, so folgt, daſs jener Krümmungsradius selbst in diese Normale zu liegen kommt. Es ist aber leicht nachzuweisen, daſs eine Kurve auf einer Fläche, deren sämtliche Krümmungsradien in die entsprechenden Normalen der Fläche fallen, eine geodätische Linie dieser Fläche ist. Betrachtet man nämlich zunächst zwei unendlich benachbarte Punkte A und B der Fläche, so kann man durch dieselben unendlich viele Ebenen legen, welche durch A und B begrenzte Kurvenbogen*) aus der Fläche ausschneiden, die man unter Vernachlässigung unendlich kleiner Gröſsen höherer Ordnung als Kreisbogen betrachten darf. Von zwei Kreisbogen, welche zwischen zwei festen Punkten gezogen sind, ist aber derjenige der kleinere, dessen Radius der gröſsere ist. Da nach dem bekannten Meusnier'schen Satze (Joachimsthal, pag. 65) der Krümmungsradius eines Normalschnittes gröſser ist wie derjenige eines durch denselben Punkt gelegten anderen ebenen Schnittes, so folgt, daſs unter jenen unendlich vielen Kurventeilen derjenige der kürzeste ist, dessen Ebene zwischen A und B normal zur Fläche steht, d. h. der Kurventeil, dessen Krümmungsradien zur Fläche normal sind. Eine Kurve, welche sich aus solchen kürzesten Elementen zusammensetzt, ist aber eine geodätische Linie.

5. Das gewonnene Resultat, daſs ein materieller Punkt sich auf einer stetigen Kurve mit gleichbleibender Geschwindigkeit bewegt,

---

*) Jeder unendlich kleine Teil einer stetigen Kurve kann als eben angesehen werden.

soweit keine äufseren Kräfte auf ihn einwirken, gestattet uns die Bewegung auf einer Kurve einfacher zu behandeln. Wir brauchen nur beim Vorhandensein einer Kraft deren tangentiale Komponente in jedem Zeitpunkte zu berechnen und ihr die Tangentialbeschleunigung des bewegten Punktes, multipliziert mit dessen Masse, gleichzusetzen. Unter Hinzunahme der Gleichungen der vorgeschriebenen Kurve erhält man so die vollständigen Differentialgleichungen der Bewegung.

§ 16.

Unfreie Bewegung auf einer ebenen Kurve infolge der Schwerkraft.

1. Bewegt sich ein materieller Punkt infolge der Schwerkraft auf einer Geraden, welche mit der Horizontalebene den Winkel α bildet — wir legen die y-Achse in die Projektion dieser Geraden auf die Horizontalebene, die x-Achse aber vertikal, nach oben als positiv gerechnet, durch einen Punkt der Geraden —, so kommt allein die Komponente der Schwerkraft in Betracht, welche in die Richtung der Geraden fällt.

Wir haben

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \alpha, \tag{1}$$

wenn s in aufsteigender Richtung als positiv angesehen wird,

$$s = -\frac{g \sin \alpha}{2} t^2 + ct + c_1, \tag{2}$$

somit, wenn die Geschwindigkeit in der Anfangslage $s = 0$ Null ist:

$$s = -\frac{g \sin \alpha}{2} t^2. \tag{3}$$

Der Punkt bewegt sich also in der Geraden ebenso, wie er sich beim senkrechten Fall in einer vertikalen Geraden bewegen würde, falls die Beschleunigung der Schwerkraft auf $g \sin \alpha$ reduziert wird.

Die nach der Zeit t erreichte Geschwindigkeit ist

$$v = -g \sin \alpha \,.\, t = \sqrt{-2gs \sin \alpha}$$

oder, da $x = s \sin \alpha$ ist,

$$v = \sqrt{-2gx}. \tag{4}$$

Da x die vertikale Höhe des Ausgangspunktes über dem Endpunkte der Bahn ist, so kann man sagen (§ 3, (7)):

Die erreichte Geschwindigkeit ist dieselbe, wie wenn der Punkt die gleiche Höhe frei durchfallen hätte.

Aber auch umgekehrt wird der Punkt, wenn er sich in der schiefen Geraden mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 aufwärts bewegt, dieselbe

vertikale Höhe über dem Ausgangspunkte erreichen, wie wenn er mit derselben Geschwindigkeit vertikal aufwärts gestiegen wäre. Dies folgt aus (2), wenn man $c_1 = 0$, $c = v_0$ setzt und untersucht, wann

$$\frac{ds}{dt} = - g \sin\alpha \, . \, t + v_0 = 0$$

wird. Es folgt

$$t = \frac{v_0}{g \sin\alpha}, \quad s = \frac{v_0^2}{g \sin\alpha}, \quad x = \frac{v_0^2}{g}.$$

2. Da jede beliebige Kurve als zusammengesetzt aus geradlinigen Elementen angesehen werden kann, für jedes Element aber die vorigen Resultate gelten, so kann man folgende Sätze aussprechen:

Bewegt sich ein Punkt von seiner Ruhelage infolge der Schwerkraft auf einer beliebigen Kurve abwärts, so ist in jedem Momente seine Geschwindigkeit dieselbe, wie wenn er die Höhendifferenz vom Ausgangspunkte bis zum Momentanpunkte frei durchfallen hätte; erstreckt sich die Kurve wieder aufwärts, so steigt der Punkt von seiner tiefsten Lage bis zu der Höhe seines Ausgangspunktes wieder an. In gleichen Höhen hat er gleiche Geschwindigkeit. Die Bewegung wiederholt sich bei geeigneter Gestaltung der Kurve periodisch.

Die Fallbewegung auf einer schiefen Ebene läfst sich, falls keine Anfangsgeschwindigkeit vorhanden ist, unmittelbar auf die Bewegung in der geneigten Geraden zurückführen. Die allgemeine Bewegung auf der schiefen Ebene infolge der Schwerkraft ergiebt sich so einfach, dafs wir nicht darauf einzugehen brauchen.

3. Ist der materielle Punkt, der unter Einflufs der Schwerkraft steht, genötigt, sich in einer ebenen Kurve zu bewegen, deren Ebene vertikal ist, so haben wir, wenn α den Winkel des Wegelementes ds mit der positiv gerichteten Horizontalachse, der y-Achse, bezeichnet, auch hier

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = - g \sin\alpha. \tag{5}$$

Wir wollen zeigen, dafs die Integration dieser Differentialgleichung immer auf eine Reihe von Quadraturen zurückgeführt werden kann.

Es ist

$$\sin\alpha = \frac{dx}{ds} \tag{6}$$

und, wenn $f(x, y) = 0$ oder $y = \varphi(x)$ die Gleichung der Kurve ist,

$$s = \int^x \sqrt{1 + \varphi'(x)^2}\, dx,$$

so dafs sich x und $\frac{dx}{ds}$ nach Ausführung der Quadratur als Funktion von s darstellen lassen:

$$x = \psi(s), \quad \frac{dx}{ds} = \psi'(s).$$

Setzen wir den letzteren Wert in (6) ein, so ist $\sin \alpha$ als Funktion von s dargestellt, und (5) wird zu

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g\psi'(s), \tag{7}$$

eine Gleichung, die nach Muster von § 6, 3 zu integrieren ist.

§ 17.

Die kreisförmige Pendelbewegung.

1. Der wichtigste Fall der besprochenen Bewegungen ist die Bewegung auf einer kreisförmigen Bahn unter Einflufs der Schwerkraft. Denkt man sich einen materiellen Punkt am einen Ende eines unausdehnbaren, aber auch seine geradlinige Gestalt nie aufgebenden, masselosen Fadens von der Länge l befestigt, dessen anderer Endpunkt eine feste Lage hat, so bewegt sich der materielle Punkt auf einer Kugelfläche (konisches oder sphärisches Pendel). Fällt insbesondere die Anfangsgeschwindigkeit in eine Vertikalebene, welche durch den Kugelmittelpunkt geht, so wird die Bewegung eine kreisförmige (Kreispendel)*). Diesen Fall behandeln wir zuerst.

Der Kreismittelpunkt sei der Nullpunkt, die x-Achse gehe wie bisher senkrecht, die y-Achse wagerecht durch denselben; s werde vom Nullpunkt aus nach der positiven Seite der y-Achse zu als positiv gerechnet. Bezeichnet α den augenblicklichen Winkel zwischen dem Faden und der negativ, d. h. abwärts gerichteten x-Achse, von dieser nach der positiven Seite der y-Achse zu als positiv gerechnet, so ist in Übereinstimmung mit § 16, (5)

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \alpha \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{s}{l}, \tag{1}$$

also

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -g \sin \frac{s}{l}. \tag{2}$$

2. Wir betrachten zunächst den besonderen Fall, dafs der Winkel α nur sehr kleine Werte annimmt; dann wird $\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{gs}{l}$.

Die hier nahezu geradlinige Bewegung ist also dieselbe, wie wenn der materielle Punkt von dem tiefsten Punkte der Bahn mit einer Kraft angezogen würde, welche proportional der Entfernung zunimmt. Die Bewegung ist demgemäfs mit der harmonischen identisch; sie besteht nach § 8, 6 in Oszillationen um den tiefsten Punkt, deren Dauer

*) Im Gegensatz zu dem später zu betrachtenden physischen Pendel, welches durch einen in einem Punkte befestigten festen Körper gebildet wird, heifst das hier besprochene ein einfaches oder mathematisches Pendel.

(3) $$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

von der Amplitude unabhängig, dagegen der Wurzel aus der Fadenlänge direkt, der Wurzel aus g indirekt proportional ist. Dieses Resultat wurde bereits von Huyghens gefunden.

3. Im allgemeinen Falle setzen wir wie früher

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \frac{d^2 s}{dt^2} = v \frac{dv}{ds}$$

und erhalten

$$v \frac{dv}{ds} = -g \sin \frac{s}{l},$$

$$\frac{v^2}{2} = gl \cos \frac{s}{l} + \frac{c}{2},$$

woraus

(4) $$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{c + 2gl \cos \frac{s}{l}},$$

(5) $$t = \int \frac{ds}{\sqrt{c + 2gl \cos \frac{s}{l}}}$$

folgt. Die Ausführung der Integration wird verschieden, je nachdem das Pendel nur Schwingungen um die Vertikallage oder Rotationen um den Aufhängepunkt ausführt.

4. Das erstere tritt ein, wenn für $s = s_0$, $\alpha = \alpha_0$ die Geschwindigkeit v Null ist. Die Zeit werde so gezählt, dafs für $t = 0$ auch $\alpha = 0$ und $s = 0$ sei. Dann ist

$$c = -2gl \cos \frac{s_0}{l} = -2gl \cos \alpha_0$$

und

$$t = \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{2gl} \sqrt{\cos \frac{s}{l} - \cos \frac{s_0}{l}}}$$

oder, wenn wir α einführen, somit $ds = l\, d\alpha$ setzen,

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\cos \alpha - \cos \alpha_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha_0}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \frac{1}{2 \sin \frac{\alpha_0}{2}} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha_0}{2}} \right)^2}}.$$

Wir setzen

$$\sin\frac{\alpha_0}{2} = k \quad \text{und} \quad \sin\frac{\alpha}{2} = ku\,, \;\alpha = 2 \arcsin ku\,, \; d\alpha = \frac{2k\,du}{\sqrt{1-k^2u^2}};$$

damit wird

$$(6) \qquad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Somit ergiebt sich für die Zeit ein elliptisches Integral erster Gattung, und wir haben durch Umkehrung:

$$u = \sin\operatorname{am}\left(k, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$$

oder

$$(7) \qquad \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha_0}{2} \sin\operatorname{am}\left(\sin\frac{\alpha_0}{2}, t\sqrt{\frac{g}{l}}\right).$$

Für die Praxis ist es am wichtigsten, die Dauer T einer Schwingung zu ermitteln; die Zeit, welche das Pendel braucht, um von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \alpha_0$ zu gelangen, ist offenbar der vierte Teil derselben.

Wir entwickeln $(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Satze, erhalten

$$(1-k^2u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}k^4u^4 + \cdots$$

und haben jetzt

$$(8) \qquad T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\left[1 + \frac{1}{2}k^2u^2 + \cdots\right]$$

auszuführen. Es ist aber

$$\frac{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\,2n}{1\,.\,3\,\ldots\,(2n-1)}\frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} - d\left[\varphi_n(u)\sqrt{1-u^2}\right],$$

wenn

$$(9) \qquad \varphi_n(u) = u + \frac{2}{3}u^3 + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}u^5 + \cdots + \frac{2\,.\,4\,\ldots\,(2n-2)}{3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}u^{2n-1}$$

ist; denn wir haben

$$d\left[\varphi_n(u)\sqrt{1-u^2}\right] = \varphi_n'(u)\sqrt{1-u^2} - \frac{u\varphi_n(u)}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{\varphi_n'(u)(1-u^2) - u\varphi_n(u)}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \left\{\begin{array}{l} 1 + \frac{2}{1}u^2 + \frac{2\,.\,4}{1\,.\,3}u^4 + \frac{2\,.\,4\,.\,6}{1\,.\,3\,.\,5}u^6 + \cdots + \frac{2\,.\,4\,\ldots\,(2n-2)}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-3)}u^{2n-2} \\ -u^2 - \frac{2}{1}u^4 + \frac{2\,.\,4}{1\,.\,3}u^6 + \frac{2\,.\,4\,.\,6}{1\,.\,3\,.\,5}u^8 - \cdots - \frac{2\,.\,4\,\ldots\,(2n-2)}{1\,.\,3\,.\,5\,\ldots\,(2n-3)}u^{2n} \\ -u^2 - \frac{2}{3}u^4 - \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}u^6 - \cdots \qquad\qquad - \frac{2\,.\,4\,\ldots\,(2n-2)}{3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}u^{2n} \end{array}\right\} : \sqrt{1-u^2}$$

$$= \frac{1 - \frac{2\,.\,4\,\ldots\,.\,(2n-2)\,2n}{3\,.\,5\,\ldots\,(2n-1)}u^{2n}}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Daher ist

$$(10)\quad \frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\int_0^1 \frac{u^{2n}du}{\sqrt{1-u^2}} = \Big[\arcsin u\Big]_0^1 - \Big[\varphi_n(u)\sqrt{1-u^2}\Big]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Setzt man dies in (8) ein und schreibt wieder $\sin\frac{\alpha_0}{2}$ statt k, so folgt

$$(11)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\alpha_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\alpha_0}{2} + \cdots\right].$$

Diese aus der Theorie der elliptischen Funktionen bekannte Reihe konvergiert für kleine α_0, die meistens in Betracht kommen, sehr stark, so dafs schon (3) für kleinere α_0 der Wirklichkeit sehr nahe kommt. In der Praxis genügt es fast immer

$$(12)\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha_0^2}{16}\right)$$

zu setzen. Es sei ausdrücklich bemerkt, dafs Formel (11) noch gilt, wenn $\alpha_0 > \frac{\pi}{2}$ wird.

5. Falls $\alpha_0 = \pi$, $k = 1$ wird, geht (6) über in

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^u \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^u \left[\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right] du$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[\log\frac{1+u}{1-u}\right]_0^u = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\log\frac{1+u}{1-u};$$

die Umkehrung liefert

$$(13)\quad u = \frac{e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} - e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}}{e^{\sqrt{\frac{g}{l}}t} + e^{-\sqrt{\frac{g}{l}}t}},$$

woraus α folgt. Die Annäherung an den höchsten Punkt ist eine asymptotische.

6. Im ersten betrachteten Falle ist $-2gl < -c < 2gl$, im zweiten $-c = -2gl$; es bleibt noch der Fall $-c < -2gl$, $c > 2gl$ zu untersuchen. Hier ist

$$t = \int_0^\alpha \frac{l\,d\alpha}{\sqrt{c + 2gl\cos\alpha}} = \int_0^\alpha \frac{l\,d\alpha}{\sqrt{c + 2gl - 4gl\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

oder, wenn $c + 2gl = v_0^2$ gesetzt wird, so dafs $v_0^2 > 4gl$ ist,

$$t = \frac{l}{v_0} \int_0^\alpha \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - \frac{4gl}{v_0^2} \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

Setzen wir hier

$$\frac{4gl}{v_0^2} = k^2, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = u, \quad d\alpha = \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}},$$

so wird

$$t = \frac{2l}{v_0} \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \tag{14}$$

also

$$u = \sin \operatorname{am}\left(k, \frac{v_0 t}{2l}\right). \tag{15}$$

Der materielle Punkt führt in diesem Falle eine fortdauernde Rotation aus.

Um die Rotationsdauer zu finden, bemerken wir, dafs die Zeit des Aufsteigens derjenigen des Absteigens gleich ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned} T &= \frac{4l}{v_0} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \\ &= \frac{2l\pi}{v_0}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{4gl}{v_0^2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{(4gl)^2}{v_0^4} + \cdots\right]. \end{aligned} \tag{16}$$

Aus (4) geht hervor, dafs v_0 die Geschwindigkeit für $s = 0$, also im tiefsten Punkte der Bahn ist. Im höchsten Bahnpunkte beträgt die Geschwindigkeit

$$\sqrt{c - 2gl} = \sqrt{v_0^2 - 4gl},$$

für $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$ aber $\sqrt{c} = \sqrt{v_0^2 - 2gl}$.

7. Die Pendelbewegung bei Vorhandensein einer zur Geschwindigkeit proportionalen Reibung ist für kleine Schwingungen bereits durch die Untersuchungen von § 8 gegeben. Für eine Reibung, welche dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, wird die Behandlung umständlich; siehe darüber Narr, a. a. O., p. 318.

§ 18.

Tautochrone und Brachistochrone.

1. Die Wahrnehmung, dafs ein materieller Punkt auf einem nicht zu grofsen Bogen eines Vertikalkreises Pendelschwingungen ausführt, deren Dauer von der Amplitude wenig abhängt, veranlafst uns, die Aufgabe zu stellen:

Eine ebene Kurve zu bestimmen, welche die Eigenschaft besitzt, dafs ein materieller Punkt infolge der Schwere von irgend zwei ihrer Punkte bis zu ihrem tiefsten Punkte in der gleichen Zeit gelangt. Diese Kurve heifst Tautochrone.

Ist dieses Mal der tiefste Punkt der Bahn der Nullpunkt, h die vertikale Höhe des Ausgangspunktes über demselben und setzen wir $s = \psi(x)$, wo ψ noch bestimmt werden soll, so ist bei sonst gleicher Bezeichnung wie früher

$$v = \sqrt{2g(h-x)},$$

also

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}}.$$

Die Fallzeit ist demnach

$$(1) \qquad T = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}} = \int_0^h \frac{\psi'(x)dx}{\sqrt{2g(h-x)}}.$$

Substituieren wir $x = hu$, so wird

$$T = \int_0^1 \frac{h\psi'(hu)du}{\sqrt{2g(h-hu)}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{h}\,\psi'(hu)du}{\sqrt{2g(1-u)}},$$

so dafs jetzt h aus den Grenzen des Integrals weggeschafft ist. Soll dieser Ausdruck für beliebige h denselben Wert geben, so mufs $\sqrt{h}\psi'(hu)$ von h frei sein, d. h.

$$\psi'(hu) = \frac{k}{\sqrt{uh}}$$

sein. Wir haben also

$$\psi'(x) = \frac{k}{\sqrt{x}}$$

und, wenn $s = 0$ und $x = 0$ sich entsprechen sollen,

$$(2) \qquad s = \psi(x) = 2k\sqrt{x}.$$

Ferner ist

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{ds}{dx} = \frac{k}{\sqrt{x}},$$

also

$$(3) \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{k^2 - x}{x}}.$$

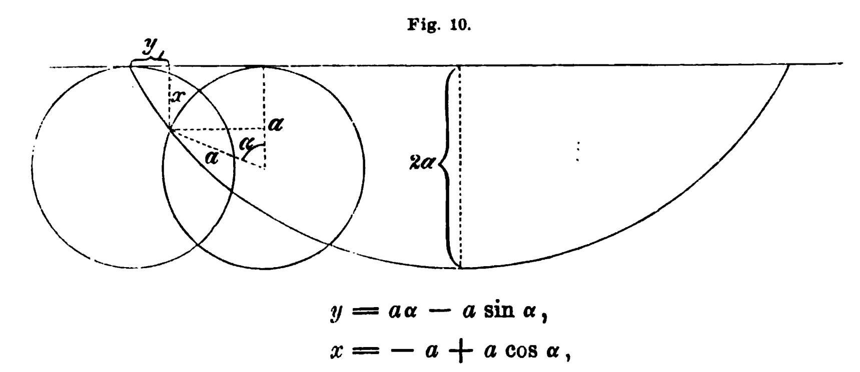
Hieraus folgt durch Integration, da für $x = 0$ auch $y = 0$ ist,

$$(4) \qquad y = \pm \sqrt{k^2 x - x^2} \pm \frac{k^2}{2} \arccos \frac{k^2 - 2x}{k^2}.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Cykloide. Diese Kurve stellt die Bahn eines Punktes der Peripherie eines Kreises dar, wenn dieser auf

einer Geraden rollt, ohne zu gleiten. Nehmen wir diese Gerade als y-Achse, den Radius des rollenden Kreises gleich a, verlegen den Nullpunkt in einen der Punkte, in welchen der erzeugende Punkt die y-Achse berührt, und lassen sich den Kreis in der Halbebene der negativen x von dieser Anfangslage aus um den Winkel α (gemessen als Bogen mit dem Radius 1, beim Rollen nach der positiven Seite der y-Achse positiv gerechnet) drehen, so haben wir leicht (Fig. 10)

Fig. 10.



$$y = a\alpha - a \sin \alpha,$$
$$x = -a + a \cos \alpha,$$

also nach Elimination von α — man beachte, dafs α und $\sin \alpha$ dasselbe Zeichen haben müssen —

$$(5) \qquad y = \pm \sqrt{-2ax - x^2} \mp a \arccos \frac{a+x}{a}.$$

Verlegen wir jetzt den Nullpunkt in den tiefsten Punkt der Bahn, d. h. substituieren wir $x - 2a$ an Stelle von x, und setzen wieder fest, dafs für $x = 0$ auch $y = 0$ werden soll, so folgt

$$(6) \qquad y = \pm \sqrt{2ax - x^2} \pm a \arccos \frac{a-x}{a},$$

eine Gleichung, die für $k^2 = 2a$ mit (4) identisch wird.

Die Tautochrone ist also eine Cykloide, welche durch Rollen eines Kreises auf der unteren Seite einer horizontalen Geraden erzeugt wird*).

2. Das Cykloidenpendel kann, infolge einer bekannten Eigenschaft der Cykloide, auch in mechanisch brauchbarer Weise hergestellt werden. Nach Mafsgabe von Fig. 11 hängt man ein Fadenpendel zwischen zwei Cylindern von cykloidischer Basis auf; die Länge des Pendels mufs der Hälfte eines Cykloidenteils gleich sein**). Schwingt nun das Pendel in einer zu den Cylinderachsen senkrechten Ebene, so beschreibt der materielle Punkt desselben die Evolvente einer Cykloide, d. h. wieder eine mit der Evolute kongruente Cykloide; das Pendel schwingt also tautochron.

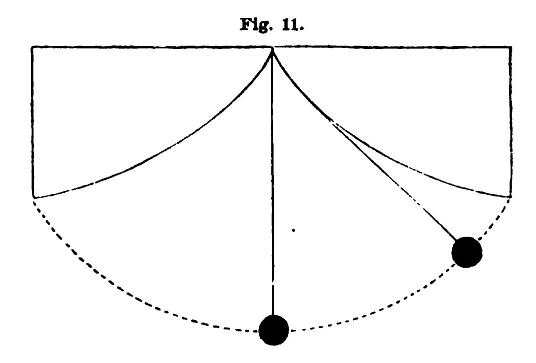
*) Zuerst von Huyghens gefunden.

**) D. h. gleich $4a$.

Die nähere Ausführung des benutzten geometrischen Satzes kann hier wohl übergangen werden.

Wie Newton zuerst zeigte, behält die Cykloide den Charakter des Tautochronismus bei, wenn sich der Bewegung auf ihr ein der Geschwindigkeit proportionaler Widerstand entgegensetzt. Die Rechnung ist mittels der in § 8 gegebenen Hilfsmittel leicht durchzuführen. Ist der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional, so erhält man als Tautochrone keine Cykloide mehr. Siehe hierüber Narr, Einleitung in die theoretische Mechanik, p. 329 ff.

Fig. 11.



Eine Verallgemeinerung des Tautochronenproblems behandelt Abel in seiner Abhandlung: Solution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies, Oeuvres compl , T. I, p. 11. Weitere Litteratur siehe bei Narr, a. a. O. p. 333, Schell, a. a. O. I, p. 408.

3. Unter der Brachistochrone für zwei beliebig im Raume gegebene Punkte versteht man die Kurve, in welcher sich ein materieller Punkt von dem höher gelegenen Punkte in der kürzesten Zeit nach dem tiefer gelegenen infolge der Schwerkraft bewegt*).

Es leuchtet ein, dafs die Brachistochrone eine ebene Kurve ist, welche in der durch die beiden Punkte bestimmten Vertikalebene liegt. Wäre nämlich die Brachistochrone irgend eine andere Kurve, so könnten wir uns dieselbe auf jene Ebene orthogonal projiziert denken. Bei der Bewegung in dieser Projektionskurve würde der fallende materielle Punkt an jeder Stelle dieselbe Geschwindigkeit erreichen, wie in dem entsprechenden, gleich hoch gelegenen Punkte der Brachistochrone (§ 16, 2). Nun ist aber ein Element der Projektionskurve kleiner als das entsprechende der projizierten Kurve oder höchstens demselben gleich; dasselbe mufs also bei derselben Geschwindigkeit im allgemeinen in kürzerer Zeit zurückgelegt werden. In der Projektion der Brachistochrone würde also die Bewegung rascher vor sich gehen als in der Brachistochrone selbst, was einen Widerspruch involviert.

---

*) Das Problem der Brachistochrone wurde zuerst von Leibnitz gelöst. Weitere Litteratur s. bei Schell.

Wir behandeln demnach das Problem als ein ebenes. Legen wir das Koordinatensystem wie bei der Tautochrone, so haben wir wieder für die Fallzeit, falls die Anfangsgeschwindigkeit gleich 0 ist,

$$T = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{2g(h-x)}}. \tag{7}$$

Hierin setzen wir

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

und erhalten

$$T = \int_0^h \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2g(h-x)}}\, dx. \tag{8}$$

Um nun T für die gegebenen Endpunkte, welche mit Rücksicht auf die vorhin gemachten Festsetzungen

$$x = 0, \; y = 0 \quad \text{und} \quad x = h, \; y = y_1$$

sein mögen, zu einem Minimum zu machen, verfahren wir nach den Regeln der Variationsrechnung. Soll

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y, y')\, dx \tag{9}$$

für die festen Grenzwerte x_0 und x_1 ein Minimum oder Maximum sein, so mufs bekanntlich die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0 \tag{10}$$

erfüllt werden. Enthält f, wie in unserem Falle, y nicht explizite, so reduziert sich (10) auf

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0, \tag{11}$$

woraus

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = c \tag{12}$$

folgt.

Wenden wir dies auf (8) an, so erhalten wir die Bedingung

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \frac{1}{\sqrt{2g(h-x)}} = c \tag{13}$$

oder

$$y' = \sqrt{\frac{2c^2 g(h-x)}{1 - 2c^2 g(h-x)}}. \tag{14}$$

Es folgt

$$y = \int \sqrt{\frac{2c^2 g(h-x)}{1 - 2c^2 g(h-x)}}\, dx = \pm \frac{1}{c\sqrt{2g}} \sqrt{(h-x) - 2c^2 g(h-x)^2} \tag{15}$$
$$\mp \frac{1}{4c^2 g} \arccos\,[1 - 4c^2 g(h-x)] + C.$$

Da für $x = h$ $y = y_1$ sein soll, so muſs

$$C = y_1 \tag{16}$$

gesetzt werden. Durch die Bemerkung, daſs für $x = 0$ auch $y = 0$ wird, bestimmt sich c in komplizierter Form. (15) stellt wieder eine Cykloide dar, die durch einen auf der unteren Seite einer horizontalen Geraden rollenden Kreis erzeugt wird (der Unterschied im Zeichen gegen (6) erklärt sich durch eine Verlegung des Anfangspunktes der Koordinaten). Durch die Anfangs- und Endlage ist Gröſse und Lage dieser Cykloide vollkommen bestimmt.

§ 19.

Das konische oder sphärische Pendel.

1. Von Bewegungen auf Flächen infolge der Schwerkraft behandeln wir nur diejenige auf der Kugelfläche, da die Bewegung auf der schiefen Ebene bereits durch § 16 hinreichend klargestellt ist.

Ein Fadenpendel von der Länge l ist das zweckmäſsigste Beispiel für die Bewegung auf der Kugelfläche; man bezeichnet ein solches, wenn es nicht in einer Ebene schwingt, als konisches oder sphärisches Pendel.

Wir legen den Nullpunkt in den Mittelpunkt der Kugel, die x-Achse vertikal aufwärts gerichtet, die y- und z-Achse beliebig horizontal. Die Kugelgleichung ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2. \tag{1}$$

2. Wir behandeln die Bewegung zunächst für den Fall, daſs sich das Pendel nur unendlich wenig von der Gleichgewichtslage entfernt. Denkt man sich durch den Pendelfaden eine Vertikalebene gelegt, so ist es einleuchtend, daſs die wirksame Komponente der Schwere in diese Ebene fällt. Wir haben also dieselbe Art der Beschleunigung, wie in § 17, 2. Es findet daher nach § 8 harmonische Bewegung statt; der materielle Punkt bewegt sich im allgemeinen in einer unendlich kleinen Ellipse um den Gleichgewichtspunkt als Mittelpunkt. Die Umlaufszeit ist der Schwingungsdauer bei unendlich kleinen ebenen Schwingungen gleich.

3. Den allgemeinen Fall wollen wir nach § 14 behandeln, da ein direkter Ansatz schwieriger ist; wir erhalten so ein passendes Beispiel zu einer wichtigen allgemeinen Methode.

Wir setzen:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g + \lambda \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial z},$$

wobei

$$f = x^2 + y^2 + z^2 - l^2$$

ist. Daher können wir unter Änderung der Gröſse λ schreiben

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g + \lambda \frac{x}{l}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lambda \frac{y}{l}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \lambda \frac{z}{l}, \tag{2}$$

wo λ mit Hilfe von (1) zu bestimmen ist. Eliminiert man λ aus der zweiten und dritten Gleichung, so folgt

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \tag{3}$$

und hieraus

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = c; \tag{4}$$

es gilt also der Flächensatz für die Projektion auf die yz-Ebene, jedoch nicht für andere Ebenen. Multipliziert man die Gleichungen (2) resp. mit $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ und addiert, so folgt, da nach (1)

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0$$

ist,

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2} = -g\frac{dx}{dt} \tag{5}$$

und durch Integration

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = -gx + C \tag{6}$$

oder

$$\frac{v^2}{2} = -gx + C, \tag{7}$$

eine Gleichung, welche lediglich das Resultat von § 16, 2 enthält.

Wir führen nun Polarkoordinaten ein, indem wir

$$x = l\cos\alpha, \quad y = l\sin\alpha\cos\varphi, \quad z = l\sin\alpha\sin\varphi \tag{8}$$

setzen. Es ist dann

$$\frac{dx}{dt} = -l\sin\alpha\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = l\cos\alpha\cos\varphi\frac{d\alpha}{dt} - l\sin\alpha\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}, \tag{9}$$

$$\frac{dz}{dt} = l\cos\alpha\sin\varphi\frac{d\alpha}{dt} + l\sin\alpha\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},$$

so dafs aus (4)

$$l^2\sin^2\alpha\frac{d\varphi}{dt} = c \tag{10}$$

und aus (6)

$$l^2\left[\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 + \sin^2\alpha\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = -2gl\cos\alpha + 2C \tag{11}$$

wird.

Eliminiert man aus (10) und (11) das eine Mal $\frac{d\varphi}{dt}$, das andere Mal dt, berechnet dann dt und $d\varphi$ und integriert, so erhält man

$$t = l^2\int^{\alpha}\frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{2l^2\sin^2\alpha\,(C - gl\cos\alpha) - c^2}}, \tag{12}$$

(13) $$\varphi = c \int \frac{d\alpha}{\sin\alpha \sqrt{2 l^2 \sin^2\alpha (C - g l \cos\alpha) - c^2}}.$$

Es sind dies elliptische Integrale, wie sich durch Beseitigung der trigonometrischen Funktionen leicht ergiebt (s. unten). Die beiden Integrationskonstanten hängen nur von der Wahl der y- und z-Achse und des Anfangspunktes der Zeit ab; c und C charakterisieren die spezielle Bewegung.

4. Die Methode, welche hier zur Integration der Bewegungsgleichungen benutzt wurde, verdient Aufmerksamkeit; wir werden sie später in allgemeinerer Form wiederfinden. Die Berechnung von λ nach § 14 wurde gänzlich vermieden. Wir führten neue Koordinaten α und φ ein, welche ausreichen, um den Ort eines Punktes auf der vorgeschriebenen Kugelfläche vollständig zu bestimmen. Infolge dieser zweckmäfsigen Wahl brauchen wir nur zwei Bewegungsgleichungen; eine dritte für die Bewegung in der Richtung des Radius würde ja doch nur Gröfsen ergeben, welche zu annullieren sind. Durch Elimination von λ aus (2) erhalten wir aber gerade zwei Gleichungen.

In derselben Weise können wir auf einer vorgeschriebenen Kurve jeden Punkt durch eine Angabe fixieren, etwa durch die Bogenlänge s; dann können wieder die beiden Gröfsen λ und λ_1 aus den Gleichungen eliminiert werden und die einzige übrigbleibende Gleichung ist zur Bestimmung ausreichend.

5. In die Formeln (12) und (13) können wir statt α wieder $x = l \cos\alpha$ einführen; wir erhalten

(14) $$t = -l \int \frac{dx}{\sqrt{2(l^2 - x^2)(C - gx) - c^2}},$$

(15) $$\varphi = -cl \int \frac{dx}{(l^2 - x^2)\sqrt{2(l^2 - x^2)(C - gx) - c^2}}.$$

Um uns über den Verlauf der Bewegung einen Überblick zu verschaffen, suchen wir die höchsten und niedrigsten Punkte zu bestimmen, welche der materielle Punkt erreicht. Es mufs in ihnen x ein Maximum oder Minimum sein, also $\frac{dx}{dt} = 0$ oder

(16) $$\psi(x) = 2(l^2 - x^2)(C - gx) - c^2 = 0.$$

Diese Gleichung dritten Grades hat drei reelle Lösungen. Für $x = \infty$ ist nämlich $\psi = \infty$, für $x = l$ aber $\psi = -c^2$, so dafs zwischen diesen beiden Werten ψ den Nullwert passiert, d. h. (16) eine negative Lösung oberhalb l besitzt. Dieser Wert kommt für uns nicht in Betracht, da bei der Pendelbewegung $x \leqq l$ bleibt. Da es aber in der Natur der Sache liegt, dafs, wenn x nicht konstant ist, es mindestens ein Maximum und ein Minimum erreichen mufs, aber nur noch zwei Nullwerte von $\frac{dx}{dt}$ möglich sind, so mufs angenommen werden, dafs diesen eben ein Maximum

und ein Minimum entspricht. Dieses Maximum und Minimum ist aus der Gleichung (16) zu berechnen. Wegen (7) mufs $C - gx$ immer positiv sein. Ist $C < 0$, so bleibt immer $x < 0$; ist aber $C = 0$, so wird x höchstens 0; für $C > 0$ genügen wohl positive, aber immer auch geeignete negative x der Gleichung (7). In Worten ausgedrückt: Der materielle Punkt begiebt sich immer in die untere Hälfte der Kugel, in der also stets das Minimum liegt; er gelangt bis in die Höhe des Aufhängepunktes, wenn $C = 0$, ist und steigt noch höher, wenn $C > 0$ ist.

Da die rechte Seite von (14) ein elliptisches Integral erster Gattung ist, also für denselben x-Wert unendlich viele t-Werte liefert, welche um die reelle Periode des Integrals voneinander abstehen, so erreicht der materielle Punkt denselben höchsten und niedrigsten Stand unendlich oft in gleichen Intervallen; ob dann aber auch derselbe φ-Wert erreicht wird, mufs noch untersucht werden.

6. Wir wollen zunächst die Schwingungsdauer, d. h. das doppelte Zeitintervall zwischen zwei höchsten oder niedersten Ständen untersuchen. Zu diesem Zwecke müssen wir (14) auf die Normalform reduzieren. Sind $x_1 = l \cos \alpha_1$ und $x_2 = l \cos \alpha_2$ der höchste, resp. niederste Stand, während x_0 den nicht in Betracht kommenden dritten Nullwert von $\frac{dx}{dt}$ bedeutet, so wird durch Zerlegung von $\psi(x)$ in Faktoren

$$(17) \qquad t = -\frac{l}{\sqrt{2g}} \int \frac{dx}{\sqrt{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}}.$$

Setzen wir zunächst

$$x_0 - x = u^2, \quad dx = -2u du,$$

so wird

$$t = \frac{l}{\sqrt{2g}} \int \frac{2du}{\sqrt{[u^2 - (x_0 - x_1)][u^2 - (x_0 - x_2)]}},$$

worin $x_0 - x_1$ und $x_0 - x_2$ sicher keine negativen Gröfsen sind, da $x_2 \leqq x_1 \leqq x_0$ ist.

Wir setzen

$$u = w\sqrt{x_0 - x_1}, \quad k^2 = \frac{x_0 - x_1}{x_0 - x_2} \leqq 1$$

und erhalten

$$(18) \qquad t = \frac{l\sqrt{2}}{\sqrt{g}\sqrt{x_0 - x_2}} \int \frac{dw}{\sqrt{(1 - w^2)(1 - k^2 w^2)}}.$$

Da für $x = x_1$ und $x = x_2$ $u = \sqrt{x_0 - x_1}$ und $u = \sqrt{x_0 - x_2}$, also $w = \pm 1$ und $w = \pm \frac{1}{k}$ wird, da ferner die Schwingungsdauer T das Doppelte der Zeit ist, welche zwischen zwei Maximis verläuft, so ist

$$(19)\ T = \frac{2l\sqrt{2}}{\sqrt{g}\sqrt{x_0 - x_2}} \int_{-1}^{+1} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}} = \frac{4l\sqrt{2}}{\sqrt{g}\sqrt{x_0 - x_2}} \int_0^1 \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}$$

$$= \frac{2l\pi\sqrt{2}}{\sqrt{g}\sqrt{x_0 - x_2}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \cdots\right].$$

7. Der Ausdruck (15) für φ ist ein elliptisches Integral dritter Gattung mit derselben Irrationalität wie dasjenige für t. Kehrt x zu demselben Werte zurück, so hat sich φ um eine konstante Gröfse geändert, welche von c abhängt. Auf die eingehendere Untersuchung des Gegenstandes können wir uns hier nicht einlassen; man findet dieselbe vollständig durchgeführt in Durège, Theorie der elliptischen Funktionen, 4. Aufl. p. 307. Das Endresultat lautet:

Das konische Pendel beschreibt eine sphärische Figur, welche näherungsweise mit einer Ellipse verglichen werden kann, deren grofse Achse sich mit konstanter Geschwindigkeit in der Richtung der Bewegung dreht. Wird die höchste Lage des Pendels als gegeben angenommen, so ist die Drehung desto stärker, je höher der niedrigste Punkt der beschriebenen Bahn liegt.

Ist $c = 0$, so geht die Bewegung in einer Ebene vor sich.

8. Fallen das Maximum und das Minimum von x zusammen, so mufs x konstant $= x_1$ sein; es mufs $\frac{dx}{dt} = 0$, also

$$2(l^2 - x_1^2)(C - gx_1) - c^2 = 0$$

sein. Das Pendel führt dann eine kreisförmige Bewegung mit gleichbleibender (nach (4)) Geschwindigkeit aus. Wenn man die Beschleunigung der Schwere g in Komponenten nach dem Radius dieses Kreises und dem der Kugel zerlegt, so mufs die erstere Komponente $-g \operatorname{tg} \alpha$ der Zentripetalbeschleunigung gleich sein; es ist also

$$-g \operatorname{tg} \alpha = \frac{v^2}{l \sin \alpha}$$

oder

$$(20)\qquad v = \sqrt{-gl \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}.$$

Die Umlaufszeit ist gleich dem Umfange des Kreises, dividiert durch die Geschwindigkeit, also

$$(21)\qquad T = \frac{2\pi l \sin \alpha}{\sqrt{-gl \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}} = 2\pi \sqrt{\frac{-l \cos \alpha}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{-x_1}{g}}.$$

Die Rotationsdauer ist also gleich der Schwingungsdauer eines ebenen Pendels, welches $-x_1$ zur Länge hat und unendlich kleine Schwingungen ausführt.

x_1 mufs negativ sein; nur bei unendlich grofser Geschwindigkeit könnte das Pendel in einer horizontalen Ebene schwingen.

§ 20.

Bewegung auf der Oberfläche der rotierenden Erde.

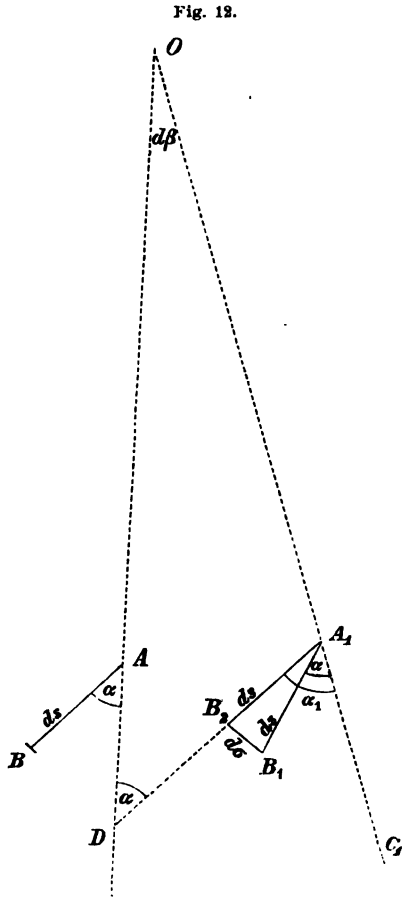
1. Wir wollen hier mehrere Probleme einschalten, welche sich mit der relativen Bewegung auf der rotierenden Erde beschäftigen und die wenigstens zum Teil an diese Stelle gehören. Zuerst möge die rein horizontale Bewegung auf der Erdoberfläche untersucht werden. Wir wollen annehmen, dafs die letztere eine Kugelfläche sei. Die gleichförmige Rotation um die feste Achse gehe mit der Winkelgeschwindigkeit ω vor sich, d. h. in der Zeiteinheit beschreibe der Halbmesser irgend eines Parallelkreises den Winkel ω (der aber wieder als Bogen gemessen wird). Auf einen Punkt der Oberfläche, der die Bewegung der umgebenden Teile angenommen hat, wirkt aufser der Schwerkraft, die nach dem Erdmittelpunkte gerichtet sein möge, die durch die Umdrehung erzeugte Zentrifugalkraft ein, welche in der Richtung des betreffenden Parallelkreisradius thätig ist. Dieselbe bringt nicht nur eine Verminderung der Schwerkraft, sondern auch eine Richtungsänderung derselben zuwege, so dafs es scheinen könnte, dafs dem materiellen Punkte eine in die Kugelfläche fallende Beschleunigung erteilt werde. Allein die Erde ist keine genaue Kugel, sondern ihre Oberfläche hat, wie wir später begründen werden, wenigstens da, wo sie sich ohne Einwirkung anderer Kräfte frei entwickeln konnte (z. B. in der Meeresfläche), eine solche Gestalt angenommen, dafs die vereinigte Schwer- und Zentrifugalkraft auf jedem Punkte der Oberfläche senkrecht steht, eine seitliche Komponente also ausgeschlossen ist.

Wir wollen nun in der Folge zwar die Kugelgestalt der Erde annehmen, aber, um mit der Wirklichkeit in Übereinstimmung zu bleiben, keine seitliche Kraftkomponente in Betracht ziehen. Die Schwerkraft und die Zentrifugalkraft kommen für uns hier gar nicht in Rechnung; die erstere dient nur dazu, den Punkt immer auf der Erdoberfläche festzuhalten. Befindet sich daher dieser in einem Momente in Ruhe, so wirkt keinerlei seitliche Kraft auf ihn ein.

2. Anders wird aber die Sache, wenn er sich in Bewegung befindet; es stellt sich dann eine Kraftwirkung ein, welche eine seitliche Verschiebung zur Folge hat. Am leichtesten erkennt man das Statthaben einer solchen bei der Bewegung im Meridian. Da sich ein Punkt in höheren Breiten infolge der Rotation mit geringerer Geschwindigkeit bewegt wie ein solcher in niederen Breiten, so gelangt ein Punkt, der sich in meridionaler Richtung bewegt, aus Gegenden mit geringerer Geschwindigkeit in solche mit gröfserer oder umgekehrt, was eine Seitenablenkung zur Folge haben mufs. v. Baer basierte hierauf sein bekanntes Gesetz von der Ablenkung der Flufsläufe, übersah aber, dafs auch bei anderer Richtung der Bewegung wesentlich dieselbe Ablenkung statthat, wie aus der folgenden Betrachtung (nach Buff) hervorgeht.

Sei (Fig. 12) AB eine unendlich kleine Strecke auf der Erdoberfläche, welche der materielle Punkt in der Zeit dt in der Richtung von A nach B durchlaufen würde, falls die Erde stillstände. Infolge der Rotation ist aber AB an eine andere Stelle gelangt, etwa nach $A_1 B_1$. Legt man durch A_1 eine Parallele $A_1 B_2$ zu AB, welche mit dieser Strecke gleiche Länge hat, so ist B_2 der Punkt, an welchen nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten der materielle Punkt in der Zeit dt wirklich gelangt ist. $B_1 B_2$ giebt also die Ablenkung vom Wege an. $A_1 B_2$ liegt strenge genommen nicht in der Erdoberfläche, doch dürfen wir uns hier, wo es auf Komponenten, welche senkrecht zur Erdoberfläche wirken, nicht ankommt, $A_1 B_2$ auf diese projiziert denken; die hierdurch begründete Änderung der Ablenkung ist unendlich klein von der zweiten Ordnung. Ferner denken wir uns in A und A_1 Tangenten an den Meridian gelegt, die sich in O treffen und dort den sehr kleinen Winkel $d\beta$ bilden. Die Winkel α und α_1 zwischen diesen Meridianrichtungen (im Sinne von Norden nach Süden) einerseits und AB (oder $A_1 B_1$) und $A_1 B_2$ andrerseits geben, von Süden nach Westen zu gerechnet, das Azimut dieser Strecken an.

Fig. 12.



Verlängern wir $A_1 B_2$, bis es AO in D schneidet, was jedenfalls bei einer zu vernachlässigenden Änderung der Figur eintritt, so ist

$$\sphericalangle ADA_1 = \alpha \quad \text{und} \quad \sphericalangle \alpha_1 = \alpha + d\beta,$$

also

$$(1) \qquad d\beta = \alpha_1 - \alpha = B_1 A_1 B_2 .$$

Zur Bestimmung von $d\beta$ benutzen wir die Fig. 13, p. 128, welche einen Durchschnitt der Erde mittels einer Meridianebene zeigt. Ist φ die geographische Breite von A, r der Erdradius, so folgt

$$(2) \qquad AO = r \operatorname{cotg} \varphi .$$

Der von A während dt zurückgelegte Bogen ist aber

$$(3) \qquad AA_1 = r\omega \cos \varphi dt ,$$

woraus

$$d\beta = \frac{AA_1}{AO} = \omega \sin \varphi dt \tag{4}$$

folgt. Hiernach berechnet man, wenn

$$AB = A_1B_1 = A_1B_2 = ds, \quad B_1B_2 = d\sigma$$

gesetzt wird, aus $\triangle A_1B_1B_2$

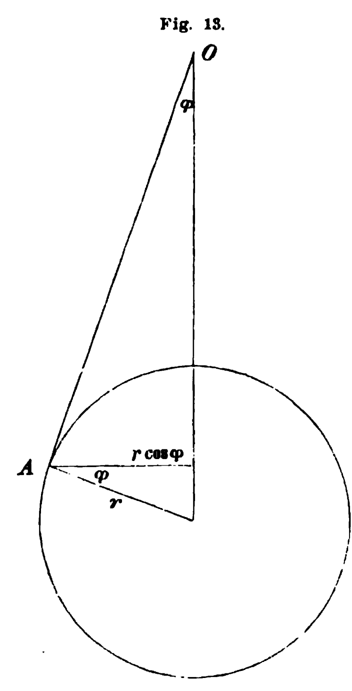
$$d\sigma = A_1B_1 d\beta = \omega \sin \varphi dt ds. \tag{5}$$

Aus der Figur geht hervor, dafs diese Ablenkung, die als normal zur Bahn angesehen werden kann, auf der nördlichen Halbkugel stets nach



rechts, auf der südlichen stets nach links vor sich geht.

Fig. 13.



Diese Ablenkung kann aber durch eine seitliche **Beschleunigung** ersetzt werden. Nennen wir dieselbe k, so mufs, weil die Beschleunigung in dem kleinen Zeitelemente als gleichförmig angesehen werden darf,

$$d\sigma = \frac{kdt^2}{2}$$

sein, so dafs

$$k = 2\omega \sin \varphi \frac{ds}{dt} = 2\omega v \sin \varphi \tag{6}$$

wird. Diese Beschleunigung ist vom Azimut unabhängig, sie ist nur durch die geographische Breite des Ortes und die Geschwindigkeit der Bewegung bedingt. Rechnet man die Zeit nach Sekunden, so ist, weil ein Sterntag 86 164 Sekunden beträgt, $\omega = \frac{2\pi}{86\,164}$ zu nehmen.

Diese seitliche Beschleunigung ist so gering, dafs sie sich bei Flufsläufen kaum bemerklich machen dürfte, da hier bedeutendere Wirkungen in Betracht kommen. Die durch Krümmungen des Flufslaufes erzeugte Zentrifugalkraft dürfte fast immer bedeutend überwiegen. Dagegen ist der Einflufs der Erdrotation, wie wir sogleich durch Rechnung zeigen werden, bei der Bildung der Windrichtung von mafsgebendem Einflufs.

3. Es ist leicht, die Bewegung während eines **endlichen** Zeitraumes zu verfolgen, wenn die beschränkende Voraussetzung gemacht wird, dafs sie sich während desselben nur über einen so kleinen Teil der Erdoberfläche erstreckt, dafs dieser als eine Ebene und die Breite als konstant angesehen werden kann. Da alsdann die seitliche, also in der Normale der Bahn wirkende Beschleunigung k konstant, eine Tangential-

beschleunigung aber nicht vorhanden ist, so wird die Bahnkurve eine konstante Krümmung aufweisen, also ein Kreis sein, der von dem bewegten, im Übrigen nur dem Beharrungsgesetze unterworfenen Punkte mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit durchlaufen wird. Unter Anwendung des bekannten Ausdrucks für die Zentripetalbeschleunigung und der Gleichung (6) haben wir

$$\frac{v^2}{\varrho} = 2\omega v \sin\varphi$$

zu setzen, woraus für den Radius des Kreises

$$\varrho = \frac{v}{2\omega\sin\varphi} = \frac{86\,164 v}{4\pi\sin\varphi} \tag{7}$$

folgt.

Für $\varphi = 50^0$, $v = 10$ m, was schon stärkeren Winden entspricht, erhalten wir z. B. $\varrho = 89\,508$ m. Hiernach erklärt sich die Entstehung der Wirbelwinde vollkommen, der Radius zeigt durchaus keine unmöglichen Dimensionen. Auch bei Geschossen, welche freilich weit bedeutendere Geschwindigkeiten erreichen, wird eine seitliche Ablenkung in Betracht kommen können.

4. Wir wollen bei dieser Gelegenheit auch die, eigentlich nicht an diese Stelle gehörige Aufgabe behandeln: Die Abweichung eines frei fallenden Körpers von der Lotlinie zu berechnen*). Da bei dem Falle der materielle Punkt von einer höheren Stelle, an welcher gröfsere Geschwindigkeit infolge der Rotation vorhanden ist, an eine solche mit geringerer gelangt, wird er immer nach Osten vom Lote abgelenkt werden. Von dem Umstande, dafs in der Höhe die Schwerkraft geringer, die Zentrifugalkraft aber gröfser ist, so dafs die Lotlinie in der Höhe eine andere Richtung hat wie in der Tiefe, wollen wir an dieser Stelle absehen. Wir legen die x-Achse in die Vertikale, die y-Achse von Westen nach Osten, den Nullpunkt in den Fufspunkt des Ausgangspunktes auf der Erdoberfläche. Befindet sich der fallende Körper zur Zeit t in dem Abstande $(r + x)$ vom Erdmittelpunkte, so ist die Rotationsgeschwindigkeit unter der Breite φ: $\omega(r + x)\cos\varphi$, nach der Zeit dt aber: $\omega(r + x + dx)\cos\varphi$, so dafs wir eine Ablenkung $-\,\omega\,dx\,dt\cos\varphi$ nach Osten haben, woraus wir wieder auf eine Beschleunigung $-\,2\omega\cos\varphi\,\frac{dx}{dt}$ schliefsen. Da $\frac{dx}{dt} = -gt$ ist, so haben wir

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\cos\varphi\,.\,gt,$$

also, weil für den Ausgangspunkt x_0 $\frac{dy}{dt} = 0$, $y = 0$ ist,

$$y = \frac{1}{3}\,\omega\cos\varphi\,.\,gt^3. \tag{8}$$

---

*) Genauer wurde der Gegenstand von Hoppe behandelt (Freier Fall aus einem Punkte der Erdoberfläche, Grunert's Arch. B. 64).

Da die Fallhöhe $h = \frac{g t^2}{2}$, also $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ist, so wird daraus

$$y = \frac{2}{3}\,\omega \cos\varphi \sqrt{\frac{2h^3}{g}}. \tag{9}$$

5. Über den bekannten Foucault'schen Pendelversuch, dessen Theorie trotz neuerer Untersuchungen — die Litteratur*) darüber s. bei S. Günther, Lehrbuch der Geophysik u. s. w. — noch manche Dunkelheit zeigt, mögen hier nur wenige Bemerkungen Platz finden. Wir wollen zunächst den einfachen Fall in Betracht ziehen, dafs ein Pendel am Pole aufgehängt ist und dafs dasselbe seine Schwingungen beginnt, nachdem es in einer Ruhelage, in der sein Faden mit der Horizontalen den Winkel α bildete, festgehalten worden war.

Die gewöhnliche, in elementaren Büchern meistens vertretene Ansicht geht dahin, dafs dann das Pendel, absolut betrachtet, ebene Schwingungen ausführt, da keine Ursache vorhanden ist, eine seitliche Bewegung hervorzurufen. Relativ betrachtet führt dann die Schwingungsebene eine gleichmäfsige Drehung um die Vertikale aus, welche derjenigen der Erde gleich und entgegengesetzt ist**). Diese Betrachtung leidet aber, wie Becker nachgewiesen hat, an einem fundamentalen Fehler. Wenn nämlich das Pendel in schiefer Lage in Ruhe gebracht ist, so bezieht sich diese Ruhe nur relativ auf die Erdoberfläche. Absolut betrachtet wird dem Pendel in dieser scheinbaren Ruhelage eine seitliche Drehungsgeschwindigkeit erteilt, welche derjenigen der Erde gleich und entgegengesetzt ist. Diese Anfangsgeschwindigkeit mufs mit in Betracht gezogen werden.

Nehmen wir zunächst an, dafs die Schwingungen verschwindend klein sind, so sind dieselben nach den Untersuchungen von § 19 elliptisch mit absolut unverändert bleibender grofser Achse. Relativ führt also die grofse Achse dieser Bahn dieselbe Drehung aus, welche bei der gewöhnlichen Betrachtungsweise der angenommenen Bahnebene zugeschrieben wird. Es tritt also keine wesentliche Änderung des Resultates ein.

Anders wird aber doch die Sache bei gröfseren Schwingungen. Aufser der scheinbaren Drehung ist hier eine wirkliche vorhanden, welche aus den Formeln von § 19 hervorgeht. Da indessen bei wirklichen Versuchen die Amplitude der Schwingungen keine sehr grofse zu sein pflegt, so wird die Modifikation des einfacheren Resultates nicht allzusehr ins Gewicht fallen.

6. Um den Vorgang für einen Punkt A der Erdoberfläche, welcher unter der geographischen Breite φ liegt, zu erhalten, brauchen wir an

*) Die ausführlichste neuere Bearbeitung des Gegenstandes rührt von Onnes her (Over de betrekkelijke beweging, Nieuw Arch. v. wiskonde, B. V, Amsterdam).

**) Von der Bewegung der Erde um die Sonne wird dabei als unerheblich ab sehen.

Stelle der Drehung, welche am Pole eine vertikale Ebene um die Erdachse ausführt, nur die relative Drehung zu setzen, welche eine solche im Punkte A um eine vertikale Gerade ausführt. Wir legen zu diesem Zwecke an die Erdkugel im Punkte A eine Tangente an, welche die verlängerte Erdachse am Punkte B schneidet; es ist

$$AB = \frac{r}{\sin\varphi}. \tag{10}$$

Die relative Drehungsgeschwindigkeit der untersuchten Vertikalebene ist dann offenbar

$$\omega \frac{r}{AB} = \omega \sin\varphi .$$

Der Vorgang im Punkte A stimmt also mit demjenigen im Pole überein, wenn man nur die Rotationsgeschwindigkeit ω durch $\omega \sin\varphi$ ersetzt.

Auf eine allgemeinere Behandlung der relativen Bewegung verzichten wir an dieser Stelle; die gewählte speziellere Untersuchungsweise dürfte größere Durchsichtigkeit gewähren, wenn sie auch durch eine strengere ersetzt werden könnte.

Dritter Abschnitt.

Die Prinzipien der Mechanik und die Differentialgleichungen der Bewegung in allgemeiner Behandlung.

§ 21.

Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten und das d'Alembert'sche Prinzip.

1. Wir eröffneten den vorigen Abschnitt durch allgemeinere Betrachtungen über die unfreie Bewegung, untersuchten jedoch nur den Fall eingehender, dafs sich ein materieller Punkt auf einer festen Fläche oder Kurve bewegt. Es wurde uns schon dort klar, dafs von einer rein logischen Deduktion der Bewegungsgesetze für beliebige Bedingungsgleichungen keine Rede sein kann. Repräsentieren doch diese anscheinend so einfachen und mathematisch präzisen Bedingungen thatsächlich äufserst komplizierte physikalische Vorgänge, die auf Grund der Erfahrung mittels Näherungsmethoden in Rechnung zu ziehen sind. Wir supponierten bei den behandelten Aufgaben Hilfskräfte, durch welche alle Bewegungen, die den Bedingungsgleichungen zuwiderlaufen, vernichtet werden, während wir alle Bewegungskomponenten, welche sich mit den mathematischen Bedingungsgleichungen nicht in Widerspruch befinden, ungeändert liefsen. Dabei mufsten wir uns freilich eingestehen, dass die letztere, vereinfachende Annahme nur in einzelnen Fällen der Wirklichkeit nahe kommt.

Die Aufgabe, an die wir jetzt herantreten, ist die folgende ganz allgemeine:

Die Bewegungsgleichungen für n materielle Punkte aufzustellen, auf welche gegebene Kräfte einwirken und die aufserdem m Bedingungsgleichungen, in welchen nur die Koordinaten der Punkte vorkommen, zu genügen haben.

Das Auftreten von Differentialquotienten der Koordinaten nach der Zeit, also z. B. der Geschwindigkeit der Punkte, in den Bedingungsgleichungen ist ausgeschlossen; auch lassen wir hier noch den Fall aufser acht, dafs an Stelle dieser Gleichungen Ungleichungen treten. Das explizite Vorkommen der Zeit in den Bedingungsgleichungen wollen wir gleichfalls nicht in den Bereich unserer Untersuchung ziehen.

Bei der rein empirischen Grundlage, welche dieses Problem hat, mag es a priori nicht scheinen, dafs wir besonders einfache, allgemeine Resultate

erhalten werden; vielmehr müssen wir erwarten, dafs die Untersuchung nach den Einzelfällen zu trennen ist und dafs vielleicht eine verschiedene physikalisch-mechanische Verwirklichung derselben Bedingungen zu verschiedenen Resultaten führt. Wenn es nun trotzdem gelingt, den ganzen Komplex heterogen erscheinender Thatsachen, der hier zu bewältigen ist, in ein höchst einfaches Prinzip, d. h. ein nicht rein mathematisch deduziertes allgemeines Gesetz zusammenzufassen, so ist dies nur dadurch zu erklären, dafs wir uns nicht auf reine Empirie stützen. Die Ergebnisse der Beobachtungen sind allerdings kompliziert und nicht einheitlich; allein wir werden, wie wir dies bereits in den einfachsten Fällen thaten, an Stelle der direkten Erfahrung gewisse vereinfachende, mathematisch einfach darstellbare Annahmen setzen.

Das merkwürdige Prinzip, welches hier aufgestellt werden soll, trägt den Namen d'Alembert's, obgleich von diesem Mathematiker nur die letzte Erweiterung desselben herrührt. Die eigentliche Grundlage bildet ein Spezialfall des Gesetzes, welcher unter dem Namen des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten*) bekannt ist.

Wir wollen diese beiden Prinzipien zuerst formulieren, ehe wir zu ihrer Begründung übergehen.

2. Wir nennen jede unendlich kleine Verschiebung des materiellen Punktes x, y, z, welche mit den Bedingungsgleichungen des Problems vereinbar ist, eine virtuelle, d. h. mögliche Verrückung**). Wir bezeichnen die Komponenten dieser Verrückung mit δx, δy, δz, indem wir das Zeichen der Variation anwenden. Im Gegensatz hierzu stehen die aktuellen oder wirklichen Verrückungen dx, dy, dz, welche der Punkt im Verlaufe der Bewegung während eines verschwindend kleinen Zeitteiles thatsächlich erleidet; die aktuelle Verrückung ist ein Spezialfall der virtuellen.

Beim freien System ist jede willkürliche, unendlich kleine Verrückung eines Punktes eine virtuelle, beim konischen Pendel jede in der Kugelfläche, auf welcher sich der materielle Punkt des Pendels bewegt, vor sich gehende. Bei der Bewegung auf einer vorgezeichneten Kurve giebt es nur virtuelle Verrückungen, welche mit aktuellen (von der Richtung

---

*) Das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, zu welchem Galilei die ersten Anregungen gab, wurde von Joh. Bernoulli allgemein als richtig erkannt.

**) Denken wir uns das ganze System während eines Zeitelementes auf irgend eine mit den Bedingungen verträgliche Weise verschoben, so verhalten sich die Geschwindigkeiten der einzelnen Systempunkte während dieser Zeit wie die zurückgelegten Wege, d. h. wie die betreffenden virtuellen Verrückungen. Statt von virtuellen Verrückungen spricht man daher auch von virtuellen Geschwindigkeiten, die den ersteren proportional sind. Hieraus erklärt sich die Bezeichnung: Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten. — Auch wenn die Bedingungsgleichungen von der Zeit abhängig sind, haben die virtuellen Verrückungen eine bestimmte Bedeutung. Man versteht dann darunter die Verrückungen, welche mit den Bedingungen verträglich sind, falls man darin die Zeit als unveränderlich betrachtet.

abgesehen) identisch sind, wenigstens wenn die Kurve wirklich ganz durchlaufen wird. Ist nun ein System von n materiellen Punkten x_α, y_α, z_α mit den Massen m_α vorgelegt und sind X_α, Y_α, Z_α die Komponenten der auf sie einwirkenden Gesamtkräfte, so lautet das d'Alembert'sche Prinzip

$$(1)\qquad \sum_1^n{}^\alpha \left[\left(m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} - X_\alpha\right)\delta x_\alpha + \left(m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} - Y_\alpha\right)\delta y_\alpha + \left(m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - Z_\alpha\right)\delta z_\alpha\right] = 0$$

oder

$$(2)\qquad \sum_1^n{}^\alpha m_\alpha\left(\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}\delta x_\alpha + \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2}\delta y_\alpha + \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2}\delta z_\alpha\right) = \sum_1^n{}^\alpha (X_\alpha \delta x_\alpha + Y_\alpha \delta y_\alpha + Z_\alpha \delta z_\alpha)\,.$$

Soll Gleichgewicht stattfinden, d. h. sollen die Beschleunigungen sämtlich verschwinden, so mufs

$$(3)\qquad \sum_1^n{}^\alpha (X_\alpha \delta x_\alpha + Y_\alpha \delta y_\alpha + Z_\alpha \delta z_\alpha) = 0$$

sein. Dieser Spezialfall ist das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten.

Ist das System ein freies, so sind die δx_α, δy_α, δz_α vollständig willkürlich und voneinander unabhängig; man darf also auch alle bis auf eine einzige gleich Null annehmen und findet, dafs der Koeffizient derselben verschwinden mufs. Wiederholt man dies Verfahren für sämtliche Koeffizienten, so zerfällt (1) in die Einzelgleichungen

$$m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} - X_\alpha = 0\,,\quad m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} - Y_\alpha = 0\,,\quad m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - Z_\alpha = 0\,,$$

d. h. in die bekannten Differentialgleichungen der freien Bewegung. Das d'Alembert'sche Prinzip ist hier nur eine äufserliche Zusammenfassung der $3n$ Bewegungsgleichungen in eine einzige. Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn Bedingungsgleichungen

$$(4)\qquad f_\beta(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots) = 0$$

hinzutreten. Dann sind die virtuellen Verrückungen nicht mehr voneinander unabhängig, sondern durch Relationen verbunden, die aus den Gleichungen (4) hervorgehen; es ist nämlich

$$(5)\qquad \frac{\partial f_\beta}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_\beta}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial f_\beta}{\partial z_1}\delta z_1 + \frac{\partial f_\beta}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots = 0\,.$$

Ist, wie vorausgesetzt, die Zahl der Bedingungsgleichungen gleich m, so können mittels der Gleichungen (5) m der virtuellen Verrückungen

durch die übrigen $3n - m$ ausgedrückt werden. Nachdem dies geschehen, dürfen die letzteren als willkürlich behandelt, d. h. ihre neuen Koeffizienten dürfen einzeln gleich Null gesetzt werden.

3. Es ist nun leicht einzusehen, dafs das d'Alembert'sche Prinzip aus dem von den virtuellen Geschwindigkeiten unmittelbar folgt, wenn man nur die Voraussetzung macht, dafs die Wirkung der Bedingungsgleichungen durch Zusatzkräfte ersetzt werden kann, eine Voraussetzung, welche schon durch die physikalische Natur der Bedingungen gerechtfertigt erscheint.

Nehmen wir an, dafs kein Gleichgewicht statthabe, so können wir uns die Kraftkomponenten X_α, Y_α, Z_α mit anderen, welche die Bedingungsgleichungen zu ersetzen haben, zu Komponenten Ξ_α, H_α, Z_α vereinigt denken; alsdann lauten die Gleichungen der Bewegung

$$(6)\qquad m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} - \Xi_\alpha = 0, \quad m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} - H_\alpha = 0, \quad m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - Z_\alpha = 0.$$

Fügt man aber den Komponenten X_α, Y_α, Z_α die negativ genommenen Ξ_α, H_α, Z_α zu, so wird das Gleichgewicht unter Zuhilfenahme der Bedingungen hergestellt sein, da Ξ_α, H_α, Z_α aufser den Komponenten X_α, Y_α, Z_α nur Bestandteile enthalten, welche für sich allein keine Störung des Gleichgewichtes hervorrufen. Wir haben also unter Voraussetzung der Richtigkeit des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten

$$\sum_1^n{}^\alpha \left[(X_\alpha - \Xi_\alpha)\delta x_\alpha + (Y_\alpha - H_\alpha)\delta y_\alpha + (Z_\alpha - Z_\alpha)\delta z_\alpha\right] = 0$$

oder bei Benutzung von (6)

$$\sum_1^n{}^\alpha \left[\left(X_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}\right)\delta x_\alpha + \left(Y_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2}\right)\delta y_\alpha + \left(Z_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2}\right)\delta z_\alpha\right] = 0,$$

d. h. das d'Alembert'sche Prinzip.

Demnach brauchen wir uns in der Folge nur mit dem Richtigkeitsnachweise für das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zu beschäftigen.

4. Behufs weiterer Diskussion setzen wir das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten in eine noch etwas einfachere Form. Sind X_α, Y_α, Z_α die Komponenten der Kraft P_α, deren Richtung, im Sinne der Beschleunigung, welche sie erteilt, genommen, mit den positiv gerichteten Koordinatenachsen die Winkel

$$(P_\alpha,\ x_\alpha), \quad (P_\alpha,\ y_\alpha), \quad (P_\alpha,\ z_\alpha)$$

bildet, und sind δx_α, δy_α, δz_α die Komponenten der Verrückung δp_α, welche — wenn ihre Richtung im Sinne der Verschiebung genommen wird — mit den Koordinatenachsen die Winkel*)

---

*) Die P_α und δp_α werden als absolute Gröfsen behandelt.

$$(\delta p_\alpha, x_\alpha), \quad (\delta p_\alpha, y_\alpha), \quad (\delta p_\alpha, z_\alpha)$$

einschliefst, so ist

$$X_\alpha = P_\alpha \cos(P_\alpha, x_\alpha), \quad Y_\alpha = P_\alpha \cos(P_\alpha, y_\alpha), \quad Z_\alpha = P_\alpha \cos(P_\alpha, z_\alpha),$$
$$\delta x_\alpha = \delta p_\alpha \cos(\delta p_\alpha, x_\alpha), \quad \delta y_\alpha = \delta p_\alpha \cos(\delta p_\alpha, y_\alpha), \quad \delta z_\alpha = \delta p_\alpha \cos(\delta p_\alpha, z_\alpha),$$

also

$$(7) \qquad X_\alpha \delta x_\alpha + Y_\alpha \delta y_\alpha + Z_\alpha \delta z_\alpha$$
$$= P_\alpha\, \delta p_\alpha \Big[\cos(P_\alpha, x_\alpha)\cos(\delta p_\alpha, x_\alpha) + \cos(P_\alpha, y_\alpha)\cos(\delta p_\alpha, y_\alpha) + \cos(P_\alpha, z_\alpha)\cos(\delta p_\alpha, z_\alpha)\Big]$$
$$= P_\alpha \delta p_\alpha \cos(P_\alpha, \delta p_\alpha) = P_\alpha \delta p_\alpha \cos\lambda_\alpha ,$$

wenn λ_α den Winkel zwischen der Wirkungsrichtung der Kraft und der Verschiebungsrichtung bezeichnet. Das Prinzip lautet hiernach

$$(8) \qquad \sum_1^n{}^\alpha P_\alpha \delta p_\alpha \cos\lambda_\alpha = 0 .$$

Bei der Verwendung desselben zum wirklichen Ansatz der getrennten Gleichgewichtsbedingungen müssen natürlich die δp_α wieder in ihre drei Bestandteile aufgelöst werden.

Wir wollen nun zunächst den Inhalt und die Anwendung des Prinzips für einige der einfachsten Spezialfälle darlegen, da hierdurch das Verständnis desselben erleichtert wird.

5. Ist nur ein materieller Punkt x, y, z vorhanden, der sich auf einer vorgeschriebenen Fläche $f(x, y, z) = 0$ im Gleichgewichte befinden soll, so müssen die Kraftkomponenten, welche in die Tangentialebene der Fläche fallen, verschwinden, während die Normalkomponente beliebig ist, da sie durch den Widerstand der Fläche doch annulliert wird. Da aber die virtuellen Verrückungen hier solche sind, die in die Fläche fallen, so besagt die Gleichung

$$P\delta p \cos\lambda = 0 ,$$

aus der

$$P \cos\lambda = 0$$

folgt, nichts Anderes, als dafs die Projektionen der Kraft P nach allen möglichen Bewegungsrichtungen in der Fläche verschwinden müssen, und dies ist eben die hinreichende und notwendige Bedingung des Gleichgewichtes.

Soll sich der Punkt in einer Kurve im Gleichgewichte befinden, so braucht nur die Tangentialkomponente Null zu sein, da die übrigen Komponenten von selbst vernichtet werden. δp fällt aber hier in die Tangentialrichtung und $P\cos\lambda$ ist daher die Projektion der Kraft nach dieser Richtung; $P\delta p \cos\lambda = 0$ giebt also auch hier die hinreichende und notwendige Bedingung des Gleichgewichtes.

Bewegen sich mehrere Punkte, ohne untereinander durch Bedingungsgleichungen verbunden zu sein, auf vorgeschriebenen Kurven oder Flächen, so gilt das Gleiche für (8); denn die δp_α sind untereinander vollkommen unabhängig, können also auch alle bis auf eine Null gesetzt werden u. s. w.

6. Die einfachste Art der Verbindung zweier materiellen Punkte, x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2, untereinander ist die durch eine massenlose, unbiegsame und unausdehnbare Stange. Dieselbe verkörpert die Bedingung, dafs beide Punkte fortwährend denselben Abstand voneinander haben sollen, also die Bedingungsgleichung

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = r^2 .$$

Diese Verbindung hindert keinen der Punkte, einem Bewegungsantriebe, der senkrecht zur Stange gerichtet ist, Folge zu leisten. Man beachte wohl, dafs es sich um einen Antrieb im ersten Momente handelt, nicht um die weitere Fortsetzung der Bewegung; in der That kann eine unendlich kleine Strecke, welche Punkt 1 bei Festhaltung des Punktes 2 zurücklegt, als senkrecht zur Stange angesehen werden. Findet dagegen eine Bewegung von 1 in der Richtung der Stange statt, so mufs 2 eine gleichgrofse und gleichgerichtete Bewegung ausführen. — Sollen 1 und 2 im Gleichgewicht sein, so müssen die Kraftkomponenten senkrecht zur Stange verschwinden, die in der Richtung der Stange auf 1 und 2 ausgeübten Kräfte dagegen entgegengesetzt gleich sein. Diese Thatsachen können als durch elementare Versuche konstatiert gelten, mit ähnlichen Einschränkungen, wie sie bei der Bewegung auf Flächen oder Kurven nötig waren.

Wir wollen nun voraussetzen, dafs wirklich Gleichgewicht stattfindet. Stehen die virtuellen Verrückungen senkrecht auf der Stange, so müssen die Komponenten der Kräfte nach ihnen, also $P_1 \cos \lambda_1$ und $P_2 \cos \lambda_2$ einzeln verschwinden, da diese Komponenten durch die Verbindung nicht alteriert würden. Fallen δp_1 und δp_2 aber in die Richtung der Stange, so sind sie notwendigerweise gleich. Das Prinzip nimmt dann die Gestalt an

$$(P_1 \cos \lambda_1 + P_2 \cos \lambda_2)\, \delta p_1 = 0$$

oder

$$P_1 \cos \lambda_1 + P_2 \cos \lambda_2 = 0,$$

was nichts Anderes sagt, als dafs die Kräftekomponenten nach der Richtung der Stange entgegengesetzt gleich sein müssen, und das ist in der That eine Bedingung des Gleichgewichtes. Haben δp_1 und δp_2 andere Richtungen, so können beide in zwei Komponenten, eine nach der Richtung der Stange (δq_1 und δq_2), eine senkrecht zu derselben (δr_1 und δr_2) zerlegt werden. Die Komponenten der Kräfte nach diesen Richtungen mögen durch

$$P_1 \cos \mu_1,\ P_2 \cos \mu_2;\quad P_1 \cos \nu_1,\ P_2 \cos \nu_2$$

dargestellt sein. Dann ist im Falle des Gleichgewichtes

$$P_1 \cos \nu_1 = P_2 \cos \nu_2 = 0, \quad \delta r_1 \text{ und } \delta r_2 \text{ beliebig,}$$

$$P_1 \cos\mu_1 + P_2 \cos\mu_2 = 0, \quad \delta q_1 = \delta q_2,$$

also immer

$$P_1 (\cos\nu_1 \delta r_1 + \cos\mu_1 \delta q_1) + P_2 (\cos\nu_2 \delta r_2 + \cos\mu_2 \delta q_2) = 0,$$

d. h.*)

$$P_1 \cos\lambda_1 \delta p_1 + P_2 \cos\lambda_2 \delta p_2 = 0.$$

Das Gleichgewicht verlangt also die Erfüllung des Prinzips.

Aber die Gleichung

$$P_1 \cos\lambda_1 \delta p_1 + \delta_2 \cos\lambda_2 \delta p_2 = 0$$

ist auch die hinreichende Bedingung für das Statthaben des Gleichgewichtes. Da nämlich diese Gleichung für beliebige δp_1 und δp_2 gilt, welche senkrecht zur Stange stehen, so müssen alle Projektionen der Kräfte P_1 und P_2 nach diesen Richtungen verschwinden, d. h. die beiden Kräfte müssen in der Richtung der Stange wirken. Da aber für die letztere Richtung infolge der Bedingung $\delta p_1 = \delta p_2$ und nach dem eben Bewiesenen $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ist, so folgt $P_1 = -P_2$, also wirklich die noch fehlende Bedingung des Gleichgewichtes.

7. Nachdem wir den Inhalt des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten für einige Spezialfälle erprobt haben, gehen wir zum allgemeinen Nachweis seiner Richtigkeit über. Dafs es sich um keinen mathematisch-logischen Beweis handelt, ist schon öfters betont worden. Aber man kann auch nicht behaupten, dafs das Prinzip auf einer rein empirischen Grundlage ruht. Hätten wir z. B. bei der Bewegung auf einer Fläche die Bewegungsgleichungen aus der unmittelbaren Erfahrung ableiten wollen, so würden sie nicht mit den früher aufgestellten zusammenfallen, sondern ihnen nur mehr oder weniger nahe kommen. Wir haben schon erkannt, dafs die Annahme von Bedingungsgleichungen der Bewegung der Wirklichkeit durchaus nicht völlig entspricht; in der Natur sind nur freie Kräfte thätig, und die Bedingungsgleichungen haben blofs den Zweck, komplizierte Vorgänge näherungsweise richtig zu erklären. Die Einführung der Bedingungsgleichungen ist also an sich nur eine Fiktion, die wir weiter dadurch ergänzen müssen, dafs wir präzisieren, in welcher Art wir uns die Wirkung dieser Bedingungsgleichungen denken wollen. Dann werden wir erst an der Hand der Erfahrung prüfen müssen, wie weit diese Fiktionen, bei deren Aufstellung lediglich eine gewisse Plausibilität leitend war, mit der Erfahrung in Einklang sind, wie weit sie im konkreten Falle noch der Ergänzung bedürfen. Man kann, wie dies häufig geschieht, alle möglichen Bedingungsgleichungen durch einen Mechanismus verwirklichen, der sich aus den schon besprochenen einfachen

*) Es ist etwa

$$\delta r_1 = \cos\alpha_1 \delta p_1, \quad \delta q_1 = \cos\beta_1 \delta p_1,$$

also $\cos\nu_1 \delta r_1 + \cos\mu_1 \delta q_1 = (\cos\nu_1 \cos\alpha_1 + \cos\mu_1 \cos\beta_1) \delta p_1 = \cos\lambda_1 \delta p_1$, nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie.

Bestandteilen zusammensetzt: Flächen oder Kurven, auf denen sich Punkte bewegen sollen, und Stangen, welche zwei Punkte verbinden; dabei wird es freilich notwendig, Hilfspunkte einzuführen, welche mit den wirklichen gleichfalls durch Stangen verbunden sind und sich auf festzusetzenden Kurven bewegen. Es ist dann nicht schwer, das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten, welches bei Anwendung einzelner Teile dieses Mechanismus besteht, auch auf die gesamte Anordnung zu übertragen. Doch wollen wir diesen Weg nicht einschlagen, da er uns nicht zur klaren Erkenntnis des Grundgedankens des Prinzips führt und es auch nicht ohne weiteres einleuchtend ist, ob das Prinzip, welches für eine bestimmte Anordnung des Mechanismus gilt, auch bei einer anderen, die jedoch denselben Bedingungsgleichungen entspricht, bestehen bleibt. Wir wollen uns vielmehr von dem speziellen Arrangement ganz unabhängig machen und das Prinzip in mehr abstrakter Weise untersuchen.

8. Um eine gleichmäfsigere Behandlung zu ermöglichen, wollen wir unseren Vorstellungen von der Bewegung eines Systems eine etwas andere Form geben. Wir hatten bisher bei einem System von n Punkten $3n$ Variabeln, von denen je drei als Koordinaten desselben Punktes zusammengehören, in Rechnung zu bringen; hierdurch erlangen Gleichungen, welche zwischen Koordinaten desselben Punktes und solchen verschiedener Punkte bestehen, einen ungleichartigen Charakter. Von diesem Mifsstande können wir uns aber frei machen. Statt die Bewegung eines Punktes im Raume zu untersuchen, können wir auch die Bewegung von drei Punkten auf je einer Geraden in Betracht ziehen, nämlich die Bewegung der Projektionen jenes Punktes auf die drei Koordinatenachsen eben in diesen. Bei freier Bewegung können diese Projektionen wie völlig isolierte Punkte behandelt werden; nur ist ihnen die gleiche Masse beizulegen. Wird dem ursprünglichen materiellen Punkte die Bewegung auf einer Fläche oder Kurve vorgeschrieben, so sind die Bewegungen der drei Projektionspunkte durch eine oder zwei Bedingungsgleichungen verknüpft. Handelt es sich z. B. um die Bewegung auf der ebenen Kurve $y = f(x)$, so denken wir uns zwei Punkte x und y auf Geraden durch Kräfte, welche in der Richtung dieser Geraden wirken (die Komponenten X und Y) bewegt, während x und y durch die angegebene Relation, oder die Inkremente beider durch die Beziehung $dy = f'(x)dx$ verknüpft sind. Während wir früher annahmen, dafs durch das Vorschreiben der Bahn alle Komponenten der Bewegung zerstört werden, welche nicht in die Richtung der Tangente der Bahnkurve fallen, woraus weiter hervorgeht, dafs sich die Komponenten der wirklichen Bewegung nach der y- und x-Achse wie $dy : dx = f'(x)$ verhalten, setzen wir jetzt dieselbe Relation zwischen den Verrückungen der beiden isolierten Punkte x und y fest.

Auf diese Art gelingt es, die Beziehungen zwischen den Koordinaten eines Punktes und denen verschiedener Punkte vollkommen gleichartig zu machen. Wir werden daher von jetzt an (bei dieser Untersuchung) nur noch von n (was an Stelle des früheren $3n$ treten mag)

Punkten $x_1, x_2, \ldots x_n$ sprechen, welche sich in ebensovielen Geraden — die gegenseitigen Lagen derselben bleiben für uns aufser Betracht — unter dem Einflufs von Kräften $X_1, X_2, \ldots X_n$ bewegen, deren Richtungen mit eben diesen Geraden zusammenfallen. Dabei sollen die Ortsbestimmungen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch Gleichungen untereinander verbunden sein, in denen die Zeit t nicht auftritt.

9. Wäre die Zahl der Bedingungsgleichungen n, so würden die Gröfsen $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch diese völlig bestimmt und es könnte überhaupt keine Bewegung stattfinden; die gröfste zulässige Zahl von Bedingungsgleichungen ist daher $n - 1$. Wir wollen vorerst die Untersuchung für den Fall führen, dafs diese Maximalzahl von Bedingungen wirklich vorhanden ist*). Durch geeignete Eliminationen können wir diese Gleichungen so umgestalten, dafs die Gröfsen $x_2, x_3, \ldots x_n$ als Funktionen von x_1 erscheinen:

$$(9) \qquad x_2 = f_2(x_1), \quad x_3 = f_3(x_1), \; \ldots\ldots \; x_n = f_n(x_1).$$

Ist die Bewegung von x_1 bekannt, so ist damit auch diejenige aller übrigen Punkte bestimmt; und ebenso determiniert die Bewegung eines beliebigen Punktes diejenige aller übrigen. Sind die Funktionen (9) formell mehrdeutig, so mufs eine Festsetzung getroffen sein, welcher Wert in jedem Falle zu wählen ist. Ist x_1 im Gleichgewicht, d. h. in Ruhe — es ist ausreichend, diesen Spezialfall ins Auge zu fassen — so sind es auch die übrigen Punkte und umgekehrt. Es genügt daher, die Bedingung für das Gleichgewicht von x_1 aufzusuchen. Dabei möge nochmals darauf aufmerksam gemacht werden, dafs in unserem Falle die virtuellen Verrückungen (von der Richtung abgesehen) stets auch aktuelle sind. Denn x_1 kann irgendwie in seiner Geraden verschoben werden, während die Verschiebungen der übrigen Punkte dann völlig bestimmte sind. Wir dürfen daher die Bezeichnung d an die Stelle von δ treten lassen.

Mögen nun auf die Punkte $x_1, x_2, \ldots x_n$ die Kräfte $X_1, X_2, \ldots X_n$ in der Richtung ihrer Geraden wirken, wobei die Kräfte als positiv betrachtet werden, wenn sie die x zu vergröfsern suchen. Es ist klar, dafs jede Bewegung, welche z. B. x_2 durch X_2 erteilt wird, eine ganz bestimmte Bewegung von x_1 nach sich zieht. Ist nämlich dx_2 die während dt hervorgerufene Verrückung von x_2 — von einer Anfangsgeschwindigkeit sehen wir wieder ab —, so ist die zugehörige Verrückung dx_1 von x_1 durch

$$dx_2 = f'(x_1)dx_1$$

vollkommen determiniert. Dabei möge zunächst die Kraft X_2 allein in Thätigkeit sein. Diese Kraft kann man nun durch eine andere, X_2', ersetzt denken, welche auf x_1 in der Richtung seiner Geraden einwirkt, und es fragt sich nur, welches Gröfsenverhältnis zwischen X_2 und X_2' aufzustellen

*) Jede Maschine im gewöhnlichen Sinne ist ein Mechanismus, bei welchem der Bewegung nur noch ein Grad der Freiheit gelassen ist.

ist, damit der Effekt beider Kräfte für die Bewegung des Systems der gleiche ist. Vor allen Dingen ist hervorzuheben, dafs die Masse der einzelnen Punkte bei dieser Vergleichung keine Rolle spielt, da ja doch jede Kraft, welche einen Punkt bewegt, die übrigen in ganz bestimmter Weise mitbewegt, so dafs jede Kraft die Gesamtmasse des ganzen Systems in Bewegung zu setzen hat*). Zwei Kräfte verhalten sich nun *ceteris paribus* wie die Beschleunigungen, welche sie einem materiellen Punkte erteilen; diese sind wieder, falls anfangs Ruhe herrschte, den Wegen proportional, welche von diesem Punkte in der gleichen unendlich kleinen Zeit dt, während deren die Kräfte als konstant betrachtet werden können, unter ihrer Einwirkung zurückgelegt werden, wie aus der Formel $\frac{g\,dt^2}{2}$ für den unter Einflufs der Kraft g zurückgelegten Weg ersichtlich ist. X_2 mufs sich daher zu X_2' verhalten wie dx_2 zu dx_1, da letzteres die Wege sind, welche die Punkte x_2 und x_1 unter dem Einflufs von X_2, resp. X_2' durchlaufen; es ist also

$$X_2' = X_2 \frac{dx_2}{dx_1}. \tag{10}$$

In gleicher Weise ersetzen wir die auf $x_3, x_4, \ldots x_n$ einwirkenden Kräfte $X_3, X_4, \ldots X_n$ durch neue

$$X_3' = X_3 \frac{dx_3}{dx_1}, \quad X_4' = X_4 \frac{dx_4}{dx_1}, \quad \ldots \quad X_n' = X_n \frac{dx_n}{dx_1}, \tag{11}$$

welche den Punkt x_1 angreifen. Soll Gleichgewicht stattfinden, so müssen sämtliche den Punkt x_1 angreifenden Kräfte sich gegenseitig zerstören, d. h. es mufs

$$X_1 + X_2 \frac{dx_2}{dx_1} + X_3 \frac{dx_3}{dx_1} + \cdots + X_n \frac{dx_n}{dx_1} = 0$$

oder

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + X_3 dx_3 + \cdots + X_n dx_n = 0 \tag{12}$$

sein. Infolge der Identität von dx_α mit δx_α stimmt aber diese Gleichung, welche die notwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichtes enthält, mit dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten überein.

Dieser Betrachtung liegt nur die eine Voraussetzung zu Grunde, dafs sich die Kräfte, welche auf einen Punkt wirken, eben in der angegebenen Weise auf die mit ihm verbundenen Punkte übertragen, dafs insbesondere durch die Mechanismen, welche die Bedingungen verkörpern, keine Kraftwirkungen aufser den durch jene Übertragung implizite involvierten hervorgebracht werden. Diese Voraussetzung hat den Vorzug der Einfachheit und Plausibilität für sich; sie stimmt in den einfacheren,

---

*) Es ist zu bemerken, dafs bei allen Gleichgewichtsproblemen die Masse keine Rolle spielt; es handelt sich hier nur darum, dafs sich eine Anzahl von Kräften gegenseitig zerstört.

bereits abgehandelten Fällen mit der Erfahrung leidlich überein. Wir tragen daher kein Bedenken, sie als allgemein gültig hinzustellen, ohne dabei zu vergessen, dafs in jedem konkreten Falle Korrekturen, die man auf Rechnung der Reibung zu setzen pflegt und über die sich nichts Allgemeines angeben läfst, anzubringen sind*). Kurz, wir sind berechtigt, die gemachte Voraussetzung als eine Fiktion hinzustellen, welche der gesamten Behandlung der Bedingungsgleichungen einen gleichartigen, präzisen Charakter verleiht und dabei von den Beobachtungen, wie sie bei Maschinen u. s. w. angestellt werden können, sich nicht allzuweit entfernt. Mehr kann bei dem an sich fiktiven Charakter der Annahme von Bedingungsgleichungen nicht gefordert werden. Auch die erwähnte Zurückführung auf einfache mechanische Elemente leistet nicht mehr. Das Gleiche gilt für die Lagrange'sche Darstellung, welche das Prinzip durch Benutzung der Gesetze des Flaschenzugs begründet.

10. Ohne Schwierigkeit führen wir den Richtigkeitsnachweis des Prinzips jetzt noch für den Fall, dafs weniger als $n-1$, z. B. $n-2$ Bedingungsgleichungen vorhanden sind. Nehmen wir an, dafs thatsächlich Gleichgewicht statthat, so können wir zu den vorhandenen Bedingungen eine beliebige neue, nur diesen nicht widersprechende hinzufügen, ohne das Gleichgewicht zu alterieren. Nach dieser Zufügung mufs aber gemäfs dem Vorigen die Gleichung:

$$(13) \qquad X_1\delta x_1 + X_2\delta x_2 + \cdots + X_n\delta x_n = 0$$

befriedigt sein. Infolge der Willkürlichkeit dieser letzten Bedingung kann man dieselbe derart variieren, dafs die δx_α nach und nach alle Werte annehmen, die ihnen bei den ursprünglichen Bedingungen zugänglich waren. Umgekehrt folgt auch aus (1) das Statthaben des Gleichgewichts. Wäre dies nämlich nicht vorhanden, würde also Bewegung stattfinden (von der Anfangsbewegung dürfen wir hier, wo es sich doch nur um das gegenseitige sich Aufheben von Kräften handelt, wieder absehen, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen), so könnte man abermals eine $(n-1)^{\text{te}}$ Bedingung zufügen, jedoch so, dafs sie mit der thatsächlichen Bewegung im Einklang wäre. Handelte es sich beispielsweise — um zu der ursprünglichen Anschauungsweise zurückzukehren — um die Bewegung eines Punktes auf einer Fläche, so könnte man bestimmen, dafs er die Kurve auf dieser durchlaufen soll, welche er ohnehin zum Wege nimmt. Dann könnte aber (13) nicht befriedigt sein, da diese Gleichung bei $n-1$ Bedingungsgleichungen das Vorhandensein des Gleichgewichtes involviert.

In gleicher Weise kann man bei einer geringeren Zahl von Be-

*) Auf die Theorie der Reibung brauchen wir an dieser Stelle nicht weiter einzugehen. Wie früher öfters geschehen ist, kann man in jedem Falle die Reibung als eine Kraft einführen, welche der jeweiligen Bewegungsrichtung entgegengesetzt wirkt und eine Funktion der Geschwindigkeit ist.

dingungsgleichungen weiter schliefsen; (13) oder (3) bildet also allgemein die notwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichts.

Damit ist denn auch das d'Alembert'sche Prinzip nachgewiesen, falls man die oben gemachte Voraussetzung über die Wirkungsweise der Bedingungsgleichungen anerkennt.

11. Der Ausdruck

$$\sum_1^n{}^{\alpha} (X_\alpha \delta x_\alpha + Y_\alpha \delta y_\alpha + Z_\alpha \delta z_\alpha)$$

heifst die virtuelle Arbeit der wirkenden Kräfte*); er bezeichnet offenbar die Arbeit, welche die Kräfte P_α leisten würden, falls sie die virtuellen Verrückungen wirklich zu stande brächten.

Die Bedingung des Gleichgewichtes ist also die, dafs für jedes mögliche System von Verrückungen die virtuelle Arbeit verschwindet.

Haben sämtliche Kräfte des Systems eine gemeinsame Kräftefunktion U, so dafs

$$X_\alpha = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \quad Y_\alpha = \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}, \quad Z_\alpha = \frac{\partial U}{\partial z_\alpha}$$

ist, so geht (3) über in

$$\sum_1^n{}^{\alpha} \left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha + \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} \delta y_\alpha + \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \delta z_\alpha\right) = 0$$

oder

$$\delta U = 0. \tag{14}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn U ein Maximum oder Minimum, verglichen mit seinen Werten für Nachbarpunkte, ist; doch dürfen wir, wie aus den Elementen der Variationsrechnung bekannt ist, nicht den umgekehrten Schlufs ziehen. Wir kommen auf diesen Gegenstand später zurück.

§ 22.

Die Lagrange'sche Form des d'Alembert'schen Prinzips.

1. Wirken auf n materielle Punkte $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ mit den Massen m_α die Kraftkomponenten $X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$ ein, während k Bedingungsgleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} f_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots) = 0 \\ \vdots \\ f_k(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \cdots) = 0 \end{array}\right. \tag{1}$$

bestehen, so liefert das d'Alembert'sche Prinzip die Bewegungsgleichungen in der Form

*) Man bezeichnet auch die einzelnen Gröfsen $X_\alpha \delta x_\alpha$ oder $P_\alpha \delta p_\alpha$ als virtuelle Momente.

$$(2)\qquad \sum_1^n{}_\alpha\left[\left(m_\alpha\frac{d^2x_\alpha}{dt^2}-X_\alpha\right)\delta x_\alpha+\left(m_\alpha\frac{d^2y_\alpha}{dt^2}-Y_\alpha\right)\delta y_\alpha\right.$$
$$\left.+\left(m_\alpha\frac{d^2z_\alpha}{dt^2}-Z_\alpha\right)\delta z_\alpha\right]=0,$$

worin die $3n$ Gröfsen $\delta x_\alpha, \delta y_\alpha, \delta z_\alpha$ mit Hilfe der Gleichungen (1) durch $(3n-k)$ von ihnen ausgedrückt werden können. Zu letzterem Zwecke leiten wir aus (1) durch Differentiation die Relationen

$$(3)\quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\delta y_1+\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\delta z_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\delta y_2+\frac{\partial f_1}{\partial z_2}\delta z_2+\cdots=0$$

u. s. w.

her, durch welche jene Reduktion ermöglicht wird. Die $(3n-k)$ übrig bleibenden Variationen sind als vollkommen willkürlich zu erachten, ihre Koeffizienten also identisch Null zu setzen. Dieses Verfahren wird im allgemeinen ziemlich umständlich und wenig übersichtlich, weshalb es wünschenswert ist, dasselbe durch die auch sonst öfters angewandte Methode der Lagrange'schen Multiplikatoren zu ersetzen.

2. Wir multiplizieren die Gleichungen (3) der Reihe nach mit den vorläufig willkürlichen Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ und subtrahieren sie von (2); dies giebt

$$(4)\ \sum_1^n{}_\alpha\left[\left(m_\alpha\frac{d^2x_\alpha}{dt^2}-X_\alpha-\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}-\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}-\cdots-\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha}\right)\delta x_\alpha\right.$$
$$+\left(m_\alpha\frac{d^2y_\alpha}{dt^2}-Y_\alpha-\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y_\alpha}-\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y_\alpha}-\cdots-\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial y_\alpha}\right)\delta y_\alpha$$
$$\left.+\left(m_\alpha\frac{d^2z_\alpha}{dt^2}-Z_\alpha-\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z_\alpha}-\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z_\alpha}-\cdots-\lambda_k\frac{\partial f_k}{\partial z_\alpha}\right)\delta z_\alpha\right]=0,$$

eine Gleichung, die noch mit (1) oder (3) zu verbinden ist. Nun können wir die k willkürlichen Gröfsen λ so bestimmen, dafs k der Ausdrücke, welche als Faktoren der Variationen auftreten, identisch verschwinden. Die $(3n-k)$ Variationen, welche mit den übrigen multipliziert sind, können wir als die unabhängigen betrachten und müssen dann ihre Koeffizienten ebenfalls gleich Null setzen. Dies giebt die übersichtliche und elegante Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen

$$(5)\qquad \begin{cases} m_\alpha\dfrac{d^2x_\alpha}{dt^2}=X_\alpha+\lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}+\lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}+\cdots+\lambda_k\dfrac{\partial f_k}{\partial x_\alpha},\\[2ex] m_\alpha\dfrac{d^2y_\alpha}{dt^2}=Y_\alpha+\lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial y_\alpha}+\lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial y_\alpha}+\cdots+\lambda_k\dfrac{\partial f_k}{\partial y_\alpha},\\[2ex] m_\alpha\dfrac{d^2z_\alpha}{dt^2}=Z_\alpha+\lambda_1\dfrac{\partial f_1}{\partial z_\alpha}+\lambda_2\dfrac{\partial f_2}{\partial z_\alpha}+\cdots+\lambda_k\dfrac{\partial f_k}{\partial z_\alpha}. \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Multiplikatoren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ sind die k Gleichungen

(1) in der Art zu verwenden, wie dies § 14, 5 und 6 für Spezialfälle auseinandergesetzt wurde. Die Gleichungen (1) sind zweimal nach der Zeit zu differentiieren, worauf für die Grösen

$$\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2}$$

die sich aus (5) ergebenden Werte einzusetzen sind; aus den erhaltenen n Gleichungen sind $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ zu berechnen.

3. Die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen sind mit dem d'Alembert'schen Prinzip vollkommen äquivalent; man kann auch das letztere aus den ersteren ableiten. Man braucht nur die mit $\delta x_\alpha, \delta y_\alpha, \delta z_\alpha$ multiplizierten Gleichungen (5) zu addieren und die mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ multiplizierten Gleichungen (3) hinzuzufügen, um wieder zum d'Alembert'schen Prinzip zu gelangen.

Die Bedingungsgleichungen können in unendlich viele Formen gebracht werden; in jedem Falle behalten die Lagrange'schen Gleichungen ihre Gültigkeit, da sie mit dem d'Alembert'schen Prinzip, in welchem die Form der Bedingungsgleichungen keine Rolle spielt, äquivalent sind. Übrigens läſst sich dies auch direkt durch eine einfache Transformation nachweisen.

4. Der Wert der Lagrange'schen Gleichungen beruht weniger in der Erleichterung der Rechnung, als in dem klaren Einblick, welchen sie in die Natur der Bewegung bei vorhandenen Bedingungsgleichungen gestatten. Man sieht, daſs ganz entsprechend den Entwicklungen von § 14, 5 und 6 den freien Kräften so viele Hilfskräfte zuzufügen sind, als Bedingungsgleichungen vorliegen. Diese Hilfskräfte stehen untereinander so in Beziehungen, daſs bei jeder Komponente dieselbe Kraft λ auftritt, jeweilig multipliziert mit der Gröſse $\frac{\partial f}{\partial x_\alpha}$ u. s. w. Enthält ein f nur die Koordinaten eines Punktes x, y, z, so steht die entsprechende Zusatzkraft nach dem angeführten Paragraphen normal zur Fläche $f(x, y, z) = 0$. Dagegen wird es weniger klar, wie sich die Hilfskräfte auf die verschiedenen Punkte verteilen; aus diesem Grunde benutzten wir nicht die Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen zu deren Herleitung.

Auch im allgemeinen Falle können wir uns unter

$$f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \ldots) = 0$$

eine Fläche vorstellen, wenn wir nur alle Variabeln auſser x_1, y_1, z_1 für den Augenblick als konstant annehmen. Die Hilfskraft, welche für den Punkt m_1 zuzufügen ist, steht dann auf dieser Fläche, die sich in jedem Momente ändert, senkrecht. Ebenso können wir aber in $f = 0$ auch x_2, y_2, z_2 allein als variabel betrachten und erhalten so eine analoge Beziehung für den Punkt x_2, y_2, z_2 u. s. w.

5. Schreiben wir für (5) abkürzungsweise

$$(6)\qquad \begin{cases} m_\alpha \dfrac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = X_\alpha + L_\alpha, \\ m_\alpha \dfrac{d^2 y_\alpha}{dt^2} = Y_\alpha + M_\alpha, \\ m_\alpha \dfrac{d^2 z_\alpha}{dt^2} = Z_\alpha + N_\alpha \end{cases}$$

und setzen wir diese Gröfsen, welche als Komponenten der Kräfte bei einer freien Bewegung betrachtet werden können, in die Gleichung (2) des d'Alembert'schen Prinzips ein, so erhalten wir

$$(7)\qquad \sum [L_\alpha \delta x_\alpha + M_\alpha \delta y_\alpha + N_\alpha \delta z_\alpha] = 0.$$

Die durch die Bedingungen indizierten Kräfte halten sich also untereinander das Gleichgewicht.

Man bezeichnet $-L_\alpha$, $-M_\alpha$, $-N_\alpha$ als die Komponenten der verlorenen Kräfte und kann daher auch sagen: Bei der unfreien Bewegung befinden sich die verlorenen Kräfte untereinander im Gleichgewicht.

Hiernach bezeichnet man auch das d'Alembert'sche Prinzip als den Satz von den verlorenen Kräften.

§ 23.

Das Fourier'sche Prinzip.

1. Eine interessante, wenn auch praktisch kaum verwendbare Erweiterung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten hat Fourier*) gegeben. Es handelt sich darum, das Princip auch auf den Fall auszudehnen, dafs die Bedingungen alle oder teilweise in Gestalt von Ungleichheiten gegeben sind. So kann z. B. vorgeschrieben werden, dafs ein materieller Punkt sich immer aufserhalb einer Kugel bewegen soll. Seine Bewegung ist dann eine vollkommen freie, so lange er nicht mit der Kugel in Berührung kommt; im letzteren Falle jedoch steht es ihm frei, sich auf der Kugeloberfläche weiter zu bewegen oder sich wieder in den äufseren Raum zu begeben, während ihm ein Eindringen in den inneren Kugelraum versagt bleibt. Ein zweites Beispiel bieten zwei mate-

*) Dieses Prinzip wird von Gauss ohne Beweis in der Abhandlung: Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik, Ges. Werke, B. 5, p. 28 mitgeteilt; Fourier begründete es jedoch bereits früher ausführlich in der Abhandlung: Sur la statique, Journ. de l'école polyt., Cah. 5, An 6. Russische Autoren schreiben es ihrem Landsmann Ostrogradsky zu. Der Verfasser verdankt die Kenntnis des Prinzips, welches ziemlich wenig bekannt zu sein scheint und in der Litteratur selten Erwähnung findet, den Vorlesungen von Koenigsberger. In Schell's Werk (B. II, p. 175) wird das Prinzip nur sehr kurz erörtert.

rielle Punkte, welche durch einen massenlosen unausdehnbaren, aber biegsamen Faden verbunden sind.

Das Fourier'sche Prinzip lautet, wenn die früheren Bezeichnungen beibehalten werden:

Die notwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichtes eines Systems von n materiellen Punkten, welches gegebenen Ungleichheiten, zu denen auch Gleichungen treten können, Genüge leisten soll, ist

$$\sum_{1}^{n} (X_\alpha \delta x_\alpha + Y_\alpha \delta y_\alpha + Z_\alpha \delta z_\alpha) \leqq 0 . \tag{1}$$

Die Verschiebungen δx_α, δy_α, δz_α müssen den Bedingungen genügen, sind aber sonst willkürlich.

Die Bedingungen sollen sich nur auf die Koordinaten der Systempunkte beziehen.

Wir wollen das Prinzip zuerst an Beispielen eingehend erproben, dann allgemein begründen.

2. Möge — um das erste vorhin erwähnte Beispiel sogleich zu verallgemeinern — eine Fläche vorgelegt sein, welche den Gesamtraum in zwei getrennte Teile zerlegt; der eine derselben möge als der äufsere bezeichnet werden, eine Bezeichnung, die willkürlich wird, falls beide Teile unendlich sind. Wir setzen fest, dafs sich der materielle Punkt in dem äufseren Teile bewegen möge; die Umkehrung der Festsetzung bringt auch bei geschlossenen Flächen keine Änderung der Verhältnisse hervor. So lange sich der Punkt nicht an der Grenze selbst befindet, ist er völlig frei; soll Gleichgewicht statthaben, so mufs bei Innehaltung der früheren Bezeichnung $P = 0$, also auch

$$P \cos \lambda \, \delta p = 0$$

sein. An der Grenze selbst tritt aber Gleichgewicht ein, falls entweder $P = 0$ ist, oder falls die Richtung dieser Kraft normal zur Grenzfläche steht und nach innen geht. Da andrerseits eine virtuelle Verrückung entweder in der Fläche oder nach der Aufsenseite unter irgend einem Winkel statthat, so ist der Winkel λ zwischen P und δp ein rechter oder stumpfer, also $\cos \lambda \leqq 0$. Infolge dessen ist in allen Fällen

$$P \cos \lambda \delta p \leqq 0. \tag{2}$$

Umgekehrt folgt aus (2) das Statthaben des Gleichgewichtes. Befindet sich nämlich der Punkt im freien Raume, so finden sich unter den ganz willkürlichen δp unendlich viele, die mit der Kraftrichtung einen spitzen Winkel einschliefsen, also $\cos \lambda > 0$ machen. Daher ist für diese Lage (2) nur durch die Annahme $P = 0$ allgemein zu befriedigen. Ist aber der Punkt an die Grenzfläche gelangt, so fordert (2), dafs die Kraftrichtung mit keiner der möglichen Verrückungen einen spitzen Winkel bildet. Diese Bedingung befriedigt aber nur eine Kraft, welche normal

zur Fläche nach innen geht, deren Wirkung also durch den Widerstand der Fläche aufgehoben wird. So ist (2) auch die hinreichende Bedingung des Gleichgewichtes.

3. Für das zweite angeführte Beispiel der beiden durch einen unausdehnbaren Faden verbundenen materiellen Punkte lautet die Bedingung

$$(3) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \leqq r^2 .$$

So lange die beiden Punkte m und m_1 ihren Maximalabstand r nicht erreicht haben, befinden sie sich in freiem Zustande; das Vorhandensein des Gleichgewichtes fordert hier das Verschwinden der beiden Kräfte P und P_1, welche auf m und m_1 einwirken. Befinden sich aber die Punkte im Abstande r, ist also der Faden gespannt, so mufs $P_1 = P$ sein und beide Kräfte müssen in der Richtung des Fadens derart wirken, dafs sie m und m_1 voneinander zu entfernen streben*). Die virtuellen Verrückungen δp und δp_1 müssen in dieser Lage so gerichtet sein, dafs sie keine Vergröfserung des Abstandes $m m_1$ nach sich ziehen. Dies liefert die Bedingung

$$(4) \qquad \cos\lambda\, \delta p + \cos\lambda_1\, \delta p_1 \leqq 0 .$$

Der linksstehende Ausdruck giebt nämlich die Vergröfserung an, welche die Projektion des Abstandes der beiden materiellen Punkte auf die ursprüngliche Lage des Fadens erfährt; da diese Projektion offenbar von dem Abstande selbst nur um unendlich kleine Gröfsen höherer Ordnung verschieden ist, kann die Vergröfserung nach Erreichung des Maximalabstandes nur eine negative oder verschwindende sein. Wegen $P = P_1$ können wir für (4) schreiben

$$(5) \qquad P \cos\lambda\, \delta p + P_1 \cos\lambda_1\, \delta p_1 \leqq 0 ,$$

und es ist nach dem Gesagten klar, dafs diese Relation bei stattfindendem Gleichgewicht für jede Lage der Punkte gilt.

Auch die Umkehrung ist unschwer zu erweisen. Ist der Abstand der Punkte geringer als r, so ist es nicht zu vermeiden, dafs für geeignete Richtungen der willkürlichen Verschiebungen δp und δp_1 $\cos\lambda$ und $\cos\lambda_1$ positiv werden; daher kann (5) nur unter der Voraussetzung $P = P_1 = 0$ bestehen. In der Grenzlage ist erforderlich, dafs nicht λ und λ_1 gleichzeitig spitze Winkel, also $\cos\lambda$ und $\cos\lambda_1$ positiv sind; die Anschauung zeigt, dafs dies für sämtliche zulässigen δp und δp_1 nur möglich ist, wenn P und P_1 entgegengesetzt sind und m und m_1 zu entfernen suchen. Legt man aber δp und δp_1 in die Richtung des Fadens, so wird

$$\delta p = \delta p_1 \quad \text{und} \quad \cos\lambda = -\cos\lambda_1 = \pm 1 ,$$

woraus einmal $P \leqq P_1$, einmal $P \geqq P_1$, d. h. $P = P_1$ folgt. (5) ist also auch die hinreichende Gleichgewichtsbedingung.

---

*) λ und λ_1 sind daher hier die Winkel, welche δp und δp_1 mit dem gespannten Faden bilden, jedoch in entgegengesetztem Sinne gerechnet.

4. Im allgemeinen Falle können wir, den in § 22, 4 gewonnenen Anschauungen entsprechend, die Bedingungen, soweit sie als Gleichungen in Geltung treten, durch Normalkräfte N_α ersetzen, durch welche das System in ein freies verwandelt wird; es mufs daher, wenn durch ν_α der Winkel von N und δp_α bezeichnet wird,

$$\sum_1^n {}^\alpha [P_\alpha \cos \lambda_\alpha + N_\alpha \cos \nu_\alpha] \, \delta p_\alpha = 0 \tag{6}$$

sein. Solange die Grenzbedingungen nicht in Geltung treten, solange also die materiellen Punkte des Systems nicht an die vorgeschriebenen Flächen gelangen u. s. w., ist $N_\alpha = 0$, so dafs

$$\sum_1^n {}^\alpha P_\alpha \cos \lambda_\alpha \delta p_\alpha = 0 \tag{7}$$

die Gleichgewichtsbedingung darstellt. Im andern Falle müssen aber die Verrückungen solche Richtungen haben, dafs sie mit den Normalkräften spitze oder rechte Winkel bilden*). Daher wird

$$\sum_1^n {}^\alpha N_\alpha \cos \nu_\alpha \delta p_\alpha \geqq 0,$$

somit

$$\sum_1^n {}^\alpha P_\alpha \cos \lambda_\alpha \delta p_\alpha \leqq 0, \tag{8}$$

und diese Relation oder die äquivalente (1) ist die notwendige Bedingung des Gleichgewichtes. — Die Umkehrung wird nach Analogie der behandelten Spezialfälle dargethan.

Das Fourier'sche Prinzip beruht genau auf denselben Grundvoraussetzungen wie dasjenige der virtuellen Geschwindigkeiten. Auf den Zustand der Bewegung übertragen liefert es jedoch im allgemeinen keine bestimmten Gleichungen.

§ 24.

Die allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen der Bewegung.

1. In § 10 gelang es uns, sieben Integrale der Bewegungsgleichungen eines Systems von materiellen Punkten, welche sich gegenseitig anziehen oder abstofsen, anzugeben. Auch in dem allgemeinen Falle, wo die Differentialgleichungen der Bewegung durch das d'Alembert'sche Prinzip bestimmt sind, können unter genau zu präzisierenden beschränkenden Voraussetzungen dieselben Integrale hergeleitet werden. Diese Integrale liefern

*) Wie bei Konstruktion der in § 22, 4 angenommenen Flächen unmittelbar klar ist.

uns drei Sätze, welche in wenig zweckmäfsiger Weise gleichfalls als Prinzipien der Mechanik bezeichnet werden: die Prinzipien von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes, von der Erhaltung der lebendigen Kraft und von der Erhaltung der Flächen. Korrekter wäre es, nur solche Sätze als Prinzipien zu benennen, welche nicht das Resultat einer mathematischen Entwicklung geben, sondern Abstraktionen von Erfahrungsthatsachen in eine allgemeine Formel zusammenfassen; solcher Art sind die bisher behandelten Prinzipien*). Die hier zu besprechenden sind nur Ableitungen aus dem d'Alembert-schen Prinzip. Späterhin werden wir endlich noch Prinzipien kennen lernen, welche Umformungen des d'Alembert'schen Prinzipes unter einschränkenden Annahmen sind.

2. Summiert man von den Gleichungen (5) in § 22 immer diejenigen, welche die Differentialquotienten der entsprechenden Koordinaten enthalten, so ergiebt sich — von jetzt ab möge die Summationsbezeichnung etwas vereinfacht werden —

$$(1)\begin{cases} \sum m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = \sum X_\alpha + \lambda_1 \sum \frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} + \cdots + \lambda_k \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha}, \\ \sum m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} = \sum Y_\alpha + \lambda_1 \sum \frac{\partial f_1}{\partial y_\alpha} + \cdots + \lambda_k \sum \frac{\partial f_k}{\partial y_\alpha}, \\ \sum m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} = \sum Z_\alpha + \lambda_1 \sum \frac{\partial f_1}{\partial z_\alpha} + \cdots + \lambda_k \sum \frac{\partial f_k}{\partial z_\alpha}. \end{cases}$$

Definieren wir wie früher den Schwerpunkt ξ, η, ζ des Systems durch die Gleichungen (§ 10, (3))

$$(2)\quad \begin{cases} M = \sum m_\alpha, \\ M\xi = \sum m_\alpha x_\alpha, \quad M\eta = \sum m_\alpha y_\alpha, \quad M\zeta = \sum m_\alpha z_\alpha, \end{cases}$$

so können wir statt (1) schreiben

$$(3)\quad \begin{cases} M \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \sum X_\alpha + \lambda_1 \sum \frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} + \cdots + \lambda_k \sum \frac{\partial f_k}{\partial x_\alpha}, \\ M \frac{d^2 \eta}{dt^2} = \sum Y_\alpha + \lambda_1 \sum \frac{\partial f_1}{\partial y_\alpha} + \cdots + \lambda_k \sum \frac{\partial f_k}{\partial y_\alpha}, \\ M \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = \sum Z_\alpha + \lambda_1 \sum \frac{\partial f_1}{\partial z_\alpha} + \cdots + \lambda_k \sum \frac{\partial f_k}{\partial z_\alpha}. \end{cases}$$

Der Schwerpunkt eines beliebigen Systems, welches dem d'Alembert'schen Prinzip genügt, bewegt sich also so, wie

*) Der weite Gebrauch des Wortes Prinzip erklärt sich aus der geschichtlichen Entwicklung. Das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft wurde z. B. von Huyghens als Grundlage mechanischer Herleitungen benutzt.

wenn in ihm die Gesamtmasse des Systems vereinigt wäre und zugleich in ihm die sämtlichen Kräfte des letzteren, einschliefslich die Zusatzkräfte, welche der Bedingungsgleichungen wegen zugefügt werden, parallel zu ihrer wirklichen Richtung angriffen.

3. Die Gleichungen (3) vereinfachen sich sehr bedeutend, wenn die Bedingungsgleichungen nur von den Differenzen je zweier x-Koordinaten, je zweier y-Koordinaten und je zweier z-Koordinaten abhängen. Da nämlich $x_\alpha - x_\beta = (x_\alpha - x_1) - (x_\beta - x_1)$ ist, so kann man sich dann die Funktionen f als Funktionen der Gröfsen (β möge die Werte $2, 3, \ldots n$ annehmen)

$$u_\beta = x_\beta - x_1, \quad v_\beta = y_\beta - y_1, \quad w_\beta = z_\beta - z_1$$

allein denken. Demgemäfs ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_\beta} = \frac{\partial f}{\partial u_\beta}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\partial f}{\partial u_2} - \frac{\partial f}{\partial u_3} - \cdots - \frac{\partial f}{\partial u_n}$$

u. s. w.,

also

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \tag{4}$$

u. s. w.

Hierdurch wird aus den Gleichungen (3)

$$\left\{\begin{aligned} M\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \sum X_\alpha, \\ M\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \sum Y_\alpha, \\ M\frac{d^2\zeta}{dt^2} &= \sum Z_\alpha. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

In diesem Falle, der immer eintritt, wenn die Bedingungen sich nur auf den gegenseitigen Abstand der materiellen Punkte beziehen, kommen also die Bedingungsgleichungen für die Bewegung des Schwerpunktes gar nicht in Betracht; derselbe bewegt sich, wie wenn die Gesamtmasse des Systems in ihm vereinigt wäre und alle Kräfte (ohne Zusatzkräfte), parallel zu ihrer wirklichen Richtung, in ihm angriffen*).

Sind keine Bedingungsgleichungen vorhanden, so trifft (5) natürlich immer zu.

4. Wir setzen jetzt weiter voraus, dafs sämtliche Kräfte des Systems eine Kräftefunktion U besitzen, welche ebenfalls nur von jenen Differenzen $x_\alpha - x_\beta$ u. s. w. abhängig sei; es ist dann

---

*) Der Satz von § 10, 12 ergiebt sich aus diesem Resultate leicht durch Vernachlässigung unendlich kleiner Gröfsen zweiter Ordnung.

$$X_\alpha = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha}, \quad Y_\alpha = \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}, \quad Z_\alpha = \frac{\partial U}{\partial z_\alpha}$$

und infolge derselben Entwicklung, welche zu (4) führte,

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{\partial U}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial U}{\partial x_n} = 0$$

u. s. w.,

so dafs (5) die Gestalt

$$(6) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0$$

annimmt. Die Integration liefert

$$(7) \qquad \xi = a_1 t + a_2, \quad \eta = b_1 t + b_2, \quad \zeta = c_1 t + c_2,$$

woraus durch Elimination von t

$$(8) \qquad \frac{\xi - a_2}{a_1} = \frac{\eta - b_2}{b_1} = \frac{\zeta - c_2}{c_1}$$

folgt.

Auch wenn keine Kräftefunktion vorhanden ist, die Kräfte aber nur zwischen je zwei Punkten des Systems thätig sind und dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung genügen, werden die rechten Seiten von (5) der Null gleich, da sich die X_α u. s. w. aus einzelnen Teilen zusammensetzen, welche entgegengesetzt gleich sind; es gelten also die gleichen Resultate. Nennen wir Kräfte dieser Art innere, so haben wir den Satz:

Der Schwerpunkt eines Systems materieller Punkte, welche nur inneren Kräften ausgesetzt sind und auch nur Bedingungen zu befriedigen haben, welche sich lediglich auf ihre gegenseitige Lage beziehen, bewegt sich in einer Geraden mit gleichbleibender Geschwindigkeit.

Huyghens und Newton sind als die Entdecker dieses Gesetzes anzusehen.

Setzt man in (7) die aus (2) folgenden Werte für ξ, η, ζ ein, so erkennt man, dafs (7) wirklich drei vollständige Integrale der Bewegungsgleichungen repräsentiert. In den übrigen Fällen sind diese nicht zu erhalten.

Es gelten nur die Gleichungen (5), wenn aufser den gegenseitigen noch Einwirkungen von anderen Punkten her stattfinden. Auf die Gleichungen (3) bleiben wir beschränkt, wenn den Punkten teilweise feste Flächen oder Kurven als Örter der Bewegung zuerteilt werden.

Die Resultate (5) und (6) und speziell (7) werden als das Prinzip der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes bezeichnet.

5. Da die aktuellen Verrückungen zugleich virtuelle sind, wenn die Zeit in den Bedingungsgleichungen nicht vorkommt, so dürfen wir in der d'Alembert'schen Gleichung (§ 21, (2)) die Variationen δx_α, δy_α, δz_α

durch die aktuellen Verrückungen dx_α, dy_α, dz_α ersetzen. Wir erhalten, wenn wir durch dt dividieren,

$$(9)\qquad \sum m_\alpha\left[\frac{d^2x_\alpha}{dt^2}\frac{dx_\alpha}{dt}+\frac{d^2y_\alpha}{dt^2}\frac{dy_\alpha}{dt}+\frac{d^2z_\alpha}{dt^2}\frac{dz_\alpha}{dt}\right]$$
$$=\sum\left[X_\alpha\frac{dx_\alpha}{dt}+Y_\alpha\frac{dy_\alpha}{dt}+Z_\alpha\frac{dz_\alpha}{dt}\right].$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist ein vollständiger Differentialquotient; die rechte Seite wird ebenfalls zu einem solchen, wenn die Kräfte eine von der Zeit unabhängige Kräftefunktion U besitzen. Die rechte Seite nimmt nämlich dann die Gestalt an

$$(10)\qquad \sum\left[\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}\frac{dx_\alpha}{dt}+\frac{\partial U}{\partial y_\alpha}\frac{dy_\alpha}{dt}+\frac{\partial U}{\partial z_\alpha}\frac{dz_\alpha}{dt}\right]=\frac{dU}{dt}.$$

Durch Integration finden wir

$$(11)\qquad \frac{1}{2}\sum m_\alpha\left[\left(\frac{dx_\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_\alpha}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_\alpha}{dt}\right)^2\right]=U+c$$

oder

$$(12)\qquad \frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2=U+c,$$

die bekannte Gleichung, welche das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft ausspricht.

Dasselbe hat lediglich die Existenz einer gemeinsamen, von der Zeit unabhängigen Kräftefunktion der sämtlichen wirkenden Kräfte zur Grundlage. Die Bedingungsgleichungen stören die Gültigkeit des Prinzips in keiner Weise, allerdings nur unter der Voraussetzung, daſs sie keinen anderen Einfluſs ausüben, als den bei der Herleitung des d'Alembertschen Prinzips angenommenen.

Bei stattfindender Reibung in dem die Verbindungen vermittelnden Mechanismus verliert das Prinzip seine Gültigkeit.

Die Gröſse

$$(13)\qquad \int_{t_0}^{t}\sum(X_\alpha dx_\alpha+Y_\alpha dy_\alpha+Z_\alpha dz_\alpha)$$
$$=\sum\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha}dx_\alpha+\frac{\partial U}{\partial y_\alpha}dy_\alpha+\frac{\partial U}{\partial z_\alpha}dz_\alpha\right)=U-U_0$$

können wir nach Früherem als die von den Kräften während der Zeit $t=t_0$ bis $t=t$ geleistete Arbeit betrachten (für $t=t_0$ möge $U=U_0$ werden)*).

*) Es kann auch vorkommen, daſs das Integral auf der linken Seite von (13) ausführbar ist, ohne daſs eine Kräftefunktion existiert. Sind die Koordinaten sämtlicher Punkte als Funktionen der Zeit bekannt, so lassen sich auch X_α, Y_α, Z_α der gegebenen Bewegung entsprechend als Funktionen von t be-

6. Die Bewegung eines Systems hängt bekanntlich nicht allein von den wirkenden Kräften und den eventuell vorgeschriebenen Bedingungsgleichungen ab, sondern auch von den gegebenen Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten der einzelnen Elemente. Wären uns z. B. die Kräfte vollkommen bekannt, welche die gesamte Welt bewegen — und es ist nicht unwahrscheinlich, dafs diese Erkenntnis über lang oder kurz erreicht werden wird —, so wäre der Weltlauf hiermit noch keineswegs bestimmt. Vielmehr könnte die Welt ein von dem wirklichen gänzlich verschiedenes Aussehen zeigen, wenn die Konstanten anders bestimmt wären. Während es nun sehr leicht ist, die Wirkung bekannter Kräfte durch Differentialgleichungen auszudrücken, ist die Berücksichtigung der Geschwindigkeiten, wie sie für einen bestimmten Moment willkürlich vorgeschrieben werden können, durch die Ausführung der Integration dieser Differentialgleichungen bedingt, eine Aufgabe, deren Lösung nur in den einfachsten Fällen vollständig gelingt. Es ist daher nicht zu verwundern, dafs die wenigen allgemeineren Integralgleichungen, welche sich herstellen lassen und die einen, wenn auch nur sehr unvollständigen Einblick in das Zusammenwirken von Kräften und Geschwindigkeiten gestatten, die gröfste Aufmerksamkeit auf sich gezogen haben. Dies gilt insbesondere von der Gleichung, welche das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft ausdrückt. Aber gerade wegen des allgemeinen Interesses an diesem Prinzipe mufs davor gewarnt werden, ihm eine allzuweit gehende Tragweite beizulegen. Vor allen Dingen beachte man, dafs das Prinzip bei einem System von n Elementen weniger aussagt als bei einem einzelnen Elemente; es liefert eben immer nur eine von mehr oder weniger zahlreichen Gleichungen. Auch ist nicht zu vergessen, dafs die Arbeit und die lebendige Kraft nach unseren früheren Erörterungen keineswegs so einfach zu interpretierende Begriffe sind, wie man gewöhnlich annimmt. Im Grunde genommen verdanken sie ihre Bedeutung eben nur dem Umstande, dafs sie in der allgemeinen Integralgleichung auftreten.

Der (nach des Verfassers Ansicht nicht ganz sachentsprechenden) Ausdrucksweise von Rankine folgend bezeichnet man häufig die lebendige Kraft eines Systems als dessen aktuelle oder kinetische Energie, die Gröfse $-U$ dagegen (die noch eine willkürliche Konstante enthält) als die potentielle Energie desselben. Die Gesamtenergie des Systems ist dann, wenn (12) gilt, konstant. Das System wird in diesem Falle als konservativ bezeichnet.

Die Gültigkeit des Satzes von der lebendigen Kraft (im engeren Sinne) hängt ab von dem Vorhandensein einer Kräftefunktion; wir haben deren Existenz für beliebige Zentralkräfte, welche zwischen den n materiellen Punkten wirken, nachgewiesen; doch dürfen aufserdem auch

---

stimmen, und die Integration kann ausgeführt werden. Es gilt dann eine (12) analoge Gleichung, auf die jedoch die folgenden Betrachtungen keine Anwendung zu finden brauchen.

Kräfte auftreten, welche nach festen Zentren gerichtet sind. Charakteristisch ist, daſs diese Kräfte nur von den Koordinaten der sämtlichen Elemente des Systems, also von der gegenseitigen Gruppierung der Elemente und der festen Zentren, abhängen. Die Kräfte dürfen sich nicht mit der Zeit ändern, soweit dies nicht durch die mit der Zeit vor sich gehende Ortsänderung bedingt ist, d. h. die Kräftefunktion darf t nicht *explizite* enthalten. Ferner dürfen im allgemeinen die Kräfte nicht von den Differentialquotienten der Koordinaten, also insbesondere nicht von den Geschwindigkeiten abhängen; bei Reibung, Luftwiderstand u. s. w. gilt der Satz von der lebendigen Kraft nicht.

Der Schwerpunkt der berühmten Untersuchungen von v. Helmholtz „Über die Erhaltung der Kraft"*) liegt darin, daſs der Verfasser nach den verschiedensten Richtungen hin wahrscheinlich macht, daſs in der Natur überhaupt nur solche Kräfte existieren, welche eine Kräftefunktion besitzen. Die Begriffe Reibung, Luftwiderstand u. s. w. sind hiernach nur als ein unvollkommener Ersatz komplizierter Vorgänge in der Wirklichkeit anzusehen. Der Verlust an lebendiger Kraft ist ein scheinbarer; der verlorene Teil wird in Wärmebewegung umgesetzt.

Die angeführten Bedingungen für das Bestehen des Prinzips von der Erhaltung der lebendigen Kraft sind, wie schon aus der Anmerkung zu 5. hervorgeht, nur hinreichende, keine notwendigen. Bedenkt man, daſs die Bedingungsgleichungen, welche das Prinzip nicht beeinträchtigen, durch Kräfte ersetzt werden können, welche von den Geschwindigkeiten nicht frei sind, so gelangt man zu der Einsicht, daſs das Prinzip (modifiziert) unter Umständen bei Kräften erhalten bleibt, welche von den Geschwindigkeiten abhängig sind. Und in der That haben neuere Untersuchungen gezeigt, daſs auch sonst Kräfte möglich sind, welche von der Geschwindigkeit, eventuell auch von der Zeit abhängig sind und doch eine Kräftefunktion zulassen und dem Prinzipe der Erhaltung der lebendigen Kraft Genüge leisten. Das Weber'sche elektrodynamische Gesetz gehört hierher**).

Der Satz von der lebendigen Kraft sagt, wenn man von Erweiterungen der letztbesprochenen Art absieht, in erster Linie aus, daſs die lebendige Kraft in jedem Momente nur von den Koordinaten der bewegten Punkte abhängt. Kehren daher sämtliche Elemente im Verlaufe der Bewegung in eine frühere Stellung zurück, so wird dann die lebendige Kraft wieder dieselbe. Bei einem einzigen materiellen Punkte sagt dies, daſs seine Geschwindigkeit wieder dieselbe geworden ist, was

*) Gesammelte Werke B. I, pag. 12—75.

**) Siehe hierüber Holzmüller, Über die Anwendung der Jacobi-Hamilton'schen Methode auf den Fall der Anziehung nach dem elektrodynamischen Gesetze von Weber, Schlöm. Zeitschr. B. 15, pag. 69. Vgl. ferner Simony, Über eine Erweiterung der Gültigkeitsgrenzen einiger allgemeiner Sätze der Mechanik, Wiener Berichte, B. I; Michaelis, Over het beginsel van het behoud der energie, Nieuw Arch., Amsterdam, B. VI, pag. 1.

für mehrere Elemente nicht gilt*). Diese Folgerung erklärt den Namen des Prinzipes, welcher von der Erhaltung der lebendigen Kraft spricht. Es ist durchaus nicht unmöglich, dafs im besonderen Falle sich die lebendige Kraft, und weil der Ausdruck für dieselbe nur positive Glieder enthält, auch die einzelnen Geschwindigkeiten für die Dauer der Null nähern; die parabolische Kometenbewegung liefert hierfür ein Beispiel. Ein fortwährendes, stets gleichbleibendes Oszillieren ist durch den Satz von der lebendigen Kraft nur in einzelnen Fällen bedingt.

7. Der Satz über die lebendige Kraft enthält die absoluten Geschwindigkeiten der Elemente; er läfst sich aber leicht so umwandeln, dafs die relativen Geschwindigkeiten in Bezug auf den Schwerpunkt darin vorkommen, wenn nur die Relation (6) erfüllt ist. Bezeichnen x'_α, y'_α, z'_α die Koordinaten des Punktes x_α, y_α, z_α, falls der Schwerpunkt zum Nullpunkt genommen wird, v'_α die relative Geschwindigkeit dieses Punktes gegen den Schwerpunkt, so ist

$$v_\alpha^2 = \left(\frac{d\xi}{dt} + \frac{dx'_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} + \frac{dy'_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt} + \frac{dz'_\alpha}{dt}\right)^2$$

oder nach (7)

$$v_\alpha^2 = \left(a_1 + \frac{dx'_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(b_1 + \frac{dy'_\alpha}{dt}\right)^2 + \left(c_1 + \frac{dz'_\alpha}{dt}\right)^2$$

$$= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 2a_1\frac{dx'_\alpha}{dt} + 2b_1\frac{dy'_\alpha}{dt} + 2c_1\frac{dz'_\alpha}{dt} + v'^2_\alpha.$$

Hiernach wird, wenn man (2) berücksichtigt,

$$(14)\qquad \frac{1}{2}\sum m_\alpha v_\alpha^2 = \frac{1}{2}M(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + \frac{1}{2}\sum m_\alpha v'^2_\alpha.$$

Da die lebendige Kraft des Schwerpunktes, in den man sich wieder die Gesamtmasse des Systems verlegt denkt, eine konstante, positive Gröfse ist, so gilt auch für die relative Bewegung gegen den Schwerpunkt der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft. An Stelle von c in (11) tritt nur

$$c - \frac{1}{2}M(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).$$

Zugleich ist ersichtlich, dafs die absolute lebendige Kraft des Systems im allgemeinen gröfser (nie kleiner) ist als die relative in Bezug auf den Schwerpunkt.

8. Aus § 22, (5) erhält man durch geeignete Multiplikation und Zusammenfügung

*) Die Pendelbewegung führte Huyghens zuerst auf die Erkenntnis des Prinzips im speziellen Falle.

$$(15)\qquad \sum m_\alpha\left(y_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - z_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2}\right) = \sum (y_\alpha Z_\alpha - z_\alpha Y_\alpha)$$
$$+ \lambda_1 \sum\left(y_\alpha \frac{\partial f_1}{\partial z_\alpha} - z_\alpha \frac{\partial f_1}{\partial y_\alpha}\right) + \cdots + \lambda_k \sum\left(y_\alpha \frac{\partial f_k}{\partial z_\alpha} - z_\alpha \frac{\partial f_k}{\partial y_\alpha}\right).$$

Diese Gleichung vereinfacht sich wesentlich unter der Voraussetzung, dafs erstens eine Kräftefunktion U für sämtliche Kräfte des Systems vorhanden ist und dafs zweitens sowohl diese wie sämtliche Bedingungsgleichungen ungeändert bleiben*), wenn das System eine beliebige Drehung um die x-Achse ausführt.

Setzen wir nämlich

$$y = r\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta,$$

so ist ersichtlich, dafs eine Funktion

$$\varphi(y, z) = \varphi(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$$

dann und nur dann bei einer Drehung um die x-Achse, d. h. bei einer beliebigen Änderung von ϑ, ungeändert bleibt, wenn ϑ ganz aus der Funktion herausfällt, dieselbe also y und z nur in der Verbindung $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ enthält. Ist aber φ eine Funktion von $y^2 + z^2$, so folgt, wenn φ' den nach $y^2 + z^2$ genommenen Differentialquotienten bedeutet,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 2y\varphi', \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 2z\varphi',$$

somit

$$(16)\qquad y\frac{\partial\varphi}{\partial z} - z\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

Führt man daher die angegebene Beschränkung in (15) ein und beachtet, dafs das erste Glied der rechten Seite in

$$\sum\left(y_\alpha \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} - z_\alpha \frac{\partial U}{\partial y_\alpha}\right)$$

übergeht, so wird die Gleichung mit Rücksicht auf (16) zu

$$(17)\qquad \sum m_\alpha\left(y_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - z_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2}\right) = 0.$$

Die Integration von (17) liefert

$$(18)\qquad \sum m_\alpha\left(y_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt} - z_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt}\right) = c_1.$$

Läfst auch eine Drehung um die y-, resp. z-Achse die Kräftefunktion und die Bedingungsgleichungen ungeändert, so erhalten wir die analogen Gleichungen

$$(19)\qquad \sum m_\alpha\left(z_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} - x_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt}\right) = c_2,$$

*) D. h. nach einer solchen Drehung sollen sich Kräftekomponenten und Bedingungsgleichungen noch durch dieselben analytischen Ausdrücke darstellen wie vorher.

$$\sum m_\alpha \left(x_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt} - y_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt}\right) = c_3. \tag{20}$$

Diese drei Gleichungen enthalten das Prinzip der Erhaltung der Flächen oder die Flächensätze*). Eine nähere Erörterung ist nach den eingehenden früheren Untersuchungen nicht nötig.

Die Flächensätze treten alle drei in Geltung bei einem freien System mit einer Kräftefunktion, in welchem die Elemente nur gegenseitigen Einwirkungen unterliegen; auch Verbindungen derselben untereinander stören nicht. Ist ein festes Zentrum vorhanden, so gelten die Flächensätze, falls dieses zum Nullpunkte des Koordinatensystems genommen wird. Sind zwei oder mehrere feste Zentren vorhanden, welche in einer Geraden liegen, so gilt ein Flächensatz für die zu der Geraden senkrechten Ebene. Bei anderen Gruppierungen fester Zentren sind keine Flächensätze möglich. Auch bei der Bewegung eines Punktes auf einer Rotationsfläche ist ein Flächensatz vorhanden, nämlich für die Ebene, welche auf der Rotationsachse senkrecht steht (vgl. § 19, (4)) u. s. w.

Bemerkt möge noch werden, dafs auch ohne Vorhandensein einer Kräftefunktion Flächensätze möglich sind, wenn nur

$$\sum (y_\alpha Z_\alpha - z_\alpha Y_\alpha) \quad \text{u. s. w.}$$

identisch verschwinden**).

9. Falls die drei Flächensätze gelten, lassen sich die Betrachtungen von § 10, 6, 7, 8 wiederholen, zum Teil natürlich nur, wenn auch (7) gilt; insbesondere läfst sich auch die unveränderliche Ebene aufstellen. Es erscheint unnötig, die ganze Entwicklung nochmals vorzutragen.

10. Die Flächensätze geben, wo sie gültig sind, über den Verlauf der Bewegung nicht minder interessanten Aufschlufs, wie der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft; sie liefern nur Resultate, welche von der Wirkungsweise der speziellen auftretenden Kräfte ganz unabhängig sind. Wird in einem Momente von den Radienvektoren, welche vom Nullpunkte ausgehen, eine bestimmte Flächensumme (d. h. eine Summe von Flächen, welche mit Massen multipliziert sind) beschrieben, so bleibt dieselbe konstant, was eine Garantie für die ewige Fortdauer der Bewegung bietet. Nur wenn einzelne Elemente sich ins Unendliche

---

*) Das Flächenprinzip wurde im speziellen Falle bei der Planetenbewegung durch Newton als eine Folge des Gravitationsgesetzes nachgewiesen, nachdem es durch Kepler aus Beobachtungen abgeleitet worden war. Seine allgemeinere Geltung wurde von Euler, Dan. Bernoulli und d'Arcy erkannt.

**) Die Bedingungen, wann Flächensätze und der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes in Kraft treten, wurden näher untersucht von Weyr, Bemerkungen in betreff zweier Sätze der Dynamik, Prager Berichte, 1878, pag. 133. Siehe ferner Lévy, Sur une extension des principes des aires et du mouvement du centre de gravité, Compt. rend., B. 95, pag. 772.

entfernen, können sie in endlicher Zeit eine unendlich kleine Strecke zurücklegen, kann ihre Geschwindigkeit sich der Null nähern.

11. Die drei in diesem Paragraphen entwickelten Prinzipien liefern, wenn sämtlich gültig, sieben Integrale der Bewegungsgleichungen. Hiervon sind die drei durch den Schwerpunktssatz gelieferten vollständig integrierte Gleichungen, während die vier übrigen noch Differentialgleichungen erster Ordnung darstellen. Es sind also im ganzen zehn einfache Integrationen geleistet.

12. Zum Schlusse möge noch aus der Gleichung (12) eine merkwürdige Folgerung für den Fall des Gleichgewichtes gezogen werden. Wenn eine Kräftefunktion vorhanden ist, die wir jetzt als von der Zeit unabhängig annehmen, ist nach § 21, (14) die Bedingung des Gleichgewichtes durch

$$\delta U = 0$$

dargestellt. Bei ihrem Stattfinden kann U ein Maximum sein; in diesem Falle hat das Gleichgewicht, gegenüber den andern Fällen, eine besondere Eigentümlichkeit, welche zuerst wohl von Lagrange, Mécanique analytique, 1788, pag. 38, dann von Dirichlet (Crelle, B. 32, pag. 85) hervorgehoben wurde. Nehmen wir nämlich an, daſs gleichzeitig sämtliche Geschwindigkeiten für diese Lage verschwindend klein seien, so folgt aus (12), daſs $U + c$ verschwindend klein ist. Da nun

$$\frac{1}{2} \sum m_\alpha v_\alpha^2$$

immer positiv ist, U aber in der Nachbarschaft des Maximums nur kleinere Werte annehmen kann, so folgt, daſs U in dieser ganzen Nachbarschaft im Laufe der Bewegung sich nur unendlich wenig von seinem Maximalwerte entfernt; andernfalls würde die linke Seite von (12) negativ werden. Nun muſs aber U, da es keine Konstante ist, bei endlichen Ortsänderungen auch endliche Änderungen erleiden. Hieraus folgt, daſs im Falle jenes Maximums die vorhandenen unendlich kleinen Geschwindigkeiten den Punkt nur unendlich wenig von seiner Anfangslage zu entfernen vermögen; er wird also, wenn er sich überhaupt bewegt, eine Art Oszillation um diese Lage ausführen. Man nennt ein solches Gleichgewicht, bei welchem die Erteilung einer unendlich kleinen Geschwindigkeit auch in endloser Zeit keine endliche Ortsveränderung veranlaſst, ein stabiles.

§ 25.

Weitere Prinzipien der Mechanik.

1. Das d'Alembert'sche Prinzip läſst unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen Umformungen zu, die gleichfalls als Prinzipien der Mechanik bezeichnet werden; es gehören hierher das Hamilton'sche Prinzip

der stationären Wirkung, das von Maupertuis aufgestellte Prinzip der kleinsten Wirkung*) und das Gauss'sche Prinzip des kleinsten Zwanges. Das erstgenannte werden wir in der Folge zum Ausgangspunkte weiterer Untersuchungen nehmen, während wir das zweite mehr seines historischen Interesses wegen herleiten.

2. Das Hamilton'sche Prinzip der stationären Wirkung**), kurzweg oft nur das Hamilton'sche Prinzip genannt, gilt unter der Voraussetzung, daſs eine Kräftefunktion U existiert, die jedoch von der Zeit nicht unabhängig zu sein braucht; es wird daher nicht vorausgesetzt, daſs das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft in Gültigkeit tritt. Bezeichnen wir mit

$$T = \frac{1}{2} \sum m_\alpha v_\alpha^2 \tag{1}$$

die lebendige Kraft, so lautet das Prinzip:

Sind die Koordinaten der einzelnen Elemente des Systems für die Zeitpunkte t_0 und t_1 fest gegeben, so sind die Bewegungsgleichungen in dem Ausdrucke

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0 \tag{2}$$

enthalten.

Hierbei bezieht sich die Variation auf die Koordinaten der Elemente, nicht auf die Zeit t; es wird also das Integral, genommen für die wirklich durchlaufenen Wege zwischen den festen Endpositionen, verglichen mit den Werten, die es für unendlich benachbarte Wege annimmt***). Obgleich (2) die notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Minimums oder Maximums des Integrals darstellt, so folgt aus der Erfüllung von (2) doch nicht das Vorhandensein eines solchen.

3. Um die Richtigkeit des Hamilton'schen Prinzips nachzuweisen, führen wir die angedeutete Variation wirklich aus; es ist

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta (T + U) dt ,$$

da die Integrationsgrenzen als unveränderlich zu betrachten sind. Nun ist, wenn $\frac{dx_\alpha}{dt} = x'_\alpha$ u. s. w. gesetzt wird,

---

*) Es ist dies eine nicht recht zutreffende Übersetzung des französischen „principe de la moindre action"; richtiger würde es das Prinzip der kleinsten Bewegungsgröſse genannt.

**) Hamilton, On a general method of dynamics etc.; Phil. Trans. von 1834 und 1835.

***) Zur Bestimmung der Bewegung eines Punktes ist auſser den drei Differentialgleichungen noch die Angabe von sechs Konstanten nötig. Man kann über diese so disponieren, daſs man den Ort des Punktes für zwei Zeitpunkte angiebt.

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum m_\alpha (x'_\alpha \delta x'_\alpha + y'_\alpha \delta y'_\alpha + z'_\alpha \delta z'_\alpha) dt .$$

Wir haben aber

$$\delta x' = \delta \frac{dx}{dt} = \frac{d(x + \delta x)}{dt} - \frac{dx}{dt} = \frac{d\delta x}{dt} \tag{3}$$

und bei Benutzung dieser bekannten Relation

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum m_\alpha \left(x'_\alpha \frac{d\delta x_\alpha}{dt} + y'_\alpha \frac{d\delta y_\alpha}{dt} + z'_\alpha \frac{d\delta z_\alpha}{dt} \right) dt .$$

Auf das rechtsstehende Integral kann das Verfahren der partiellen Integration angewandt werden; es liefert

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \Big[\sum m_\alpha (x'_\alpha \delta x_\alpha + y'_\alpha \delta y_\alpha + z'_\alpha \delta z_\alpha) \Big]_{t_0}^{t_1}$$
$$- \int_{t_0}^{t_1} \sum m_\alpha (x''_\alpha \delta x_\alpha + y''_\alpha \delta y_\alpha + z''_\alpha \delta z_\alpha) dt .$$

Da die Endlagen sämtlicher Systemspunkte als fest vorausgesetzt werden, so müssen die Gröfsen δx_α, δy_α, δz_α für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden; somit erhalten wir den einfacheren Ausdruck:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum m_\alpha (x''_\alpha \delta x_\alpha + y''_\alpha \delta y_\alpha + z''_\alpha \delta z_\alpha) dt . \tag{4}$$

Aufserdem haben wir

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha + \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} \delta y_\alpha + \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \delta z_\alpha \right) dt . \tag{5}$$

Hiernach geht (2) über in

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \Big[\left(m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} \right) \delta x_\alpha + \left(m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} \right) \delta y_\alpha$$
$$+ \left(m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} \right) \delta z_\alpha \Big] dt = 0 . \tag{6}$$

Soll (6) für alle zulässigen δx_α, δy_α, δz_α identisch befriedigt sein, so mufs der Ausdruck unter dem Integralzeichen verschwinden. Dies giebt aber nichts Anderes als die Gleichung des d'Alembert'schen Prinzips, mit dem sich beim Vorhandensein einer Kräftefunktion das Hamilton'sche Prinzip als äquivalent erweist, da man auch ebenso aus dem d'Alembert'schen Prinzip die Gleichung (6) folgern kann, worauf nur noch identische Transformationen vorzunehmen sind.

4. Obgleich das Hamilton'sche Prinzip ein beschränkteres Gültigkeitsgebiet besitzt wie das d'Alembert'sche, so erweist es sich doch in vielen Fällen als nützlich. Sein Vorzug besteht darin, dafs in den Funktionen T und U, die bei Änderung der Koordinaten ungeändert bleiben, viel leichter andere Koordinaten, z. B. Polarkoordinaten u. s. w., eingeführt werden können, als in den Ausdrücken $\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}$, X_α u. s. w., die im d'Alembert'schen Prinzip auftreten. Hat diese Transformation stattgefunden, so braucht man nur analog wie soeben die Variation auszuführen, das Integralzeichen wegzuwerfen u. s. w., um die fertigen Bewegungsgleichungen in den neuen Koordinaten zu erhalten.

5. Ähnlich dem Hamilton'schen Prinzipe, doch nicht von dessen Wichtigkeit, ist das weit früher aufgestellte Prinzip der kleinsten Wirkung*). Dasselbe hat nicht nur die Existenz der Kräftefunktion U, sondern auch die Gültigkeit des Prinzips der Erhaltung der lebendigen Kraft zur Voraussetzung; es verlangt also, dafs die Zeit t in U nicht explizite vorkommt. In diesem Falle liefert der Ausdruck**)

$$\delta \int \sum m_\alpha v_\alpha ds_\alpha = 0 \tag{7}$$

die Bewegungsgleichungen, wenn vorher die Zeit aus ihm mittels des Satzes von der Erhaltung der lebendigen Kraft eliminiert worden ist. Das Integral soll sich von einer festen Anfangslage der Punkte des Systems bis zu einer festen Endlage erstrecken.

Der Satz von der lebendigen Kraft liefert aber

$$\frac{1}{2} \sum m_\alpha v_\alpha^2 = U + c$$

oder

$$\frac{1}{dt^2} \sum m_\alpha ds_\alpha^2 = 2(U + c),$$

woraus

$$dt = \frac{\sqrt{\Sigma m_\alpha ds_\alpha^2}}{\sqrt{2(U + c)}} \tag{8}$$

folgt. Setzt man in (7) $\frac{ds_\alpha}{dt}$ statt v_α und eliminiert dt mittels (8), so erhält man die endgültige Form des Prinzips:

---

*) Das Hamilton'sche Prinzip, welches nicht selten mit dem Prinzip der kleinsten Wirkung gleich bezeichnet wird, ist als eine Erweiterung desselben zu betrachten.

**) Man kann nach Belieben mit Maupertuis das Integral als eine Summation über die Bewegungsgröfsen, d. h. die Produkte von Masse, Geschwindigkeit und Weg, für den angegebenen Verlauf betrachten, oder mit Euler, der ungefähr gleichzeitig wenigstens im speziellen Falle auf das Prinzip kam, als Summation über die doppelte lebendige Kraft während desselben. Es ist nämlich

$$m_\alpha v_\alpha ds_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2 dt .$$

$$(9) \qquad \delta \int \sqrt{2(U+c)} \sqrt{\sum m_\alpha \, ds_\alpha^2} = 0 \, .$$

Damit diese Gleichung einen bestimmten Sinn annimmt, müssen wir voraussetzen, dafs nach vollständiger Integration der Bewegungsgleichungen die Zeit eliminiert und hierauf sämtliche Gröfsen x_α, y_α, z_α durch eine derselben, z. B. x_1 ausgedrückt wurden. Dann geht (9) über in

$$\delta \int \sqrt{2(U+c)} \sqrt{\sum m_\alpha \left[\left(\frac{dx_\alpha}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dy_\alpha}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dz_\alpha}{dx_1}\right)^2 \right]} \, dx_1 = 0$$

oder, wenn jetzt

$$x_\alpha' = \frac{dx_\alpha}{dx_1} \quad \text{u. s. w.}$$

gesetzt wird,

$$(10) \qquad \delta \int \sqrt{2(U+c)} \sqrt{\sum m_\alpha (x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2)} \, dx_1 = 0 \, .$$

6. Von dieser letzten Form gehen wir aus, um die Äquivalenz der Gleichung mit der d'Alembert'schen darzuthun. Setzen wir vorläufig

$$\sqrt{2(U+c)} \sqrt{\sum m_\alpha (x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2)} = P \, ,$$

so haben wir die Gleichung

$$\delta \int P dx_1 = 0$$

weiter auszuführen. Da U von x_α, y_α, z_α explizite abhängt, aufserdem aber in P noch x_α', y_α', z_α' vorkommen und die Grenzen unveränderlich sind, so haben wir

$$\int \sum \left[\frac{\partial P}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha + \frac{\partial P}{\partial y_\alpha} \delta y_\alpha + \frac{\partial P}{\partial z_\alpha} \delta z_\alpha + \frac{\partial P}{\partial x_\alpha'} \delta x_\alpha' + \frac{\partial P}{\partial y_\alpha'} \delta y_\alpha' + \frac{\partial P}{\partial z_\alpha'} \delta z_\alpha' \right] dx_1 = 0$$

zu setzen. Nun ist aber z. B.

$$\int \frac{\partial P}{\partial x_\alpha'} \delta x_\alpha' dx_1 = \int \frac{\partial P}{\partial x_\alpha'} \frac{d\delta x_\alpha}{dx_1} dx_1 = \left[\frac{\partial P}{\partial x_\alpha'} \delta x_\alpha \right] - \int \frac{d \frac{\partial P}{\partial x_\alpha'}}{dx_1} \delta x_\alpha dx_1$$

$$= - \int \frac{d \frac{\partial P}{\partial x_\alpha'}}{dx_1} \delta x_\alpha dx_1 \, ;$$

daher geht (10) über in

$$(11) \qquad \int \sum \left[\left(\frac{\partial P}{\partial x_\alpha} - \frac{d \frac{\partial P}{\partial x_\alpha'}}{dx_1} \right) \delta x_\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial y_\alpha} - \frac{d \frac{\partial P}{\partial y_\alpha'}}{dx_1} \right) \delta y_\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z_\alpha} - \frac{d \frac{\partial P}{\partial z_\alpha'}}{dx_1} \right) \delta z_\alpha \right] dx_1 = 0 \, .$$

Auch hier können wir das Integralzeichen weglassen und haben nur noch die einzelnen Glieder vollständig zu entwickeln. Es ist z. B.:

$$\frac{\partial P}{\partial x_\alpha} - \frac{d\frac{\partial P}{\partial x'_\alpha}}{dx_1} = \frac{\sqrt{\Sigma m_\alpha(x'^2_\alpha + y'^2_\alpha + z'^2_\alpha)}}{\sqrt{2(U+c)}} \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - \frac{d}{dx_1}\left[\frac{m_\alpha\sqrt{2(U+c)}}{\sqrt{\Sigma m_\alpha(x'^2_\alpha + y'^2_\alpha + z'^2_\alpha)}} x'_\alpha\right]$$

oder, wenn wir wieder die Zeit durch (8) einführen, d. h.

$$dx_1 = \frac{\sqrt{2(U+c)}}{\sqrt{\Sigma m_\alpha(x'^2_\alpha + y'^2_\alpha + z'^2_\alpha)}} dt$$

setzen*):

$$(12) \quad \frac{\partial P}{\partial x_\alpha} - \frac{d\frac{\partial P}{\partial x'_\alpha}}{dx_1} = \frac{\sqrt{\Sigma m_\alpha(x'^2_\alpha + y'^2_\alpha + z'^2_\alpha)}}{\sqrt{2(U+c)}}\left[\frac{\partial U}{\partial x_\alpha} - m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}\right].$$

Dafs aber die Einsetzung von (12) und den analogen Gröfsen in (11) nach Weglassung des Integralzeichens zu der d'Alembert'schen Gleichung führt, ist unmittelbar ersichtlich.

7. Die Gleichung (7) hat in den meisten Fällen zur Folge, dafs

$$\int \sum m_\alpha v_\alpha ds_\alpha = \int \sum m_\alpha v_\alpha^2 dt$$

ein Minimum wird, dafs also diese Gröfse für die wirklich eingeschlagenen Wege kleiner wird als für die benachbarten; doch trifft dies nicht immer zu. Der geringeren Wichtigkeit des Prinzips wegen gehen wir nicht ausführlicher auf den Gegenstand ein. Derselbe ist sehr gründlich behandelt in Jacobi's Vorlesungen über Dynamik, pag. 43 ff.

8. Dem Prinzipe der kleinsten Wirkung liegt der Gedanke zu Grunde, die Bewegungsgleichungen auf eine Minimumsbetrachtung zurückzuführen; freilich ist der Erfolg ein geringer, schon deshalb, weil der unter das Integralzeichen tretende Ausdruck nach der nötigen Transformation keine einfache Bedeutung mehr hat. Es ist Maupertuis nicht gelungen, die aus teleologischen Betrachtungen entsprungene Ansicht, dafs die Natur ihre Zwecke stets durch die einfachsten Mittel erreiche, zu einem Prinzipe der Mechanik auszubilden.

Interessanter und erfolgreicher ist der Gedankengang, welchem Gauss**) in seinem Prinzipe des kleinsten Zwanges Ausdruck verlieh. Dasselbe hat den noch näher zu präzisierenden Inhalt, dafs die Wege, welche die materiellen Punkte eines Systems, das Bedingungsgleichungen unter-

---

*) Der Klammerinhalt geht zunächst in $m_\alpha \frac{dx_1}{dt}\frac{dx_\alpha}{dx_1} = m_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt}$ über, worauf das Weitere einfach ist.

**) Gesammelte Werke, B. V, pag. 23: Über ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik, oder Crelle, B. IV, 1829.

worfen ist, wirklich einschlagen, denjenigen, welche sie ohne Vorhandensein von Bedingungsgleichungen wählen würden, so nahe kommen, als dies bei den gegebenen Bedingungen möglich ist.

Bezeichnen $A_1, A_2, \ldots$ die Orte der materiellen Punkte des Systems zu Anfang des unendlich kleinen Zeitelementes dt, $B_1, B_2, \ldots$ die Orte, welche die Punkte zu Ende von dt erreicht haben würden, falls keine Bedingungsgleichungen vorhanden wären, Kräfte und vorhandene Geschwindigkeiten*) aber ungeändert blieben, endlich $C_1, C_2, \ldots$ die Orte, welche die materiellen Punkte thatsächlich nach dt unter Einflufs der Bedingungen erreichen, so geben die unendlich kleinen Strecken $B_\alpha C_\alpha$ der Richtung und, falls sie mit m_α multipliziert werden, dem Gröfsenverhältnisse nach die Zusatzkräfte an, welche den X_α, Y_α, Z_α zugefügt werden müssen, um die Wirkung der Bedingungen zu berücksichtigen. Nach § 22, (7) ist aber auf diese Zusatzkräfte das Prinzip der virtuellen Verrückungen anwendbar. Ist daher $C_\alpha D_\alpha$ eine solche mit den Bedingungen verträgliche Verrückung, $\sphericalangle \vartheta_\alpha = B_\alpha C_\alpha D_\alpha$, so mufs nach § 22, (7), wenn dieses in die Form von § 21, (8) gesetzt wird,

$$\sum m_\alpha \,.\, B_\alpha C_\alpha \,.\, C_\alpha D_\alpha \,.\, \cos\vartheta_\alpha = 0 \tag{13}$$

sein. Andrerseits ist aber

$$2 \,.\, B_\alpha C_\alpha \,.\, C_\alpha D_\alpha \,.\, \cos\vartheta_\alpha = -(B_\alpha D_\alpha)^2 + (B_\alpha C_\alpha)^2 + (C_\alpha D_\alpha)^2 \tag{14}$$

und, wenn dies in (13) eingeführt wird,

$$\sum m_\alpha \left[(B_\alpha D_\alpha)^2 - (B_\alpha C_\alpha)^2 - (C_\alpha D_\alpha)^2\right] = 0, \tag{15}$$

woraus

$$\sum m_\alpha (B_\alpha D_\alpha)^2 > \sum m_\alpha (B_\alpha C_\alpha)^2 \tag{16}$$

folgt.

Dasselbe Resultat ist auch herzuleiten, wenn nur das Fourier'sche Prinzip gilt.

Nun ist $B_\alpha C_\alpha$ die wirkliche Ablenkung, welche m_α durch die Bedingungen erfährt, von dem Orte, welche es ohne Bedingungen erreicht hätte, $B_\alpha D_\alpha$ dagegen eine beliebige andere, den Bedingungsgleichungen nach mögliche Ablenkung von demselben Orte. Für die wirklichen Ablenkungen ist also

$$\sum m_\alpha (B_\alpha C_\alpha)^2 \tag{17}$$

ein Minimum gegenüber der gleichen Funktion der übrigen möglichen Ablenkungen.

Hiernach lautet das Prinzip des kleinsten Zwanges:

Bewegt sich ein System von materiellen Punkten unter dem Einflufs von Bedingungsgleichungen während einer un-

---

*) Diese Anfangsgeschwindigkeiten müssen also mit den Bedingungsgleichungen in Einklang sein.

endlich kurzen Zeit, so ist die Summe der mit der jeweiligen Masse multiplizierten Quadrate der Ablenkungen von denjenigen Orten, welche die Punkte bei freier Bewegung erreicht hätten, für die wirkliche Bewegung ein Minimum gegenüber allen andern Bewegungen, welche sich ebenfalls mit den Bedingungsgleichungen vertragen.

9. Der Ausdruck $\Sigma m_\alpha (B_\alpha C_\alpha)^2$ läfst sich auch leicht analytisch darstellen*). Die wirkliche Verschiebung, welche m_α vom Punkte $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$ aus nach der x-Achse in der Zeit dt erleidet, ist bis auf unendlich kleine Gröfsen zweiter Ordnung nach dem Taylor'schen Satze durch

$$\frac{dx_\alpha}{dt} dt + \frac{1}{2} \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} dt^2$$

dargestellt. Die Verschiebung, welche m_α in der gleichen Richtung ohne Vorhandensein der Bedingungsgleichungen bei derselben Anfangsgeschwindigkeit erleiden würde, ist

$$\frac{dx_\alpha}{dt} dt + \frac{1}{2m_\alpha} X_\alpha dt^2 ;$$

X_α kann nämlich während dt als konstant angesehen werden. Die Differenz beider Verschiebungen ist

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} - \frac{X_\alpha}{m_\alpha}\right) dt^2 ,$$

und wir haben daher

$$(B_\alpha C_\alpha)^2 = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} - \frac{X_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} - \frac{Y_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - \frac{Z_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\right] dt^2 .$$

Das Prinzip des kleinsten Zwanges sagt daher aus, dafs

$$(18) \qquad \sum m_\alpha \left[\left(\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} - \frac{X_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} - \frac{Y_\alpha}{m_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - \frac{Z_\alpha}{m_\alpha}\right)^2\right]$$

für die wirkliche Bewegung ein Minimum ist gegenüber jeder möglichen Bewegung.

§ 26.

Untersuchungen über Systeme totaler Differentialgleichungen; der letzte Multiplikator**).

1. Die allgemeineren Untersuchungen über die Differentialgleichungen der Bewegung, denen wir uns nunmehr zuzuwenden haben, setzen die Be-

---

*) Lipschitz, Bemerkungen zu dem Prinzip des kleinsten Zwanges, Borch. Journ., B. 82, p. 316.

**) Bei diesen und dem gröfsten Teile der weiteren Untersuchungen dieses Abschnittes folgen wir den Vorlesungen über Dynamik von Jacobi, her-

kanntschaft mit der Theorie der Differentialgleichungen überhaupt voraus und zwar in weiterem Umfange, als sie in elementaren Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung gegeben zu werden pflegt; es mag daher das Wichtigste aus dieser Theorie hier seinen Platz finden.

Sind die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ sämtlich Funktionen einer einzigen Variabeln x, so kann man nur totale Differentialquotienten von ihnen nach der Variabeln x bilden; eine Gleichung zwischen diesen totalen Differentialquotienten heifst eine totale Differentialgleichung. Dabei ist zu bemerken, dafs Ausdrücke wie $\frac{dx_2}{dx}$, $\frac{d^2x_2}{dx_1^2}$ u. s. w., die man erhält, wenn man x_1 als die unabhängige, $x, x_2, \ldots x_n$ als die abhängigen Variabeln betrachtet, mit Leichtigkeit nach elementaren Methoden auf die Differentialquotienten

$$\frac{dx_1}{dx}, \quad \frac{d^2x_1}{dx^2}, \quad \ldots \quad \frac{dx_2}{dx} \quad \text{u. s. w.}$$

zurückgeführt werden können. So ist z. B.

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{dx_2}{dx} : \frac{dx_1}{dx},$$

$$\frac{d^2x_2}{dx_1^2} = \frac{d\frac{dx_2}{dx}}{dx_1} = \frac{d\left[\frac{dx_2}{dx} : \frac{dx_1}{dx}\right]}{dx} \frac{dx}{dx_1} \quad \text{u. s. w.}$$

Da n Gleichungen nötig sind, um $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Funktionen von x zu bestimmen, so mufs ein vollständiges System von totalen Differentialgleichungen mit $(n+1)$ Variabeln aus n Gleichungen bestehen.

Sind $x_1, x_2, \ldots x_n$ als Funktionen mehrerer Variabeln $x, y, z, \ldots$ gegeben, so können nur partielle Differentialquotienten nach letzteren gebildet werden; eine Gleichung zwischen solchen heifst eine partielle Differentialgleichung. Sind n abhängige, k unabhängige Variabeln vorhanden, so ist ein System von n partiellen Differentialgleichungen als vollständig zu bezeichnen.

Man nennt eine Differentialgleichung von der n^{ten} Ordnung, wenn der höchste vorkommende Differentialquotient von dieser Ordnung ist.

2. Um einen Einblick in die Natur der Differentialgleichungen, zunächst der totalen, zu gewinnen, gehen wir am besten von den Funktionalbeziehungen zwischen den Variabeln selbst, den sog. Integralgleichungen aus. Dabei richten wir von vornherein unser Augenmerk auf die Konstanten, d. h. willkürliche Gröfsen, welche aufser den untersuchten Variabeln in den Integralgleichungen vorkommen können, bei Bildung der Differentialgleichungen aber herausfallen.

---

ausgegeben von Clebsch, revidiert von Lottner. Von den Originalabhandlungen Jacobi's kommen hier in Betracht: De determinantibus functionalibus, Ges. W. B. 3; Sur un nouveau principe de la mécanique analytique (Letzter Multiplikator), und andere Abhandlungen im 4. B. der Ges. W.

Besteht zwischen zwei Variabeln x, x_1 und einer Konstanten c eine Funktionalbeziehung, so können wir uns mittels derselben c ausgerechnet denken; es sei

(1) $$f(x_1, x) = c.$$

Dann folgt durch Differentiation:

(2) $$\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{dx_1}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}},$$

eine totale Differentialgleichung erster Ordnung in $\frac{dx_1}{dx}$.

Um allen Mifsverständnissen vorzubeugen, sei bemerkt, dafs $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ und $\frac{\partial f}{\partial x}$ ganz bestimmte, ausgerechnete Funktionen von x_1 und x sind. Haben wir z. B.

$$x_1^2 + x_1 x + x^2 = c,$$

so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 + x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = x_1 + 2x,$$

also

$$\frac{dx_1}{dx} = -\frac{x_1 + 2x}{2x_1 + x}.$$

Diese Entstehungsweise der totalen Differentialgleichung erster Ordnung ist eine vollkommen bestimmte; sie ist wesentlich bedingt durch die Stellung, welche der Konstanten zugewiesen wurde.

Will man nun umgekehrt eine vorgelegte Differentialgleichung

(3) $$\frac{dx_1}{dx} = \varphi(x_1, x)$$

integrieren*), d. h. auf eine Gleichung (1) zurückführen, so mufs man

$$\varphi(x_1, x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}$$

setzen. Hier tritt nun die eigentlich fundamentale Schwierigkeit der ganzen Theorie der Differentialgleichungen ein. Die Ausdrücke $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ können einen gemeinsamen Faktor besitzen, welcher herausgehoben wird, oder es können auch beide mit einem gleichen Faktor multipliziert werden, ohne dafs die Differentialgleichung eine Änderung erfährt. Stellen wir $\varphi(x_1, x)$ irgendwie als Quotienten zweier Gröfsen dar, z. B.

*) Die Untersuchung, ob (3) immer eine Integralgleichung besitzt, mag hier übergangen werden, da sie für uns nicht weiter in Betracht kommt.

$$\varphi(x_1, x) = -\frac{\varphi_1(x_1, x)}{\varphi_2(x_1, x)},$$

so können wir nur sagen, dafs

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M\varphi_1(x_1, x), \quad (4)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = M\varphi_2(x_1, x)$$

zu setzen ist, wo der sog. Multiplikator oder integrierende Faktor M eine Funktion von x_1 und x bezeichnet. Ist dieser Multiplikator gefunden, so ist:

$$f = \int M\varphi_1(x_1, x)\,dx = \int M\varphi_2(x_1, x)\,dx_1,$$

worin während der Integration x_1, resp. x wie Konstanten zu behandeln sind. Das eine Mal kann die zuzufügende Integrationskonstante noch eine Funktion von x_1, das andere Mal von x sein; erst die Zusammenstellung beider Resultate beseitigt die vorhandene Unbestimmtheit. Von der Auffindung des Multiplikators, für die es keine allgemeine Regel giebt, hängt also die Integration der Gleichung (3) ab.

Differentiiert man die erste der Gleichungen (4) nach x_1, die zweite nach x und setzt die rechten Seiten einander gleich, so erhält man für den Multiplikator die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial(M\varphi_1)}{\partial x_1} = \frac{\partial(M\varphi_2)}{\partial x}. \quad (5)$$

Auch ist umgekehrt ersichtlich, dafs jede Gröfse M, welche (5) genügt, als integrierender Faktor benutzt werden kann; denn (5) sagt eben nur aus, dafs $M\varphi_1$ und $M\varphi_2$ Differentialquotienten derselben Funktion nach x und x_1 sind, was zur Integration ausreicht.

Anm. Unsere Untersuchung nimmt nur Rücksicht auf das allgemeine, nicht das singuläre Integral, da letzteres aus dem allgemeinen immer leicht abgeleitet werden kann. Dasselbe gilt für die weiteren Betrachtungen.

3. Sind n Integralgleichungen zwischen $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ und n Konstanten $c_1, c_2, \ldots c_n$ vorgelegt, so können wir sie zunächst durch Auflösung nach den c auf die folgende Normalform bringen:

$$(6)\quad \begin{cases} f_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = c_1, \\ f_2(x, x_1, x_2, \ldots x_n) = c_2, \\ \quad\vdots \\ f_n(x, x_1, x_2, \cdots x_n) = c_n. \end{cases}$$

Die Differentiation dieser Gleichungen giebt

$$
(7)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dx}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dx}+\cdots+\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{dx}+\dfrac{\partial f_1}{\partial x}=0\,,\\
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dx}+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dx}+\cdots+\dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{dx}+\dfrac{\partial f_2}{\partial x}=0\,,\\
\cdot\\
\cdot\\
\cdot\\
\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dx}+\dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dx}+\cdots+\dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\dfrac{dx_n}{dx}+\dfrac{\partial f_n}{\partial x}=0\,.
\end{cases}
$$

Man kann dieses Gleichungssystem nach den Unbekannten

$$\frac{dx_1}{dx},\ \frac{dx_2}{dx},\ \ldots\ \frac{dx_n}{dx}$$

auflösen und findet nach bekannten Regeln

$$(8)\qquad \frac{dx_\alpha}{dx}=\frac{\Delta_\alpha}{\Delta}\,,$$

worin

$$(9)\qquad \Delta=\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\
\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\\
 & \cdot & & \\
 & \cdot & & \\
 & \cdot & & \\
\dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix}$$

ist, während Δ_α aus Δ dadurch hervorgeht, daſs man die Elemente der α^{ten} Vertikalreihe

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_\alpha},\ \frac{\partial f_2}{\partial x_\alpha},\ \ldots\ \frac{\partial f_n}{\partial x_\alpha}$$

resp. durch

$$-\frac{\partial f_1}{\partial x},\ -\frac{\partial f_2}{\partial x},\ \ldots\ -\frac{\partial f_n}{\partial x}$$

ersetzt. Δ heiſst die Funktionaldeterminante der Funktionen f_1, f_2, ... f_n, falls man dieselben lediglich als Funktionen von x_1, x_2, ... x_n betrachtet.

Sind die Funktionen f_1, f_2, ... f_n nicht voneinander unabhängig, so daſs z. B.

$$F(f_1,\ f_2,\ \ldots\ f_n)=0$$

ist, so genügen die Gleichungen (6) nicht, um die Gröſsen

$$x_1,\ x_2,\ \ldots\ x_n$$

als Funktionen von x zu bestimmen; denn irgend eine dieser Gleichungen wäre nur eine Folge der übrigen. Daher sind auch

$$\frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \ldots \frac{dx_n}{dx}$$

nicht als Funktionen von x bestimmt. Es mufs demnach (8) eine unbestimmte Form annehmen, d. h. es mufs

$$\Delta = 0 \tag{10}$$

sein*).

Sind also die Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ voneinander nicht unabhängig, so verschwindet die Funktionaldeterminante. Die Umkehrung dieses Satzes soll später bewiesen werden.

Die Gesamtheit der Gleichungen (8) können wir in die Form

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = \Delta : \Delta_1 : \Delta_2 : \ldots : \Delta_n \tag{11}$$

setzen.

4. Sind umgekehrt n totale Differentialgleichungen erster Ordnung vorgelegt, so wird man annehmen müssen — was hier nicht weiter begründet werden soll — dafs ihnen n Integralgleichungen von der Form (6) entsprechen, die n willkürliche und nicht auf eine geringere Zahl reduzierbare Konstanten enthalten. Man kann sich aus den Differentialgleichungen durch Elimination die Gröfsen

$$\frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}, \ldots \frac{dx_n}{dx}$$

als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausgerechnet denken; es sei

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{X_1}{X}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{X_2}{X}, \quad \ldots \quad \frac{dx_n}{dx} = \frac{X_n}{X}. \tag{12}$$

Der gemeinsame Nenner X ist nur der Symmetrie wegen beigefügt; man kann ihm bei der Willkürlichkeit der X_α einen beliebigen Wert beilegen. Die Gleichungen (12) können wir in die Form

$$dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_n \tag{13}$$

setzen. Soll dieser Ausdruck mit (11) identisch werden, so mufs

$$\Delta = MX, \quad \Delta_1 = MX_1, \quad \ldots \quad \Delta_n = MX_n \tag{14}$$

sein. Die Gröfsen $X, X_1, \ldots X_n$ stimmen also mit den $\Delta, \Delta_1, \ldots \Delta_n$ bis auf einen Faktor M überein, welcher der Gröfse M in 2. vollkommen entspricht. Doch sind wir nicht berechtigt zu schliefsen, dafs die Kenntnis dieses Faktors auch die Integration der Gleichungen (13) liefert; denn aus (11) lassen sich die Gleichungen (6) nicht durch ein einfaches, allgemeines Verfahren herleiten. Wir werden erst weiter unten sehen, welchen Nutzen die Kenntnis von M, des Multiplikators des Systems (13), gewährt.

---

*) Im Allgemeinen wird auch $\Delta_\alpha = 0$ sein, so dafs (8) zu $\frac{0}{0}$ wird.

5. Ehe wir die Theorie der Systeme von totalen Differentialgleichungen erster Ordnung weiter verfolgen, wollen wir uns davon überzeugen, dafs durch dieselbe zugleich die Theorie beliebiger Systeme von irgend welcher Ordnung geliefert wird.

Haben wir eine Differentialgleichung n^{ter} Ordnung

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \tag{15}$$

so können wir setzen:

$$x_1 = \frac{dy}{dx}, \quad x_2 = \frac{dx_1}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad x_3 = \frac{dx_2}{dx}, \quad \dots x_{n-1} = \frac{dx_{n-2}}{dx}. \tag{16}$$

Die Gleichung (15) geht dann über in

$$f\left(x, y, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, \frac{dx_{n-1}}{dx}\right) = 0 \tag{17}$$

und liefert mit (16) zusammen ein System von n totalen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Genau in gleicher Weise zeigt man, dafs ein System von totalen Differentialgleichungen beliebiger Ordnung immer durch ein System von Differentialgleichungen *erster Ordnung* mit einer gröfseren Zahl von Variabeln ersetzt werden kann.

Andrerseits kann man aus einem beliebigen System totaler Differentialgleichungen durch Elimination Differentialgleichungen ableiten, welche aufser der unabhängigen nur noch eine einzige abhängige Variable enthalten. Um dies einzusehen, genügt es, aus zwei Differentialgleichungen $(m \geqq n)$

$$f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0, \tag{18}$$

$$f_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0, \tag{19}$$

in denen die (nicht bezeichneten) Koefficienten beliebige andere abhängige Variabeln und deren Differentialquotienten enthalten, die Variable y nebst ihren Differentialquotienten eliminieren zu können.

Um diese Operation auszuführen, leiten wir aus (19), falls $m > n$ ist, durch $(m - n)$fache totale Differentiation, die sich natürlich auch auf die Koeffizienten erstreckt, ebenfalls eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung her und eliminieren aus ihr und (18) $\frac{d^my}{dx^m}$. Falls $m = n$ ist, kann diese Elimination sofort ausgeführt werden. Wir erhalten so eine Differentialgleichung $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung; falls $m > n$ ist, haben wir zwei Differentialgleichungen (nämlich die neue und (19)) erlangt, welche höchstens von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung sind. Ist aber $m = n$, so liefert die Wiederholung des gleichen Verfahrens mit der neuen Gleichung und

(18) oder (19) zwei solche Differentialgleichungen, welche höchstens bis zur $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung ansteigen. Bei wiederholter Anwendung dieser Methode — welche analog ist einem bei Gleichungen höheren Grades angewandten Eliminationsverfahren — reduzieren wir die Ordnung immer mehr, bis wir endlich zwei Gleichungen gewinnen, welche nur noch y ohne Differentialquotienten enthalten und aus denen diese Variable eliminiert werden kann.

Es leuchtet ein, dafs man aus n Differentialgleichungen mit n abhängigen Variabeln durch geeignete Elimination schliefslich eine mit einer abhänigen Variabeln ableiten kann.

Im Hinblick auf diese Resultate beschäftigen wir uns weiterhin nur mit Systemen von Differentialgleichungen erster Ordnung.

6. Nach dieser Digression kehren wir zu dem Systeme (13) zurück und suchen eine partielle Differentialgleichung aufzustellen, welcher der Multiplikator M genügen mufs. Zu diesem Zwecke beweisen wir die merkwürdige Relation

$$\frac{\partial \varDelta}{\partial x} + \frac{\partial \varDelta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \varDelta_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \varDelta_n}{\partial x_n} = 0. \tag{20}$$

Beweis. Aus der Definition von $\varDelta$, $\varDelta_1$, $\varDelta_2$, $\ldots \varDelta_n$ u. s. w. geht hervor, dafs $\frac{\partial \varDelta}{\partial x}$, $\frac{\partial \varDelta_1}{\partial x_1}$ u. s. w. nur erste und zweite partielle Differentialquotienten der f_α enthalten und zwar die letzteren nur linear, d. h. so, dafs in jedem einzelnen Gliede nur ein solcher als Faktor auftritt*). Da ferner $\varDelta$ keine Differentialquotienten nach x, $\varDelta_\alpha$ keine nach x_α enthält, so werden Differentialquotienten von der Form

$$\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x_\alpha^2}$$

überhaupt nicht vorkommen. Dabei mögen x und $\varDelta$ der Gleichmäfsigkeit wegen durch x_0 und $\varDelta_0$ ersetzt gedacht werden. Die Glieder von (20) haben somit alle die Form

$$F_{\alpha,\beta}^{(\gamma)} \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta},$$

wo α von β verschieden ist, und es handelt sich darum, den Wert von

$$F_{\alpha,\beta}^{(\gamma)}$$

zu ermitteln.

Zu diesem Zwecke bedenken wir, dafs der Faktor

$$\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \tag{21}$$

---

*) Man denke sich z. B. den Ausdruck (9) für $\varDelta$ in ein Aggregat von Produkten erster partieller Differentialquotienten aufgelöst und nun die Differentiation vorgenommen; jedes der entstehenden Glieder enthält nur einen zweiten Differentialquotienten als Faktor.

nur in Gliedern auftreten kann, welche bei der Entwicklung von

$$\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial x_\alpha} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial x_\beta}$$

entstehen. Nun ist aber, wenn wir Δ_α und Δ_β durch Unterdeterminanten darstellen,

$$(22) \quad \begin{cases} \Delta_\alpha = \dfrac{\partial \Delta_\alpha}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\beta}} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\beta} + \dfrac{\partial \Delta_\alpha}{\partial \dfrac{\partial f_2}{\partial x_\beta}} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_\beta} + \cdots + \dfrac{\partial \Delta_\alpha}{\partial \dfrac{\partial f_n}{\partial x_\beta}} \dfrac{\partial f_n}{\partial x_\beta}, \\ \Delta_\beta = \dfrac{\partial \Delta_\beta}{\partial \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\alpha}} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_\alpha} + \dfrac{\partial \Delta_\beta}{\partial \dfrac{\partial f_2}{\partial x_\alpha}} \dfrac{\partial f_2}{\partial x_\alpha} + \cdots + \dfrac{\partial \Delta_\beta}{\partial \dfrac{\partial f_n}{\partial x_\alpha}} \dfrac{\partial f_n}{\partial x_\alpha}. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen ersieht man, dafs die Differentiationen von Δ_α und Δ_β resp. nach x_α und x_β nur die Glieder

$$\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial \dfrac{\partial f_\gamma}{\partial x_\beta}} \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial \dfrac{\partial f_\gamma}{\partial x_\alpha}} \frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

liefern, welche den Faktor (21) enthalten.

Eine Beziehung zwischen diesen beiden Gliedern erhalten wir leicht, wenn wir von einer Determinante $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(23) \qquad D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & & \vdots & & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

ausgehen, in der f eine willkürlich eingeführte Hilfsgröfse ist; wir haben dann

$$(24) \qquad \Delta = \frac{\partial D}{\partial \dfrac{\partial f}{\partial x}}, \quad \Delta_\alpha = \frac{\partial D}{\partial \dfrac{\partial f}{\partial x_\alpha}}.$$

Nun*) ist aber

*) Ist

$$R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_\beta}} = \frac{\partial^2 D}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_\alpha}\, \partial \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_\beta}},$$

$$\frac{\partial \Delta_\beta}{\partial \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_\alpha}} = \frac{\partial^2 D}{\partial \frac{\partial f}{\partial x_\beta}\, \partial \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_\alpha}},$$

und beide Gröfsen sind nur durch das Vorzeichen verschieden. Somit haben wir

$$(25)\qquad \frac{\partial \Delta_\alpha}{\partial \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_\beta}} + \frac{\partial \Delta_\beta}{\partial \frac{\partial f_\gamma}{\partial x_\alpha}} = 0.$$

Entwickelt man daher die linke Seite von (20) nach den Gröfsen

$$\frac{\partial^2 f_\gamma}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta},$$

so verschwinden die einzelnen Glieder, und die Richtigkeit von (20) ist dargethan.

7. Setzen wir die Werte (14) in (20) ein, so erhalten wir die gesuchte partielle Differentialgleichung für den Multiplikator

$$(26)\qquad \frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial (MX_2)}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0$$

oder

$$(27)\quad X\frac{\partial M}{\partial x} + X_1\frac{\partial M}{\partial x_1} + \cdots + X_n\frac{\partial M}{\partial x_n} + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Hierfür kann man noch weiter schreiben

$$X\left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x_1}\frac{X_1}{X} + \cdots + \frac{\partial M}{\partial x_1}\frac{X_n}{X}\right] + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0$$

oder unter Berücksichtigung von (12)

$$X\left[\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} + \cdots + \frac{\partial M}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx}\right] + M\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0$$

oder

---

so werden z. B. $\frac{\partial R}{\partial a_{11}\,\partial a_{22}}$ und $\frac{\partial R}{\partial a_{12}\,\partial a_{21}}$ durch die Gröfse

$$\pm \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\ a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

dargestellt; doch haben beide Ausdrücke, wie unmittelbar zu sehen, entgegengesetztes Zeichen.

$$X\frac{dM}{dx}+M\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)=0$$

oder endlich

$$X\frac{d\log M}{dx}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0. \tag{28}$$

Diese Gleichung ermöglicht in besonderen Fällen die Bestimmung des Multiplikators. Ist z. B.

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0,$$

so findet man

$$M=\text{Const.};$$

stellt ferner

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)$$

einen vollständigen Differentialquotienten nach x dar, so ist (28) integrierbar.

8. Wenn M_1 eine zweite Lösung von (28) vorstellt, so daſs auch

$$X\frac{d\log M_1}{dx}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\cdots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}=0$$

ist, so folgt durch Zusammenstellung mit (28)

$$\frac{d\log M_1}{dx}-\frac{d\log M}{dx}=0$$

oder

$$\frac{d\log\frac{M_1}{M}}{dx}=0,$$

d. h.

$$M_1=M\,.\,\text{Const.} \tag{29}$$

Zu diesem Resultate ist jedoch zu bemerken, daſs die Herleitung der Differentialgleichung für M von dem Bestehen der Integralgleichungen (6) ausging. Unter Anwendung derselben ist eine beliebige Funktion der f_α, z. B.

$$F(f_1, f_2, \ldots f_n) \tag{30}$$

eine Konstante. Es kann daher an Stelle der Konstanten in (29) auch der Faktor (30) treten, der vor Herleitung der Integrale nicht als Konstante erscheint. Auch ist leicht ersichtlich, daſs die Konstante durch keine andere Funktion $\psi(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ der Variabeln ersetzt werden kann. Aus ψ kann man nämlich mittels der voneinander unabhängigen Gleichungen (6) die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ eliminieren, so daſs ψ in

$\psi_1(x, c_1, c_2, \dots c_n)$ übergeht. Soll (29) durch die Integralgleichungen richtig gemacht werden, so mufs x aus ψ_1 wegfallen, d. h. ψ_1 mufs die Form

$$\psi_2(c_1, c_2, \dots c_n) = \psi_2(f_1, f_2, \dots f_n)$$

besitzen.

Bezeichnet daher jetzt M_1 eine der Lösungen von (28), die nicht gerade diejenige zu sein braucht, welche (14) genügt, so ist jedenfalls

$$M_1 X = F(f_1, f_2, \dots f_n)\Delta. \tag{31}$$

9. Wir sind jetzt in den Stand gesetzt zu untersuchen, inwiefern die Bestimmung von M_1, falls sie irgendwie gelungen ist, bei der Integration der Gleichungen (13) von Nutzen ist.

Es möge aufser M_1 auch ein Integral dieser Gleichungen, etwa

$$f_n(x_1, x_2, \dots x_n) = c_n \tag{32}$$

bekannt sein; die Variable x_n möge in demselben vorkommen (andernfalls wäre sie durch eine andere Variable zu ersetzen). Alsdann läfst sich x_n durch (32) als Funktion von $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ und c_n darstellen; für c_n können wir f_n setzen und daher sagen, dafs x_n durch $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$ und f_n ausgedrückt sei*). Dann erscheint f_α in der Form

$$f_\alpha = F_\alpha(x, x_1, x_2, \dots x_{n-1}, f_n),$$

so dafs

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial F_\alpha}{\partial x_1} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_1}$$

ist, oder, wenn wir statt F_α wieder f_α schreiben, aber die Differentialquotienten von f_α, die unter der Hypothese jener Ersetzung von x_n gebildet sind, durch Einklammern kenntlich machen,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1} = \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_1}.$$

Hiernach nimmt der Ausdruck (9) die folgende Gestalt an

$$\Delta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}\right) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) + \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial f_n}\right)\frac{\partial f_n}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \tag{33}$$

---

*) Hat man z. B. die Variabeln x, y, z und die Beziehung

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = c_1,$$

Bekanntlich bleibt eine Determinante ungeändert, wenn man die Elemente einer beliebigen Horizontalreihe mit demselben Faktor multipliziert und diese Produkte zu den Gliedern einer andern Reihe addiert. Multipliziert man nun in (33) die Elemente der letzten Horizontalreihe mit $-\left(\frac{\partial f_1}{\partial f_n}\right)$ und addiert sie zur ersten Horizontalreihe, dann mit $-\left(\frac{\partial f_2}{\partial f_n}\right)$ und addiert sie zur zweiten Horizontalreihe u. s. w., so nimmt (33) die vereinfachte Gestalt an

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}\right) & 0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}}\right) & 0 \\ \vdots & & & & \\ \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) & 0 \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

oder

$$(34)\qquad \varDelta = \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \cdot \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_{n-1}}\right) \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_{n-1}}\right) \\ \vdots & & & \\ \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1}\right) & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2}\right) & \cdots & \left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right) \end{vmatrix} = \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \varDelta'.$$

Weiter möge x_n aus (13) eliminiert werden, so daſs noch die Differentialgleichung

$$(35)\qquad dx : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_{n-1} = X : X_1 : X_2 : \ldots : X_{n-1}$$

zu integrieren bleibt; in derselben denken wir uns natürlich X, X_1 u. s. w. entsprechend transformiert. Bezeichnet nun μ den Multiplikator dieses Systems, μ_1 aber den Multiplikator im weiteren Sinne, d. h. eine Gröſse, welche der (28) entsprechenden partiellen Differentialgleichung genügt, so ist

$$(36)\qquad \begin{cases} \mu X = \varDelta', \\ \mu_1 X = F(f_1, f_2, \ldots f_{n-1}, c_n)\varDelta', \end{cases}$$

---

so kann man auch

$$z = \sqrt{c_1 - x^2 - y^2} = \sqrt{f_1 - x^2 - y^2}$$

setzen, wo jetzt f_1 gewissermaſsen als neue Unbekannte auftritt.

wie infolge der Willkürlichkeit von F geschrieben werden kann. Aus (31), (34) und (36) folgt

$$\mu_1 = \frac{M_1}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}}, \tag{37}$$

wenn man die Vieldeutigkeit von μ_1 und M_1 berücksichtigt.

Kennt man also aufser einem Multiplikator des Systems (13) noch ein Integral $f_n = c_n$ desselben, und eliminiert man mittels des letzteren x_n aus (13), so kennt man auch einen Multiplikator*) des reduzierten Systems.

Aus der Herleitung ist ersichtlich, dafs es nicht genügt, ein Integral zu kennen, in welchem die Konstante c_n einen speziellen Wert besitzt; nur wenn man das Integral mit der allgemeinen Konstanten kennt, läfst es sich in die Form (32) setzen.

10. Kennt man k vollständige Integrale des Systems (13), so kann man dieselben in die Form setzen

$$\left\{\begin{aligned} & f_n(x, x_1, \ldots x_n) = c_n, \\ & f_{n-1}(x, x_1, \ldots x_{n-1}, c_n) = c_{n-1}, \\ & f_{n-2}(x, x_1, \ldots x_{n-2}, c_n, c_{n-1}) = c_{n-2} \\ & \qquad\vdots \\ & f_{n-k+1}(x, x_1, \ldots x_{n-k+1}, c_n, c_{n-1}, \ldots c_{n-k+2}) = c_{n-k+1}; \end{aligned}\right. \tag{38}$$

man braucht eben nur aus dem zweiten mit Hilfe des ersten x_n, aus dem dritten mit Hilfe der beiden ersten x_n und x_{n-1} zu eliminieren u. s. w. Die Differentialquotienten, welche von den f_α unter Voraussetzung dieser Umformung gebildet werden, wollen wir wieder einklammern.

Eliminieren wir nun aus (35) mit Hilfe von $f_{n-1} = c_{n-1}$ die Variable x_{n-1}, so erhalten wir nach (37) für einen Multiplikator des neuen Systems

$$\mu_1' = \frac{\mu_1}{\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)} = \frac{M_1}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)}. \tag{39}$$

Fahren wir in analoger Weise fort, so erhalten wir als Multiplikator des Systems, welches aus (13) durch Elimination von $x_n, x_{n-1}, \ldots x_{n-k+1}$ mittels (38) hervorgeht, den Ausdruck

$$\mu_1^{(k-1)} = \frac{M_1}{\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial f_{n-k+1}}{\partial x_{n-k+1}}\right)}. \tag{40}$$

Kennt man demnach $(n-1)$ vollständige Integrale des Systems (13) und aufserdem einen Multiplikator desselben, so

*) Im weiteren Sinne.

reduziert sich die Aufgabe auf die Integration *einer* Differentialgleichung

$$(41) \qquad dx : dx_1 = X : X_1,$$

welche nur noch *eine* abhängige Variable enthält und von der ein Multiplikator (der *„letzte Multiplikator“*) bekannt ist. Die Differentialgleichung (41) ist aber infolge dessen nach 2. integrierbar.

Die Kenntnis eines Multiplikators des Systems liefert also, wenn $(n-1)$ Integrale desselben bekannt sind, das n^{te} Integral.

Übrigens kann der Ausdruck (40) in eine elegantere Form gesetzt werden, welche von dem successiven Eliminieren nicht beeinflufst ist. Es ist nämlich

$$(42) \qquad \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\left(\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\right)\cdots\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_3}{\partial x_n} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \frac{\partial f_n}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Dies geht aus der Gleichung (34) hervor; denn man braucht in der rechten Seite von (42) nur die Umformung vorzunehmen, welche zu (34) führte, um zu einem Produkte von $\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$ in eine neue Determinante mit $(n-2)^2$ eingeklammerten Differentialquotienten zu gelangen, und die Fortsetzung dieses Verfahrens führt successive die rechte Seite von (42) in die linke über.

§ 27.

Elemente der Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere der linearen.

1. Unsere Betrachtungen über Systeme von totalen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche wir sofort auf beliebige Systeme totaler Differentialgleichungen ausdehnen konnten, würden unvollständig sein, wenn wir sie nicht mit der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung in Zusammenhang brächten; denn thatsächlich fällt die Theorie dieser speziellen Art partieller Differentialgleichungen mit der allgemeinen der Systeme von totalen Differentialgleichungen (teilweise) zusammen*).

*) Man findet den gröfsten Teil des hier vorgetragenen Gegenstandes ausführlicher behandelt in Mansion, Théorie des équations aux dérivées

Wir geben zuerst einige allgemeinere Bemerkungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung überhaupt; Systeme solcher Gleichungen, bei welchen mehrere abhängige Variabeln auftreten, schliefsen wir aus. Dann behandeln wir die linearen Gleichungen dieser Art weiter, d. h. diejenigen, welche die partiellen Differentialquotienten nur in der ersten Potenz enthalten. Um verständlicher zu werden, betrachten wir für den Anfang partielle Differentialgleichungen, welche nur zwei unabhängige Variabeln besitzen.

2. Ist die Gleichung

$$y = f(x_1, x_2, a_1, a_2) \tag{1}$$

vorgelegt, in der x_1 und x_2 die unabhängigen Variabeln, y die abhängige, a_1 und a_2 aber zwei willkürliche Konstanten bedeuten, so können wir aus (1) und den beiden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \tag{2}$$

die beiden Konstanten a_1 und a_2 eliminieren und so eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\psi\left(x_1, x_2, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}\right) = 0 \tag{3}$$

erzielen.

Beispiel 1. Ist

$$y = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2,$$

so folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2a_1 x_1, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = 2a_2 x_2,$$

$$a_1 = \frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{2x_1}, \quad a_2 = \frac{\frac{\partial y}{\partial x_2}}{2x_2},$$

also

$$y = \frac{1}{2} x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{1}{2} x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2}.$$

Hiernach mufs man erwarten, dafs jeder partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (3) eine*) Integralgleichung (1) entspricht, welche zwei willkürliche Konstanten enthält. Dieselbe soll ein vollständiges Integral der Differentialgleichung heifsen.

3. Aber noch ein ganz anderer Weg führt zu Differentialgleichungen dieser Art. Es sei

$$y = F[x_1, x_2, \varphi(f(x_1, x_2))], \tag{4}$$

---

partielles du premier ordre; Graindorge, Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles des deux premiers ordres, Mémoires de la soc. roy. des sciences de Liége, (2), B. 5.

*) In Wirklichkeit existieren unendlich viele Integrale dieser Art.

worin F und f zwei bestimmt vorgelegte, φ aber eine ganz willkürliche Funktion bezeichne.

Die partiellen Differentiationen liefern

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = \dfrac{\partial F}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F}{\partial \varphi} \dfrac{\partial \varphi}{\partial f} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = \dfrac{\partial F}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F}{\partial \varphi} \dfrac{\partial \varphi}{\partial f} \dfrac{\partial f}{\partial x_2}; \end{cases}$$

$\dfrac{\partial F}{\partial x_1}$ und $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}$ bezeichnen hierin die Ableitungen von F, welche nach den aufserhalb φ vorkommenden x_1 und x_2 genommen sind. Aus den beiden Gleichungen (5) läfst sich zunächst

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial f}$$

eliminieren, worauf aus der resultierenden Gleichung die Gröfse

$$\varphi(f(x_1, x_2)),$$

welche noch in $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}$ und $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}$ unverändert vorkommt, mittels (4) beseitigt werden kann. So erhält man wieder eine Gleichung von der Form (3).

Beispiel 2.

$$y = x_1^2 + x_2^2 + \varphi(x_1 x_2),$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 2x_1 + \varphi' x_2,$$
$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 2x_2 + \varphi' x_1,$$

also nach Elimination von φ'

$$x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} - 2x_1^2 + 2x_2^2 = 0.$$

Die Gleichung (4), welche eine willkürliche Funktion enthält, heifst das allgemeine Integral der zugehörigen partiellen Differentialgleichung.

Wir gelangen also auf zwei ganz verschiedenen Wegen zu der partiellen Differentialgleichung und umgekehrt von dieser zu zwei Integralen von scheinbar ganz verschiedenem Charakter; wir wollen zeigen, dafs das allgemeine Integral aus einem vollständigen in einfacher Weise abgeleitet werden kann.

Andrerseits ist klar, dafs eine Spezialisierung der willkürlichen Funktion des allgemeinen Integrals beliebig viele vollständige Integrale liefert.

4. Die Herleitung der partiellen Differentialgleichung (3) aus der Integralgleichung (1) bleibt unter gewissen Bedingungen noch richtig, wenn die Gröfsen a_1 und a_2 nicht mehr als Konstanten, sondern als Funktionen von x_1 und x_2 angesehen werden. In diesem Falle ist

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1}, \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = \dfrac{\partial f}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_2}. \end{cases}$$

Sollen diese Gleichungen mit (2) identisch werden, wodurch die Herleitung der Gleichung (3) ungeändert bleibt, so mufs

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial f}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

sein. Betrachten wir hierin $\dfrac{\partial f}{\partial a_1}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial a_2}$ als Unbekannte und setzen

$$(8)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} \end{vmatrix},$$

so erhalten wir nach den bekannten Eliminationsregeln

$$(9)\quad \Delta\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0, \qquad \Delta\frac{\partial f}{\partial a_2} = 0.$$

Die Gleichungen können befriedigt werden durch die Annahmen:

$$\text{a) } (10)\quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{\partial f}{\partial a_2} = 0,$$

$$\text{b) } (11)\quad \Delta = 0.$$

Eliminiert man unter Annahme der Gleichungen (10) mittels dieser a_1 und a_2 aus (1), so entsteht eine neue, von Konstanten freie Integralgleichung der Differentialgleichung (3); man nennt sie ein singuläres Integral von (3). Dieselbe ist den singulären Integralen totaler Differentialgleichungen durchaus analog.

Das Bestehen der Gleichung (11) wird nach § 26, 3 durch die Annahme ermöglicht, dafs a_2 eine beliebige Funktion von a_1 ist*); es sei

$$(12)\quad a_2 = \varphi(a_1).$$

Alsdann gehen die Gleichungen (7) in die einzige Relation

$$(13)\quad \frac{\partial f}{\partial a_1} + \frac{\partial f}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial a_1} = 0$$

über, welche mit (12) eine Elimination von a_1 und a_2 aus (1) möglich macht. Hierdurch wird eine Integralgleichung mit einer willkürlichen Funktion, also ein allgemeines Integral erlangt.

*) Dafs umgekehrt (11) eine Relation (12) als notwendige Folge nach sich zieht, wird weiter unten nachgewiesen.

Die Kenntnis eines vollständigen Integrals liefert zugleich das allgemeine und eventuell auch ein singuläres Integral.

Beispiel. Für das Beispiel 1 wird (13)

$$x_1^2 + \varphi'(a_1)x_2^2 = 0,$$

also

$$a_1 = \chi\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right),$$

wenn χ die Umkehrung von φ' bezeichnet; ferner ist

$$a_2 = \varphi\left[\chi\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)\right],$$

wo φ durch χ bestimmt ist. Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} y &= \chi\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)x_1^2 + \varphi\left[\chi\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)\right]x_2^2 \\ &= x_2^2\left\{\chi\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)\frac{x_1^2}{x_2^2} + \varphi\left[\chi\left(-\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)\right]\right\}, \end{aligned}$$

wofür wir kürzer unter Einführung einer neuen willkürlichen Funktion ψ

$$y = x_2^2\psi\left(\frac{x_1^2}{x_2^2}\right)$$

schreiben dürfen.

Setzen wir

$$\psi(x) = a_1x + a_2,$$

so geht das Integral in

$$y = a_1x_1^2 + a_2x_2^2$$

über, also in das uns bekannte vollständige Integral.

5. Die Behandlung der allgemeineren partiellen Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher n unabhängige Variabeln auftreten, können wir nach dem gegebenen Muster leicht erledigen.

Aus einer Gleichung

$$(14) \qquad y = f(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n),$$

welche n willkürliche Konstanten enthält, folgt

$$(15) \qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \ldots \quad \frac{\partial y}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n};$$

eliminieren wir aus (14) und (15) die n Konstanten, so erhalten wir die partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$(16) \qquad \psi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0.$$

Umgekehrt müssen wir erwarten, dafs einer Gleichung (16) ein vollständiges Integral mit n Konstanten entspricht.

Setzen wir in (14) an Stelle der Konstanten Funktionen der

$$x_1, x_2, \ldots x_n,$$

so gelangen wir zu derselben Gleichung (16), wenn

$$(17)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial x_1} = 0, \\ \quad\vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_1}\dfrac{\partial a_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial f}{\partial a_2}\dfrac{\partial a_2}{\partial x_n} + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

ist. Aus diesen Gleichungen folgt, wenn

$$(18)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial a_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial a_n}{\partial x_2} \\ & & \vdots & \\ \dfrac{\partial a_1}{\partial x_n} & \dfrac{\partial a_2}{\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird und man $\dfrac{\partial f}{\partial a_1}, \dfrac{\partial f}{\partial a_2}, \ldots \dfrac{\partial f}{\partial a_n}$ als Unbekannte ansieht,

$$(19)\quad \Delta\frac{\partial f}{\partial a_1} = 0,\ \Delta\frac{\partial f}{\partial a_2} = 0,\ \ldots\ \Delta\frac{\partial f}{\partial a_n} = 0.$$

Diese Relationen können dadurch befriedigt sein, dafs

$$(20)\quad \frac{\partial f}{\partial a_1} = \frac{\partial f}{\partial a_2} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial a_n} = 0$$

wird. Aus (20) und (14) lassen sich dann die Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_n$ eliminieren, wodurch man zu dem singulären Integrale gelangt.

Andrerseits kann den Gleichungen (10) durch

$$(21)\quad \Delta = 0$$

genüge geleistet werden; dies trifft zu, wenn zwischen $a_1, a_2, \ldots a_n$ eine Relation besteht, so dafs z. B.

$$(22)\quad a_n = \varphi(a_1, a_2, \ldots a_{n-1})$$

ist. Durch Einführung dieser Beziehung gehen die Gleichungen (17) über in

$$(23)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_1} + \dfrac{\partial f}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial a_1}\right)\dfrac{\partial a_1}{\partial x_1} + \cdots + \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_{n-1}} + \dfrac{\partial f}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}\right)\dfrac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n} = 0, \\ \quad\vdots \\ \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_1} + \dfrac{\partial f}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial a_1}\right)\dfrac{\partial a_1}{\partial x_n} + \cdots + \left(\dfrac{\partial f}{\partial a_{n-1}} + \dfrac{\partial f}{\partial a_n}\dfrac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}\right)\dfrac{\partial a_{n-1}}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Dieselben werden, wenn zwischen $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ keine weiteren Beziehungen bestehen*), nur durch die Annahme

$$(24)\qquad \frac{\partial f}{\partial a_1}+\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_1}=0,\ \frac{\partial f}{\partial a_2}+\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_2}=0,\ \ldots,$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_{n-1}}+\frac{\partial f}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}=0$$

befriedigt. Diese Gleichungen gestatten es, mit Benutzung von (22) in (14) die Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_n$ durch Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu ersetzen, wobei eine willkürliche Funktion von n Variabeln, φ, auftritt. So erhält man das allgemeine Integral.

Es ist möglich, dafs aufser (22) noch andere Funktionalbeziehungen zwischen den a stattfinden; dies trifft ein, wenn auch die Unterdeterminanten von Δ verschwinden u. s. w. Wir wollen auf die hieraus folgenden Integrale nicht weiter eingehen.

Im Übrigen hat es keine Schwierigkeit, aus einem allgemeinen Integral mit einer willkürlichen Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n$ umgekehrt die partielle Differentialgleichung abzuleiten.

6. Wir können auch zeigen, dafs (14) und die daraus abgeleiteten Integrale die einzigen Integrale der Differentialgleichung (16) sind. Genügt nämlich

$$(25)\qquad y=f_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

der Gleichung (16), so können wir uns in

$$f(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n)$$

die Konstanten durch solche Funktionen der unabhängigen Variabeln ersetzt denken, dafs

$$(26)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}=\frac{\partial f_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=\frac{\partial f_1}{\partial x_2},\ \ldots\ \frac{\partial f}{\partial x_n}=\frac{\partial f_1}{\partial x_n}$$

wird; wir brauchen nämlich nur in (26) die Ausdrücke für f und f_1 aus (14) und (25) einzuführen und dann $a_1, a_2, \ldots a_n$ aus diesen Gleichungen zu berechnen. Es ist nun

$$\frac{\partial(f-f_1)}{\partial x_1}=\frac{\partial(f-f_1)}{\partial x_2}=\cdots=\frac{\partial(f-f_1)}{\partial x_n}=0,$$

also

$$(27)\qquad f-f_1=C,$$

worin C eine von $x_1, x_2, \ldots x_n$ unabhängige Konstante ist. Führt man aber einmal $y=f$, dann $y=f_1$ in (16) ein, so ergiebt sich durch Vergleich $C=0$, falls nicht eine additive Konstante in (14) auftritt.

*) Man bemerke, dafs n Gleichungen vorhanden sind, in welchen aufserhalb der Klammern nur die Differentialquotienten von $(n-1)$ Gröfsen $a_1, a_2, \ldots a_{n-1}$ auftreten.

Die Auffindung eines vollständigen Integrals liefert also sämtliche Integrale der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung.

7. Wir wenden uns jetzt zur Untersuchung der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, wobei wir uns auf diejenigen einschränken wollen, deren sämtliche Glieder einen partiellen Differentialquotienten zum Faktor haben und welche y selbst nicht enthalten. Um bequemer an die Untersuchungen des vorigen Paragraphen anknüpfen zu können, nehmen wir $(n+1)$ unabhängige Variabeln $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ an; es sei

$$(28)\qquad X\frac{\partial y}{\partial x}+X_1\frac{\partial y}{\partial x_1}+X_2\frac{\partial y}{\partial x_2}+\cdots+X_n\frac{\partial y}{\partial x_n}=0$$

die partielle Differentialgleichung, in der X, X_1 u. s. w. beliebige Funktionen von $x, x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnen. Wir denken uns andrerseits die Gleichung § 26, (13) willkürlich aufgestellt, welche die Integrale § 26, (6) besitzen mag. Dann sind offenbar $y=f_1$, $y=f_2, \ldots y=f_n$ Integrale*) von (28). Setzen wir nämlich in den aus (6) folgenden Gleichungen (7) von § 26 nach § 26, (12)

$$\frac{dx_1}{dx}=\frac{X_1}{X},\quad \frac{dx_2}{dx}=\frac{X_2}{X},\ \ldots\ \frac{dx_n}{dx}=\frac{X_n}{X},$$

so gehen dieselben in die Gleichungen

$$(29)\qquad \frac{\partial f_1}{\partial x}X+\frac{\partial f_1}{\partial x_1}X_1+\frac{\partial f_1}{\partial x_2}X_2+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial x_n}X_n=0$$

u. s. w.

über, die mit (28) für $y=f_1$, $y=f_2$ u. s. w. übereinstimmen.

Aber auch jede Funktion von $f_1, f_2, \ldots f_n$, z. B.

$$(30)\qquad F(f_1, f_2, \ldots f_n),$$

befriedigt die Gleichung (28). Es folgt nämlich

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial F}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x}+\cdots+\frac{\partial F}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x}$$

u. s. w.,

was in (28) eingesetzt liefert:

$$\frac{\partial F}{\partial f_1}\left(X\frac{\partial f_1}{\partial x}+X_1\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\cdots+X_n\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)+\cdots$$
$$+\frac{\partial F}{\partial f_n}\left(X\frac{\partial f_n}{\partial x}+X_1\frac{\partial f_n}{\partial x_1}+\cdots+X\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)=0.$$

Nach (29) ist aber diese Gleichung befriedigt.

*) Selbstverständlich sind f_1 u. s. w. nicht als Konstanten c_1 u. s. w., sondern eben als Funktionen von $x, x_1, \ldots x_n$ zu denken.

Durch (30) ist, falls $f_1, f_2, \ldots f_n$ voneinander unabhängig sind, so dafs keine dieser Funktionen als Funktion der übrigen darstellbar ist, das allgemeinste Integral von (28) gegeben.

Ist nämlich

$$y = f(x, x_1, x_2 \ldots x_n)$$

ein Integral von (28), so kann man zu den n Gleichungen (29) die $(n+1)^{te}$

$$(31) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} X + \frac{\partial f}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} X_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} X_n = 0$$

hinzufügen. Die $(n+1)$ Gleichungen zwischen

$$\frac{X_1}{X}, \frac{X_2}{X}, \ldots \frac{X_n}{X}$$

können nur zusammen bestehen, ohne dafs $X = X_1 = \cdots = X_n = 0$ wird, wenn die Funktionaldeterminante

$$(32) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ & & \cdot & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

ist. Das Verschwinden der Funktionaldeterminante zeigt aber, wie wir an dieser Stelle begründen wollen, an, dafs f sich als Funktion von $f_1, f_2, \ldots f_n$ darstellen läfst.

Betrachten wir nämlich die Ausdrücke $f_1, f_2, \ldots f_n$ als neue Variable*), so können wir uns durch sie und x die Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ ausgedrückt denken; diese Werte führen wir dann statt $x_1, x_2, \ldots x_n$ in $f(x, x_1, x_2, \ldots x_n)$ ein. Nach dieser Umformung sind in (32) an Stelle der Gröfsen, welche die erste Horizontalreihe bilden, die folgenden einzusetzen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial f_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial f_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial f_n}\frac{\partial f_n}{\partial x_1},$$

u. s. w.

---

*) Man setze, falls diese Darstellungsweise unklar sein sollte,

$$y_1 = f_1(x, x_1, x_2, \ldots x_n) \text{ u. s. w.}$$

und denke sich nun $x_1, x_2, \ldots x_n$ durch $x, y_1, y_2, \ldots y_n$ ausgedrückt. An Stelle von y_1 schreiben wir dann f_1 u. s. w.

Multipliziert man aber die zweite, dritte, ... $(n+1)^{te}$ Horizontalreihe mit

$$\frac{\partial f}{\partial f_1}, \frac{\partial f}{\partial f_2}, \cdots \frac{\partial f}{\partial f_n}$$

und subtrahiert sie von der ersten, wodurch keine Wertänderung der Determinante veranlafst wird, so geht (32) in

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \vdots & & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \Delta \frac{\partial f}{\partial x} \tag{33}$$

über*). Falls nun die Determinante Δ nicht verschwindet, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

d. h. f ist in seiner neuen Form von x unabhängig, also lediglich eine Funktion von $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Das Verschwinden von Δ würde in gleicher Weise darthun, dafs f_1 eine Funktion von $f_2, \ldots f_n$ ist, falls nicht wiederum eine Unterdeterminante von Δ, z. B.

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \frac{\partial f_1}{\partial x_1}},$$

verschwindet u. s. w.. Durch Fortsetzung dieser Schlufsweise gelangt man zu dem Resultat, dafs das Bestehen von (32) eine Funktionalbeziehung zwischen den Gröfsen $f, f_1, f_2, \ldots f_n$ involviert**).

Wir schliefsen hiernach, dafs die Gleichungen (29) und (31) nur dann zusammen bestehen können, wenn $f, f_1, f_2, \ldots f_n$ nicht alle voneinander unabhängig sind. (30) liefert also das allgemeinste Integral der

*) Δ wird hier in demselben Sinne wie in § 26 gebraucht.

**) Die letzte Unterdeterminante, zu welcher man gelangt, lautet nämlich $\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$.

partiellen Differentialgleichung (28). Durch Spezialisieren der ganz willkürlichen Funktion F kann man auf unendlich viele Arten zu einem vollständigen Integral gelangen.

8. Jede nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit einer abhängigen Variabeln läſst sich auf eine lineare zurückführen. Wir wollen diese Untersuchung nur für den Fall zweier unabhängigen Variabeln, der schon von Lagrange behandelt wurde, durchführen.

Ist

$$\psi(y,\ x_1,\ x_2,\ p_1,\ p_2)=0 \tag{34}$$

die fragliche Differentialgleichung, in der

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=p_1,\quad \frac{\partial y}{\partial x_2}=p_2 \tag{35}$$

gesetzt ist, so daſs

$$dy=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2 \tag{36}$$

wird, so läuft die Integration von (34) offenbar darauf hinaus, einen Wert

$$p_1=\varphi_1(y,\ x_1,\ x_2,\ a) \tag{37}$$

zu finden, welcher in (36) substituiert die rechte Seite dieser Gleichung in ein vollständiges Differential verwandelt. (37) muſs die willkürliche Konstante a enthalten, damit nach Ausführung der Integration von (36) ein vollständiges Integral mit zwei willkürlichen Konstanten erhalten wird. Damit aber (36) integrierbar wird, braucht man nur eine Differentialgleichung aufzustellen, welche aus der Bemerkung hervorgeht, daſs

$$\frac{\partial p_1}{\partial x_2}=\frac{\partial p_2}{\partial x_1}=\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\,\partial x_2} \tag{38}$$

ist. Denken wir uns also p_2 aus (34) in der Form

$$p_2=\varphi_2(y,\ x_1,\ x_2,\ p_1) \tag{39}$$

berechnet, so muſs

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_1}\,\frac{\partial p_1}{\partial x_1}$$

oder

$$p_2\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}=p_1\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_1}\,\frac{\partial p_1}{\partial x_1}$$

oder

$$\varphi_2\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial p_1}\,\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}=\varphi_1\,\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} \tag{40}$$

sein. Da aber φ_2 und seine Differentialquotienten hinschreibbare Ausdrücke sind, so haben wir hierdurch für φ_1 eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung erlangt, von der ein einziges Integral mit einer willkürlichen Konstanten genügt, um die Integration von (34) auf eine einfache totale Differentialgleichung erster Ordnung zu reduzieren.

Enthält ψ die abhängige Variable y nicht explizite, so reduziert sich (40) auf

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}. \tag{41}$$

Nun ist aber, wenn man auf (34) zurückgeht, in diesem Falle

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} = \frac{\partial p_2}{\partial x_1} = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \psi}{\partial p_2}},$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} = - \frac{\frac{\partial \psi}{\partial p_1}}{\frac{\partial \psi}{\partial p_2}},$$

wodurch (41) in

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0 \tag{42}$$

übergeht. Denken wir uns ferner (37) nach a aufgelöst, so dafs

$$a = \varphi(x_1, x_2, p_1) \tag{43}$$

wird, so ist

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}}{\frac{\partial \varphi}{\partial p_1}},$$

und (42) verwandelt sich in

$$\frac{\partial \psi}{\partial p_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} = 0. \tag{44}$$

Dies ist für φ eine lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit drei unabhängigen Variabeln und zwar eine der früher behandelten Art, welche sich auf ein System totaler Differentialgleichungen zurückführen läfst. Kennt man eines ihrer Integrale mit nur einer willkürlichen Variabeln, so wird (36), in dessen rechter Seite jetzt y nicht vorkommt, direkt integrabel und wir erhalten somit das vollständige Integral von (34) mit zwei willkürlichen Konstanten. (Siehe auch die Zusätze.)

§ 28.

Anwendung der Theorie des letzten Multiplikators auf das freie System materieller Punkte.

1. Die Theorie des letzten Multiplikators ist deshalb für die Mechanik von Bedeutung, weil sie gerade bei den wichtigsten Fällen der Bewegungsgleichungen zur Anwendung gebracht werden kann. Wenn die Kräftekomponenten X_α, Y_α, Z_α nur von den Koordinaten und der Zeit abhängen, wenn also insbesondere die Geschwindigkeiten nicht in den Kräftekomponenten auftreten, so läfst sich ein Multiplikator des Systems immer angeben.

In § 24 konnten wir günstigsten Falls sieben allgemeine Integrale der $3n$ Bewegungsgleichungen aufstellen; von denselben waren drei vollständig integrierte Gleichungen, vier Differentialgleichungen erster Ordnung. Denkt man sich das System von $3n$ Bewegungsgleichungen in ein System von $6n$ Differentialgleichungen erster Ordnung transformiert, so kann man sagen, dafs zehn Integrale dieses Systems mit zehn willkürlichen Konstanten als bekannt anzusehen sind; denn die drei vollständigen Integrale sind doppelt zu rechnen. Zu diesen zehn direkt angebbaren Integralen tritt jetzt ein elftes hinzu, welches hingeschrieben werden kann, wenn die übrigen $6n - 11$ Integrale gefunden sind.

Freilich hat diese ganze Untersuchung bis jetzt nur einen theoretischen Wert geboten; denn in Praxis hat das Prinzip des letzten Multiplikators nur in solchen Fällen Resultate geliefert, in denen auch elementarere Methoden zum Ziele führten.

An dieser Stelle wollen wir uns auf die Behandlung freier Systeme beschränken. Bei beliebigen Bedingungsgleichungen bleibt das Verfahren, angewandt auf die Lagrange'schen Ausdrücke der Kräftecomponenten, durchführbar; doch ist die Rechnung eine etwas umständliche, während sie bei Anwendung der Hamilton'schen Form der Bewegungsgleichungen eine ungleich einfachere wird. Die allgemeine Behandlung mag daher bis nach Einführung dieser verschoben werden.

2. Die Differentialgleichungen der freien Bewegung seien wieder

$$\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = X_\alpha, \quad \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} = Y_\alpha, \quad \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} = Z_\alpha; \tag{1}$$

die X_α, Y_α, Z_α seien Funktionen der Zeit und der Koordinaten, nicht aber der Differentialquotienten der letzteren. Wir setzen dann

$$\frac{dx_\alpha}{dt} = x_\alpha', \quad \frac{dy_\alpha}{dt} = y_\alpha', \quad \frac{dz_\alpha}{dt} = z_\alpha' \tag{2}$$

und betrachten diese Gröfsen als neue Variabeln, durch deren Einführung das System (1) von $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung in ein System von $6n$ Differentialgleichungen erster Ordnung umgewandelt wird. Wir haben

$$\frac{dx_\alpha'}{dt} = X_\alpha, \quad \frac{dy_\alpha'}{dt} = Y_\alpha, \quad \frac{dz_\alpha'}{dt} = Z_\alpha; \tag{3}$$

(2) und (3) können wir zusammen in die Form setzen:

$$\begin{aligned} dt : dx_1 : dy_1 : dz_1 : \ldots\ldots : dx_1' : dy_1' : dz_1' : \ldots \\ = 1 : x_1' : y_1' ; z_1' : \ldots\ldots : X_1 : Y_1 : Z_1 : \ldots\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Für den Multiplikator M des Systems haben wir nach § 26, (28) die partielle Differentialgleichung

$$\frac{d \log M}{dt} = \frac{\partial x_1'}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1'}{\partial y_1} + \frac{\partial z_1'}{\partial z_1} + \cdots + \frac{\partial X_1}{\partial x_1'} + \frac{\partial Y_1}{\partial y_1'} + \frac{\partial Z_1}{\partial z_1'} + \cdots. \tag{5}$$

Da aber voraussetzungsmäfsig X_α, Y_α, Z_α von den Differentialquotienten X_α', Y_α', Z_α' unabhängig sind, ferner selbstverständlich x_1' nicht x_1 enthält

(rein formell aufgefaſst) u. s. w., so verschwindet die rechte Seite dieser Gleichung; es ist

$$\frac{d \log M}{dt} = 0 ,$$

also

$$M = \text{Const.} \tag{6}$$

3. Sind die Komponenten X_α, Y_α, Z_α von t unabhängig, wie dies der Wirklichkeit fast immer entspricht, so kann man in (4) links dt, rechts 1 einfach weglassen. Auch für das übrigbleibende System ist der Multiplikator wieder eine Konstante. Hat man dasselbe integriert, also alle Koordinaten durch eine, z. B. x_1, ausgedrückt, so folgt t aus der Relation

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1'$$

oder

$$t = \int \frac{dx_1}{x_1'} . \tag{7}$$

Hier sind also die *beiden* letzten Integrationen ausführbar.

4. Bei der Attraktion eines materiellen Punktes nach einem festen Zentrum hatten wir die Differentialgleichungen (vgl. § 6)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(r)\frac{x}{r} ,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(r)\frac{y}{r} ,$$

die wir unter Weglassung von dt in die Form

$$dx : dy : dx' : dy' = x' : y' : f(r)\frac{x}{r} : f(r)\frac{y}{r} \tag{8}$$

setzen. Das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft und der Flächensatz liefern zwei Integrale dieses Systems von drei Differentialgleichungen, nämlich

$$\frac{1}{2}\left[x'^2 + y'^2\right] = \int f(r)dr = F(r) + C$$

oder

$$\frac{1}{2}\left[x'^2 + y'^2\right] - F(r) = C \tag{9}$$

und

$$xy' - yx' = C . \tag{10}$$

Nehmen wir den konstanten Systemsmultiplikator $= 1$, so liefern § 26, (40) und (42), indem die linken Seiten von (9) und (10) als f_2 und f_3 angesehen und x, y, x', y' an Stelle von x, x_1, x_2, x_3 gesetzt werden, den letzten Multiplikator

$$\mu = \frac{1}{\frac{\partial f_2}{\partial x'}\frac{\partial f_3}{\partial y'} - \frac{\partial f_2}{\partial y'}\frac{\partial f_3}{\partial x'}} = \frac{1}{xx' + yy'} . \tag{11}$$

Die Differentialgleichung aber, welche zu integrieren übrig bleibt, ist

$$dx : dy = x' : y'$$

oder

$$x'dy - y'dx = 0\,; \tag{12}$$

es mufs daher der Ausdruck

$$\frac{x'dy - y'dx}{xx' + yy'} \tag{13}$$

bei Benutzung von (9) und (10) sich als ein vollständiges Differential erweisen. Durch eine etwas unbequeme Rechnung, bei welcher x' und y' mittels (9) und (10) aus (13) eliminiert werden, ist dies in der That nachzuweisen. Man gelangt so zu dem Integrale, zu welchem in § 6 die Anwendung von Polarkoordinaten in bequemerer Weise führte.

§ 29.

Die Lagrange-Hamilton'schen Differentialgleichungen der Bewegung.

1. In § 25 hoben wir als Hauptvorteil des Hamilton'schen Prinzips die bequeme Koordinatentransformation hervor, welche es ermöglicht; wir wollen diesen Punkt jetzt eingehender untersuchen*). Dabei wollen wir den Begriff „Koordinaten" sofort in seiner weitesten Bedeutung nehmen: irgend welche $3n$ Gröfsen, welche die Lage der n bewegten Punkte bestimmen, mögen als Koordinaten derselben angesehen werden. Sind $q_1, q_2, \ldots q_{3n}$ irgend welche Funktionen der $3n$ Koordinaten $x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha$, so können diese q als neue Koordinaten des Punktesystems benutzt werden. Ist nämlich z. B.

$$q_\alpha = f_\alpha(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots)\,, \tag{1}$$

so lassen sich mittels dieser $3n$ Gleichungen die x, y, z als Funktionen — eventuell mehrdeutige — der q darstellen. Zu jedem Wertesystem der q gehört also ein Wertesystem der x, y, z, wodurch die Lage der n Punkte, wenn vielleicht auch nur mit endlicher Vieldeutigkeit, bestimmt ist. Diese Vieldeutigkeit ist ohne wesentlichen Nachteil; denn infolge der Stetigkeit der Bewegungen folgt auf eine einmal fixierte Konfiguration im nächsten Momente doch eine ganz bestimmte andere, einzelne Stellen möglicherweise ausgenommen.

2. Das Hamilton'sche Prinzip hat die Form

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\,dt = 0\,, \tag{2}$$

*) Die Hamilton'schen Untersuchungen finden sich in den bereits § 25 citierten Abhandlungen; sie wurden von Jacobi so wesentlich vereinfacht, dafs derselbe als Mitbegründer dieser Theorie angesehen werden mufs. — Die zweite Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen wird bereits in der Mécanique analytique hergeleitet.

wobei die Anfangs- und Endlage des Systems für $t = t_0$ und $t = t_1$ als fest angenommen wird, die Variation sich also auf die Wege bezieht, welche die Punkte des Systems zwischen ihrer Anfangs- und Endlage zurücklegen können. T bezeichnet die lebendige Kraft, es ist also

$$(3) \qquad T = \frac{1}{2} \sum m_\alpha (x_\alpha'^2 + y_\alpha'^2 + z_\alpha'^2),$$

wenn, wie in der Folge, der Strich bei einer Variabeln deren Differentialquotienten nach der Zeit bezeichnet. U ist die Kräftefunktion, welche auch die Zeit explicite enthalten darf; sonst enthält sie nur die Koordinaten x_α, y_α, z_α, weshalb auch nach der Koordinatentransformation aufser t nur die q_α, nicht etwa deren Differentialquotienten eintreten. T enthält t und die Koordinaten x_α, y_α, z_α selbst nicht, sondern nur die Differentialquotienten x_α', y_α', z_α'; doch gestaltet sich die Zusammensetzung des Ausdrucks T nach Einführung der neuen Koordinaten etwas anders. Es ist nämlich

$$(4) \qquad x_\alpha' = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_1} q_1' + \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_2} q_2' + \cdots$$

u. s. w.,

worin die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_1}$ u. s. w. als Funktionen der q zu betrachten sind. Man braucht nämlich nur aus den Gleichungen (1) die x_α, y_α, z_α durch die q_α auszudrücken und dann zu differentiieren, um $\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_1}$ u. s. w. zu erhalten.

Führt man die Werte (4) in T ein, so erhält man einen Ausdruck, welcher eine homogene Funktion zweiten Grades in den q_α' ist; die Koeffizienten der q_α', q_β' sind Funktionen der q_α. Wir müssen also für die Folge immer festhalten, dafs U eine Funktion der q_α und der Zeit t, T aber eine Funktion der q_α und q_α' ist. Die q_α und q_α' sind selbstverständlich wieder als Funktionen der Zeit zu denken, so dafs T implizite von der Zeit abhängt.

3. Um nach Einführung der q_α und q_α' aus (2) die Bewegungsgleichungen in entwickelter Form herzuleiten, führen wir die Variation analog wie in § 25, 3 aus.

Es ist

$$(5) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} U dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta U dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha dt$$

und zunächst

$$(6) \qquad \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta T dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha' \right] dt.$$

Weiter ist aber

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha' dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \frac{d\delta q_\alpha}{dt} dt$$

$$= \left[\sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{d \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}}{dt} \delta q_\alpha dt$$

oder, weil die Variationen für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} \delta q_\alpha' dt = -\int_{t_0}^{t_1} \sum \frac{d \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}}{dt} \delta q_\alpha dt. \tag{7}$$

Somit wird

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum \left[\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{d \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\right] \delta q_\alpha dt. \tag{8}$$

Die δq_α sind zwar wegen der Bedingungsgleichungen, welche gleichfalls in den q_α ausgedrückt werden müssen, voneinander nicht unabhängig; doch ist wenigstens eines derselben vollkommen willkürlich, weshalb das rechts stehende Integral von (8) nur dann für alle möglichen δq_α verschwindet, wenn dies mit dem Ausdrucke unter dem Integralzeichen der Fall ist. Wir erhalten somit die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\sum \left[\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{d \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\right] \delta q_\alpha = 0, \tag{9}$$

worin die δq_α den Bedingungsgleichungen entsprechend zu bestimmen sind. Diese Gleichung stellt das d'Alembert'sche Prinzip für die q-Koordinaten unter der beschränkenden Voraussetzung dar, daſs eine Kräftefunktion existiert. Setzt man für die q_α die x_α, y_α, z_α, so fällt $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$ weg, während z. B. $\frac{d \frac{\partial T}{\partial x_1'}}{dt} = \frac{dx_1'}{dt} = \frac{d^2 x_1}{dt^2}$ wird. Die Gleichung (1) geht also dann in das d'Alembert'sche Prinzip über.

Setzen wir abkürzungsweise:

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} = p_\alpha, \tag{10}$$

so geht (9) über in

$$\sum \left[\frac{\partial (T + U)}{\partial q_\alpha} - \frac{dp_\alpha}{dt}\right] \delta q_\alpha = 0. \tag{11}$$

Die p_α sind homogene, lineare Funktionen der q_α', wie aus der Form von T unmittelbar hervorgeht; die Koeffizienten der q_α' hierin sind Funktionen der q_α.

(11) giebt die zweite Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen.

4. Die Gleichung (11) läfst sich mit besonderer Leichtigkeit in die einzelnen Bewegungsgleichungen zerlegen, wenn die q_α derart gewählt sind, dafs die Bedingungsgleichungen von selbst befriedigt werden. Einige Beispiele werden diese Wahl der q_α klarer machen. Soll sich ein materieller Punkt auf einer Ebene bewegen, etwa infolge der Schwerkraft, so kann man die xy-Ebene mit dieser Ebene identifizieren und dann die Komponenten der Kraft und der Geschwindigkeit nach der x- oder y-Achse vollständig in Rechnung bringen, die z-Komponenten aber einfach weglassen. Soll sich der Punkt auf einer Kugel, etwa der Erdkugel, bewegen, so kann man seinen jeweiligen Ort durch seine geographische Länge und Breite bestimmen, während man den Radius r als konstant annimmt*). Ist einem Punkte die Fläche eines Ellipsoids zur Bewegung zugewiesen, deren Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ist, so wird die letztere durch die Werte

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi \cos \psi, \quad z = c \sin \varphi \sin \psi$$

identisch befriedigt, so dafs φ und ψ als Koordinaten auf jener Oberfläche gelten können. Allgemeinere Untersuchungen über Koordinatensysteme auf einer Fläche hat bekanntlich Gauss angestellt.

Aber auch wenn die Bedingungsgleichungen die Koordinaten mehrerer Punkte enthalten, können ohne Schwierigkeit Koordinatensysteme, d. h. Systeme von Bestimmungsstücken, welche die Bedingungsgleichungen identisch befriedigen, in unendlicher Zahl hergestellt werden. Wir setzen nämlich ganz willkürlich, wenn m Bedingungsgleichungen gegeben sind,

$$q_\alpha = f_\alpha(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \ldots),$$

worin jetzt α nur die Werte $1, 2, \ldots (3n-m)$ annehmen mag; hierzu fügen wir die m Bedingungsgleichungen

$$F_\beta(x_1, y_1, z_1, x_2, y_1, z_2, \ldots) = 0.$$

Wir haben dann $3n$ Gleichungen, welche es gestatten, die x_α, y_α, z_α durch die $3n - m = k$ Gröfsen q_α auszudrücken.

Führen wir diese Koordinaten in (11) ein, so sind jetzt die δq_α ganz willkürlich, so dafs wir die $2k$ Bewegungsgleichungen

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{\partial(T+U)}{\partial q_\alpha}, \quad p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} \tag{12}$$

erhalten.

5. Auch wenn keine Kräftefunktion vorhanden ist, die Kräftekomponenten jedoch wieder nur Funktionen der Koordinaten und der Zeit

*) Vgl. hiermit insbesondere die Bemerkungen in § 19, 4.

sind, lassen sich die Bewegungsgleichungen in eine (12) ähnliche Form bringen. Da bei vorhandener Kräftefunktion

$$\delta U = \sum \left[\frac{\partial U}{\partial x_\beta}\delta x_\beta + \frac{\partial U}{\partial y_\beta}\delta y_\beta + \frac{\partial U}{\partial z_\beta}\delta z_\beta\right]$$
$$= \sum [X_\beta \delta x_\beta + Y_\beta \delta y_\beta + Z_\beta \delta z_\beta]$$

ist, so mufs, wenn keine Kräftefunktion existiert, die rechtsstehende Gröfse an Stelle von δU in das Hamilton'sche Prinzip eingeführt werden. Da

$$\delta x_\beta = \sum^\alpha \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha$$

u. s. w.

ist, so haben wir

$$\sum^\beta [X_\beta \delta x_\beta + Y_\beta \delta y_\beta + Z_\beta \delta z_\beta]$$
$$= \sum^\beta \sum^\alpha \left[X_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\alpha} + Y_\beta \frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha} + Z_\beta \frac{\partial z_\beta}{\partial q_\alpha}\right]\delta q_\alpha ,$$

weshalb in (11) an Stelle von

$$\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

$$(13) \qquad Q_\alpha = \sum^\beta \left[X_\beta \frac{\partial x_\beta}{\partial q_\alpha} + Y_\beta \frac{\partial y_\beta}{\partial q_\alpha} + Z_\beta \frac{\partial z_\beta}{\partial q_\alpha}\right]$$

tritt. Bei Benutzung des zuletzt betrachteten Koordinatensystems gelten daher für diesen Fall die Bewegungsgleichungen

$$(14) \qquad \frac{dp_\alpha}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} = Q_\alpha, \quad p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} .$$

6. Die Bewegungsgleichungen (12) hat Hamilton in höchst merkwürdiger Weise umgeformt. Wir haben bereits bemerkt, dafs T in den q'_α eine homogene Funktion zweiten Grades ist und dafs infolge dessen die

$$(15) \qquad p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha}$$

homogene Funktionen erster Ordnung in den q'_α sind. Haben wir etwa

$$(16) \qquad p_\alpha = a_{\alpha 1} q'_1 + a_{\alpha 2} q'_2 + \cdots + a_{\alpha k} q'_k ,$$

so können wir umgekehrt mit Hilfe der k Gleichungen (16) die q'_α als lineare homogene Funktionen der p_α darstellen; es sei etwa

$$(17) \qquad q'_\alpha = b_{\alpha 1} p_1 + b_{\alpha 2} p_2 + \cdots + b_{\alpha k} p_k .$$

Führen wir aber die Werte (17) für die q'_α in T ein, so wird dieses eine homogene Funktion zweiten Grades in den p_α, während die Koeffizienten wieder Funktionen der q_α sind. Die unter

Voraussetzung der neuen Gestalt von T gebildeten Differentialquotienten wollen wir durch Einklammern auszeichnen.

Durch totales Differentiieren von T, einmal in der alten, einmal in der neuen Form, erhalten wir zwei Ausdrücke, deren Gleichsetzung sehr merkwürdige Relationen liefert. Da in der alten Form T eine homogene Funktion zweiten Grades in den q'_α ist, so können wir*)

$$(18) \qquad 2T = \frac{\partial T}{\partial q_1'} q_1' + \frac{\partial T}{\partial q_2'} q_2' + \cdots + \frac{\partial T}{\partial q_k'} q_k'$$

oder

$$(18a) \qquad T = \sum \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} q'_\alpha - T$$

setzen. Die totale Differentiation liefert jetzt

$$dT = \sum q'_\alpha d \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} + \sum \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} dq'_\alpha - \sum \frac{\partial T}{\partial q'_\alpha} dq'_\alpha - \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dq_\alpha$$

oder bei Benutzung von (15)

$$(19) \qquad dT = \sum q'_\alpha dp_\alpha - \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} dq_\alpha .$$

Andrerseits folgt durch totale Differentiation von T in der neuen Form

$$(20) \qquad dT = \sum \left(\frac{\partial T}{\partial p_\alpha}\right) dp_\alpha + \sum \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right) dq_\alpha .$$

Sollen (19) und (20) identisch gleich sein, so mufs

$$(21) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial p_\alpha}\right) = q'_\alpha ,$$

$$(22) \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_\alpha}$$

sein; denn die p_α und q_α treten hier als voneinander unabhängige Variabeln auf, ihre Differentiale können also voneinander unabhängige Werte annehmen.

7. Da U von den q'_α, also auch von den p_α nicht abhängt, so dafs

$$\left(\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

ist, so folgt aus (21) und (22)

---

*) Haben wir nämlich (α und β mögen die Werte $1, 2, \ldots n$ annehmen)

$$X = \sum a_{\alpha\alpha} x_\alpha^2 + 2 \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta ,$$

so ist

$$\frac{\partial X}{\partial x_\alpha} = 2a_{\alpha 1} x_1 + 2a_{\alpha 2} x_2 + \cdots + 2a_{\alpha n} x_n ,$$

also, wie die Summation leicht zeigt,

$$\frac{\partial X}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial X}{\partial x_2} x_2 + \cdots + \frac{\partial X}{\partial x_n} x_n = 2X .$$

$$\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial p_\alpha}\right) = \left(\frac{\partial T}{\partial p_\alpha}\right) = q_\alpha' \tag{23}$$

und

$$\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial q_\alpha}\right) = -\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = -\frac{\partial(T+U)}{\partial q_\alpha}$$

oder mit Benutzung von (12)

$$\left(\frac{\partial(T-U)}{\partial q_\alpha}\right) = -\frac{dp_\alpha}{dt}. \tag{24}$$

Hamilton setzt nun:

$$T - U = H; \tag{25}$$

es ist dies dieselbe Funktion, welche bei dem Prinzip der lebendigen Kraft einer Konstanten gleich gesetzt wird; hier dürfen wir dies nicht im allgemeinen, da U die Zeit enthalten kann, also jenes Prinzip nicht gültig zu sein braucht. Aber auch wenn dieses der Fall ist, tritt natürlich H hier als Funktion, nicht als Konstante auf; seine partiellen Differentialquotienten sind nämlich nicht konstant.

Indem wir festsetzen, dafs H immer als Funktion der p_α und q_α, nicht der q_α und q_α' dargestellt sein soll, dürfen wir jetzt die Klammern bei den Differentialquotienten weglassen. (23) und (24) liefern uns die Bewegungsgleichungen in der wichtigen Gestalt:

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \tag{26}$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}. \tag{27}$$

Die Differentialquotienten der neuen Variabeln q_α und p_α nach der Zeit werden also den positiv, resp. negativ genommenen partiellen Differentialquotienten derselben Funktion H nach p_α und q_α gleichgesetzt.

8. Ist keine Kräftefunktion vorhanden, so mufs an Stelle von $\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$ der Ausdruck (13) gesetzt werden. Die Bewegungsgleichungen werden daher

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p_\alpha}, \tag{28}$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha. \tag{29}$$

9. Sind keine Bedingungsgleichungen gegeben, so gehen die q_α in die x_α, y_α, z_α über. Ist etwa $q_1 = x_1$, so wird

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial q_1'} = \frac{\partial T}{\partial x_1'} = m_1 x_1.$$

Hiernach wird aus (26)

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial T}{\partial (m_1 x_1')} = x_1' \quad \text{u. s. w.},$$

also eine Identität, während aus (27)

$$m_1 \frac{dx_1'}{dt} = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x_1} \quad \text{u. s. w.},$$

also die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen hervorgehen.

10. Auf die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen — wir wollen sie in der allgemeineren Form (28) und (29) annehmen — läſst sich überaus leicht die Methode des letzten Multiplikators anwenden. Wir müssen hierbei die ständige Voraussetzung festhalten, daſs die X_α, Y_α, Z_α, auch wenn keine Kräftefunktion existiert, nur die Koordinaten und die Zeit, nicht die Geschwindigkeiten enthalten; die Q_α sind daher nur von den q_α, nicht von den p_α abhängig.

Die Gleichungen (28) und (29) lassen sich auch in die Form

$$(30) \qquad dt : dq_1 : dq_2 : \ldots : dq_k : dp_1 : dp_2 : \ldots : dp_k$$
$$= 1 : \frac{\partial T}{\partial p_1} : \frac{\partial T}{\partial p_2} : \ldots : \frac{\partial T}{\partial p_k} : \left(-\frac{\partial T}{\partial q_1} + Q_1\right) : \ldots : \left(-\frac{\partial T}{\partial q_k} + Q_k\right)$$

setzen, so daſs die Differentialgleichung für den Multiplikator des Systems [§ 26, (28)] die Gestalt annimmt

$$\frac{d \log M}{dt} + \sum \frac{\partial \frac{\partial T}{\partial p_\alpha}}{\partial q_\alpha} + \sum \frac{\partial \left(-\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + Q_\alpha\right)}{\partial p_\alpha} = 0$$

oder, da $\frac{\partial Q_\alpha}{\partial p_\alpha} = 0$ ist,

$$\frac{d \log M}{dt} + \sum \frac{\partial^2 T}{\partial p_\alpha \partial q_\alpha} - \sum \frac{\partial^2 T}{\partial q_\alpha \partial p_\alpha} = 0$$

oder

$$\frac{d \log M}{dt} = 0,$$

somit

$$(31) \qquad M = \text{Const.}$$

Der Multiplikator des Hamilton'schen Gleichungssystems ist also, wie derjenige der Gleichungen der freien Bewegung, eine *Konstante.*

§ 30.

Das Hamilton'sche Prinzip der variierenden Wirkung und seine Verwendung zur Umformung der Bewegungsgleichungen.

1. Die weitere Theorie der Hamilton'schen Gleichungen ist enge verknüpft mit einem Prinzipe, welches Hamilton im Gegensatz zu dem früheren, dem der stationären Wirkung, als dasjenige der variierenden Wirkung bezeichnet.

Bei dem ersten Hamilton'schen Prinzipe wurde der Wert des Aus-

drucks $\int_{t_0}^{t_1}(T+U)dt$ unter Festhaltung der Anfangs- und Endpositionen verglichen für den wirklich infolge der Kräfte eingeschlagenen Weg und für irgend welche anderen Wege. Jetzt wollen wir die Annahme fester Anfangs- und Endpositionen aufgeben, dafür aber denselben Ausdruck nur für solche Wege vergleichen, welche bei den verschiedenen Anfangs- und Endpositionen und den gegebenen Kräften und Bedingungen wirklich möglich sind. Um die Sache klar zu machen, bemerken wir, dafs infolge der gegebenen Kräfte sich ein Punktesystem von gegebenen Anfangspositionen aus auf unendlich vielen Wegen weiterbewegen kann, je nach der Richtung und Gröfse der Anfangsgeschwindigkeit. Sind Anfangs- und Endpositionen gegeben, so werden in jedem einzelnen Falle die letztgenannten Gröfsen in geeigneter Weise bestimmt werden müssen, damit wirklich die richtigen Endpositionen bei den vorgeschriebenen Kräften erreicht werden. Diese Anfangs- und Endpositionen nun denken wir uns um unendlich kleine Strecken verschoben, jedoch natürlich nur so, dafs die Verschiebungen keinen Widerspruch gegen die Bedingungsgleichungen involvieren; hierdurch erleiden auch die notwendigen Anfangsgeschwindigkeiten und ihre Richtungen Variationen, während nach Festsetzung dieser Gröfsen die jeweiligen Wege durch die Kräfte nebst den Bedingungsgleichungen völlig bestimmt sind. Für diese nur infolge der Variation der Anfangs- und Endpositionen oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Bewegungskonstanten, verschiedenen Wege sollen die Werte der Gröfse

$$V=\int_{t_0}^{t}(T+U)dt \tag{1}$$

verglichen werden. Hamilton bezeichnet diese Gröfse V als die charakteristische Funktion der Bewegungsgleichungen*).

2. Da die Anfangs- und Endzeit der Bewegung konstant beibehalten wird, so ist, wenn wir die q_α und q_α' als abhängige Variabeln ansehen,

$$\delta\int_{t_0}^{t}(T+U)dt=\int_{t_0}^{t}\delta(T+U)dt=\int_{t_0}^{t}\sum\left[\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}\delta q_\alpha'+\frac{\partial(T+U)}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right]dt$$

$$=\int_{t_0}^{t}\sum\left[\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}\frac{d\delta q_\alpha}{dt}+\frac{\partial(T+U)}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha\right]dt$$

$$=\left[\sum\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}\delta q_\alpha\right]_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t}\sum\left[\frac{\partial(T+U)}{\partial q_\alpha}-\frac{d\,\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}}{dt}\right]\delta q_\alpha dt.$$

*) Auch für die früher eingeführte Funktion H wird dieselbe Bezeichnung gebraucht. — Die Endzeit und die Endpositionen werden späterhin als Variabeln angesehen, was wir jetzt schon durch die Bezeichnung andeuten.

Die Variationen für t_0 und t dürfen diesmal nicht vernachlässigt werden; wir unterscheiden die Anfangs- und Endwerte der Koordinaten als q_α^0 und q_α u. s. w. Die Summe unter dem Integralzeichen verschwindet nach § 29, (9); denn die Bewegungsgleichungen stehen hier in Geltung, weil nur wirkliche Bewegungen in Betracht gezogen werden. Setzen wir endlich wieder

$$\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} = p_\alpha,$$

so erhalten wir das Prinzip der variierenden Wirkung in der Gleichung

$$\delta V = \delta \int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt = \sum p_\alpha \delta q_\alpha - \sum p_\alpha^0 \delta q_\alpha^0. \tag{2}$$

Diese Gleichung gilt für beliebige Bedingungsgleichungen, auch wenn die Koordinaten nicht so gewählt sind, daſs sie die Bedingungen von selbst befriedigen; doch werden wir das letztere in Zukunft annehmen.

Es sei noch bemerkt, daſs die Variation nur dann vollständig ist, wenn t als unabhängige, nicht variierte Variable angesehen wird.

3. In der Gleichung (2) sind die Gröſsen T, U, p_α vor der Integration der Bewegungsgleichungen nicht als Funktionen von t allein anzusehen; es ist also V nicht als bekannte Funktion zu betrachten, da erst nach Darstellung von $T + U$ durch t die Integration möglich wird. Denken wir uns indessen für den Augenblick die Integration der Bewegungsgleichungen ausgeführt, was durch $2k$ Integrale geschieht, so sind q_α und p_α sowohl wie auch V als Funktionen von t ausgedrückt. Auſser der additiven Konstanten, welche durch Ausführung der Integration $\int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt$ veranlaſst wird, sind $2k$ Integrationskonstanten vorhanden, als welche wir die Werte q_α^0 und p_α^0 benutzen können. Diese $2k$ Konstanten q_α^0 und p_α^0 bilden mit t, q_α und p_α zusammen ein System von $4k + 1$ Gröſsen, welche durch $2k$ Relationen — die $2k$ Integrale — verbunden sind. Wir können uns daher die p_α und p_α^0 durch t, q_α und q_α^0 ausgedrückt denken. Auf dieser Darstellungsweise beruhen die folgenden Untersuchungen.

Vor allen Dingen führen wir in V, welches nach vollzogen gedachter Integration auſser t nur noch die Konstanten q_α^0 und p_α^0 enthält, mittels jener Beziehungen statt der p_α^0 die q_α und q_α^0 ein. Wir betrachten daher in der Folge V als Funktion von t, q_α und q_α^0.

4. Unter dieser Hypothese variieren wir V nach den q_α und q_α^0, lassen aber wie oben t ungeändert. Wir erhalten

$$\delta V = \sum \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha + \sum \frac{\partial V}{\partial q_\alpha^0} \delta q_\alpha^0 \tag{3}$$

und durch Zusammenstellung mit (2)

$$(4)\qquad \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = p_\alpha, \quad \frac{\partial V}{\partial q_\alpha^0} = -p_\alpha^0.$$

Ferner ist nach (1)

$$(5)\qquad \frac{dV}{dt} = T + U$$

oder, da V die Zeit t sowohl explizite als auch implizite durch die q_α enthält*),

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} = T + U$$

oder mit Benutzung von (4)

$$(6)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} - (T + U) = 0.$$

Nun ist aber

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}, \quad \frac{dq_\alpha}{dt} = q_\alpha'$$

und daher unter Benutzung von § 29, (18)

$$(7)\qquad \sum p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt} = \sum \frac{\partial T}{\partial q_\alpha'} q_\alpha' = 2T,$$

wodurch (6), wenn wieder

$$H = T - U$$

gesetzt wird, in die einfache Gleichung

$$(8)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H = 0$$

übergeht.

Hierin kann H als Funktion von t, q_α und p_α, also nach (4) auch von t, q_α und $\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$ angesehen werden. Bezeichnen wir bei H die Argumente durch eine beigesetzte Klammer, so ist statt (8) zu schreiben

$$(9)\qquad \frac{\partial V}{\partial t} + H\left(t, q_1, q_2, \ldots q_k, \frac{\partial V}{\partial q_1}, \frac{\partial V}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial V}{\partial q_k}\right) = 0.$$

Da H bekannt ist**), so haben wir für V eine nicht lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den $(k+1)$ unabhängigen Variabeln t und q_α.

Die Integration von (9) liefert ein vollständiges Integral mit $(k+1)$ willkürlichen Konstanten, als welche die q_α^0 und die erwähnte additive Konstante betrachtet werden können.

5. Ist die Integration von (9) gelungen, hat man also V als Funktion

---

*) Nicht etwa durch die als konstant gedachten Größen q_α^0.

**) U ist die bekannte Kräftefunktion, T aber ein Ausdruck von stets gleichbleibender Form.

von t, q_α, q_α^0 dargestellt, so hat man damit sofort die vollständig wie auch die einfach integrierten Bewegungsgleichungen. Man braucht zu diesem Zwecke nur die Gleichungen (4) zu bilden, indem man V nach den q_α und q_α^0 partiell differentiiert und die erhaltenen Werte p_α, resp. $-p_\alpha^0$ gleichsetzt. Die k letzten Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha^0} = -p_\alpha^0 \tag{10}$$

sind die vollständigen Integrale; sie enthalten nämlich, da die additive Konstante von V durch die Differentiation wegfällt, die $2k$ Konstanten q_α^0 und p_α^0 und die Variabeln t und q_α, also die Zeit und die Koordinaten. Die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = p_\alpha \tag{11}$$

entsprechen nur einer einfachen Integration der Bewegungsgleichungen; denn sie enthalten noch die q_α', von welchen die p_α Funktionen sind; auch kommen in ihnen nur die k Konstanten q_α^0 vor*). Immerhin können diese Gleichungen auch von Nutzen sein.

Das Hauptergebnis der Hamilton'schen Untersuchungen ist also das folgende:

Die Integration der k Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung, welche nach Beseitigung der überflüssigen Variabeln mittels der Bedingungsgleichungen übrig geblieben sind, läſst sich auf die Integration einer nicht linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung (9), welche die Zeit und die Koordinaten als unabhängige Variable enthält, zurückführen. Ist die abhängige Variable V dieser Gleichung durch Integration gefunden, so braucht man nur ihre partiellen Differentialquotienten nach den konstanten Anfangskoordinaten neuen Konstanten gleichzusetzen, um die integrierten Bewegungsgleichungen zu erhalten.

Umgekehrt liefert auch, wie unschwer nachzuweisen ist, die Integration der Bewegungsgleichungen ein vollständiges Integral der partiellen Differentialgleichung (9).

6. Um diese etwas abstrakten Untersuchungen anschaulicher zu machen, wollen wir für den Fall der freien Bewegung die q_α durch die Kartesischen Koordinaten x_α, y_α, z_α ersetzen. Wie in § 29, 9 haben wir

$$p_1 = m_1 x_1' \quad \text{u. s. w.};$$

weiter ist $p_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1}$ u. s. w. zu setzen, wodurch T in

$$T = \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_\alpha} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_\alpha}\right)^2 \right]$$

*) Weil V nach Obigem als Funktion von t, q_α und q_α^0 anzusehen ist.

übergeht. Die partielle Differentialgleichung (9) wird daher

$$(13)\quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_\alpha} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z_\alpha}\right)^2 \right] - U = 0.$$

Ist V durch Integration gefunden, so sind die einfachen Integrale nach (11)

$$(14)\qquad \frac{\partial V}{\partial x_\alpha} = m_\alpha \frac{d x_\alpha}{dt} \quad \text{u. s. w.,}$$

die vollständigen Integralgleichungen aber, falls die Konstanten $x_\alpha^0, y_\alpha^0, z_\alpha^0$ sind, nach (10)

$$(15)\qquad \frac{\partial V}{\partial x_\alpha^0} = c_\alpha \quad \text{u. s. w.,}$$

worin die c_α u. s. w. neue Konstanten bedeuten.

7. Wir haben bis jetzt angenommen, dafs die Konstanten, nach welchen V differentiiert werden mufs, um die linken Seiten der integrierten Bewegungsgleichungen zu liefern, die Anfangswerte q_α^0 sind. Indessen kann man statt dieser irgend welche andere k nicht additive, willkürliche Konstanten a_α, welche in dem Integrale vorkommen und natürlich Funktionen der q_α^0 sind, hierzu benutzen. Es ist nämlich

$$\frac{\partial V}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial V}{\partial q_1^0} \frac{\partial q_1^0}{\partial a_0} + \frac{\partial V}{\partial q_2^0} \frac{\partial q_2^0}{\partial a_\alpha} + \cdots + \frac{\partial V}{\partial q_k^0} \frac{\partial q_k^0}{\partial a_\alpha},$$

und wenn man diese k Ausdrücke k beliebigen Konstanten gleichsetzt und beachtet, dafs die Koeffizienten $\frac{\partial q_\beta^0}{\partial a_\alpha}$ eben auch nur Konstanten (aus den a_α oder q_β^0 zusammengesetzt) sind, so folgen durch Auflösung der k Gleichungen auch für die $\frac{\partial V}{\partial q_\alpha^0}$ konstante Werte. Die Systeme

$$(15\text{a})\qquad \frac{\partial V}{\partial a_\alpha} = C_\alpha \quad \text{und} \quad \frac{\partial V}{\partial q_\alpha^0} = c_\alpha$$

können daher bei der völligen Willkürlichkeit der C_α und c_α als gleichbedeutend mit (11) und (10) angesehen werden.

Hat man also V aus (9) bestimmt, so liefern die partiellen Differentialquotienten nach irgend einem System von k nicht additiven Integrationskonstanten, neuen Konstanten gleichgesetzt, die fertigen Integrale der Bewegungsgleichungen.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dafs die Zurückführung der Integration der Bewegungsgleichungen auf die Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung im allgemeinen nicht als eine Reduktion, sondern nur als eine Transformation angesehen werden darf. Doch kann unter Umständen, wie dies auch sonst der Fall ist, durch die Transformation die Auffindung des Integrals erleichtert werden. Der all-

gemeinen Integration der Bewegungsgleichungen kommen wir durch die Hamilton'schen Untersuchungen um keinen Schritt näher.

8. Wenn in U, also auch in H, die Zeit nicht explizite vorkommt, läſst sich die partielle Differentialgleichung (9) auf eine andere zurückführen, welche eine unabhängige Variable weniger enthält.

In diesem Falle setzen wir

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a \tag{16}$$

und denken uns mittels dieser Gleichung (in der es nach Ausführung der Integration vorkommt) t als Funktion der neuen Variabeln a, der q_α und der Integrationskonstanten, für welche wir jetzt allgemein a_α schreiben wollen, ausgedrückt. Hiernach definieren wir eine neue Gröſse durch die Gleichung

$$W = V - at, \tag{17}$$

worin wir t in der angegebenen Weise ausgedrückt denken. W ist also eine Funktion der Gröſsen q_α, a_α und a.

Behandeln wir nun V nach wie vor noch als Funktion von t, so ist bei Benutzung von (16)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial a} &= \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial a} - a\frac{\partial t}{\partial a} - t = -t, \\ \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} &= \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial q_\alpha} - a\frac{\partial t}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}, \\ \frac{\partial W}{\partial a_\alpha} &= \frac{\partial V}{\partial a_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial a_\alpha} - a\frac{\partial t}{\partial a_\alpha} = \frac{\partial V}{\partial a_\alpha}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Durch (16) und (18) wird aus (9), da t in H nicht explizite enthalten ist,

$$a + H\left(q_1, q_2, \ldots q_k, \frac{\partial W}{\partial q_1}, \frac{\partial W}{\partial q_2}, \ldots \frac{\partial W}{\partial q_k}\right) = 0, \tag{19}$$

eine Differentialgleichung, welche keinen Differentialquotienten nach a enthält, so daſs a in ihr die Rolle einer Konstanten spielt.

Hat man für (19) ein vollständiges Integral mit k Konstanten gefunden, so erhält man V mittels (17) und (18) in der Form

$$V = W + at = W - a\frac{\partial W}{\partial a}, \tag{20}$$

worin jedoch a wieder mittels der ersten Gleichung (18) durch t zu ersetzen ist. Hiernach würde V statt $(k + 1)$ nur k Konstanten enthalten; da indessen die Entwicklungen in keiner Weise geändert werden, wenn $t - t_0$ an Stelle von t tritt, so kann durch t_0 die fehlende Konstante ersetzt werden.

Übrigens braucht man, um die fertigen Integrale der Bewegungsgleichungen hinzuschreiben, nicht auf V zurückzugehen. Bezeichnen $b_1, b_2, \ldots b_{k-1}$ willkürliche Konstanten, so kann man nach (18) für (10)

und (11) schreiben: (W enthält aufser einer additiven nur $(k-1)$ Konstanten)

$$(21)\qquad \begin{cases} \frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \ldots \frac{\partial W}{\partial a_{k-1}} = b_{k-1}, \\ \frac{\partial W}{\partial a} = t_0 - t, \\ \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = p_\alpha . \end{cases}$$

Beachtet man noch, dafs (19) für $a =$ Const., da $H = T - U$ ist, die Gleichung der lebendigen Kraft darstellt, so kann man das Schlufsresultat, welches für die wichtigsten in der Praxis vorkommenden Fälle anwendbar ist, folgendermafsen in Worte fassen:

Enthält die Kräftefunktion U die Zeit nicht explizite, so kann man in der Gleichung der lebendigen Kraft, welche hier stets gültig ist,

$$a + T - U = 0,$$

zunächst die q_α und p_α einführen, dann aber p_α durch $\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ ersetzen. Hat man für die so erhaltene partielle Differentialgleichung mit der abhängigen Variabeln W ein vollständiges Integral gefunden, welches die nicht additiven Konstanten $a_1, a_2, \ldots a_{k-1}$ enthält, so sind die Integrale der Bewegungsgleichungen durch die Gleichungen (21) gegeben.

9. Im Falle eines freien Systems geht die partielle Differentialgleichung (19), analog (13), in

$$\frac{1}{2} \sum \frac{1}{m_\alpha} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z_\alpha}\right)^2 \right] = U - a$$

über.

Den Fall, dafs keine Kräftefunktion vorhanden ist, wollen wir nicht weiter verfolgen.

Ehe wir zu der schönsten Anwendung der Hamilton'schen Methode, der Integration der Bewegungsgleichungen für die Attraktion eines materiellen Punktes nach zwei festen Zentren, übergehen, müssen wir eine Hilfsuntersuchung über elliptische Koordinaten vorherschicken, die auch sonst von Nutzen ist.

§ 31.

Elliptische Koordinaten.

1. Die Gleichung

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

in welcher

$$a^2 > b^2 > c^2$$

sein soll, stellt ein dreiachsiges Ellipsoid dar, dessen Halbachsen a, b und c sind. Die Hauptschnitte desselben, d. h. seine Schnitte mit den Koordinatenebenen, sind Ellipsen, deren Gleichungen man aus (1) durch Nullsetzen von x, y, z erhält; sie lauten

$$(2) \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Die Entfernungen der Brennpunkte vom Mittelpunkte, also die linearen Exzentrizitäten dieser Ellipsen, werden durch die Gröfsen

$$(3) \qquad \sqrt{b^2 - c^2}, \quad \sqrt{a^2 - c^2}, \quad \sqrt{a^2 - b^2}$$

dargestellt. Die grofse Achse fällt bei der ersten Ellipse in die y-Achse, bei den beiden andern in die x-Achse.

2. Man nennt zwei zentrische (d. h. ein Zentrum besitzende) Kegelschnitte konfokal, wenn sie dieselben Brennpunkte haben; zwei zentrische Flächen zweiter Ordnung heifsen konfokal, wenn ihre Hauptschnitte dieselben Brennpunkte besitzen.

Will man eine Fläche zweiter Ordnung aufstellen, welche mit (1) konfokal ist, so mufs man die Halbachsen a^2, b^2, c^2 derart ändern, dafs die Gröfsen (3) ungeändert bleiben. Dies ist aber offenbar dann und nur dann der Fall, wenn an Stelle von a^2, b^2, c^2 die Werte

$$a^2 + \lambda, \quad b^2 + \lambda, \quad c^2 + \lambda$$

treten, worin λ ganz willkürlich ist.

Die Gleichung einer mit (1) konfokalen Fläche zweiter Ordnung lautet daher

$$(4) \qquad \frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1\,.$$

Da λ auch negativ werden kann, braucht (4) nicht notwendig ein Ellipsoid darzustellen; es sind vielmehr folgende Fälle zu unterscheiden:

a) $a^2 + \lambda > 0$, $b^2 + \lambda > 0$, $c^2 + \lambda > 0$: Ellipsoid.
b) $a^2 + \lambda > 0$, $b^2 + \lambda > 0$, $c^2 + \lambda < 0$: einschaliges Hyperboloid.
c) $a^2 + \lambda > 0$, $b^2 + \lambda < 0$, $c^2 + \lambda < 0$: zweischaliges Hyperboloid.

Im zweiten und dritten Falle sind zwei Hauptschnitte Hyperbeln.

Werden alle drei Nenner negativ, so erhält man keine reelle Fläche.

Wird einer der Nenner, z. B. $c^2 + \lambda$, gleich Null, so reduziert sich die Gleichung auf die Form

$$z^2 = 0\,,$$

d. h. sie geht in die Gleichung der xy-Ebene über, und Analoges gilt für die beiden andern Fälle.

3. Sei nun ein bestimmter Punkt x, y, z fest vorgelegt. Wir fragen: wie viele der konfokalen Flächen (4) gehen durch x, y, z, und welcher Art sind sie?

Wie man durch Wegschaffen der Nenner von (4) erkennt, ist diese Gleichung in λ vom dritten Grade. Um uns zu überzeugen, ob die Lösungen derselben alle reell sind, lassen wir λ alle Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen. So lange $\lambda < -a^2$ ist, hat die linke Seite von (4) einen negativen Wert; für $\lambda = -a^2$ wird sie unendlich.

Ist λ unendlich wenig gröfser als $-a^2$, so ist die linke Seite unendlich grofs im Positiven; denn gegen das erste unendlich grofse positive Glied kommen die andern nicht in Betracht. Nimmt aber λ zu, bis es unendlich wenig unterhalb $-b$ liegt, so wird die linke Seite unendlich grofs im Negativen; daher mufs dieselbe, während λ das Intervall von $-a^2$ bis $-b^2$ durchläuft, alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ durchlaufen, also auch einmal den Wert 1, den der rechten Seite, annehmen. Es liegt daher eine Lösung, sie heifse λ_3, zwischen $-a^2$ und $-b^2$. Wird λ unendlich wenig gröfser als $-b^2$, so wird die linke Seite wieder positiv unendlich, um bei der Annäherung von λ an $-c^2$ wieder ins negativ Unendliche überzugehen. Daher liegt auch eine Lösung $\lambda = \lambda_2$ zwischen $-b^2$ und $-c^2$. Überschreitet λ den Wert $-c^2$, so ist die linke Seite anfänglich positiv unendlich, um für $\lambda = +\infty$ sich der Null zu nähern. Dazwischen wird sie abermals gleich 1, d. h. ein $\lambda = \lambda_1$ ist gröfser als $-c^2$.

Die Gleichung (4), in der für x, y, z bestimmte Werte angenommen werden, liefert also für λ immer drei reelle Werte λ_1, λ_2, λ_3, und zwar ist

$$\begin{aligned} \lambda_1 &> -c^2 \\ -c^2 > \lambda_2 &> -b^2 \\ -b^2 > \lambda_3 &> -a^2. \end{aligned}$$

Daher stellt (4), wenn jetzt x, y, z wieder als variabel angenommen werden, für $\lambda = \lambda_1$ ein Ellipsoid, für $\lambda = \lambda_2$ ein einschaliges Hyperboloid und für $\lambda = \lambda_3$ ein zweischaliges Hyperboloid dar. Also:

Durch jeden Punkt x, y, z gehen drei Flächen des Systems (4), von denen eine ein Ellipsoid, eine ein einschaliges und eine ein zweischaliges Hyperboloid ist*).

4. Drei beliebige abgebraische Flächen schneiden sich im allgemeinen in einer endlichen Anzahl von Punkten; man kann daher sagen, dafs die Lage eines Punktes durch drei abgebraische Flächen, welche durch ihn gehen, mit endlicher Vieldeutigkeit bestimmt sei, singuläre Fälle abgerechnet. Sind drei Systeme solcher Flächen gegeben, in denen jedes Individuum durch einen Spezialwert eines Parameters fixiert wird, so

*) Das zweischalige Hyperboloid hat mit der yz-Ebene keine reelle Schnittlinie gemein; trotzdem kann man der imaginären Schnittlinie die beiden reellen Brennpunkte zuschreiben, welche der Schnitt des Ellipsoids (1) mit dieser Ebene besitzt.

kann man diese Parameter als Koordinaten zur Bestimmung beliebiger Punkte ansehen. Denn ist durch Festsetzung je eines Parameters in jedem der drei Systeme je eine Fläche fixiert, so schneiden sich diese drei Flächen in gewissen Punkten, bestimmen also die Lage eines Punktes als Schnittpunkt mit endlicher Vieldeutigkeit.

So wird durch das Kartesische Koordinatensystem ein Punkt in der Weise festgelegt, dafs man ihn als Schnittpunkt dreier Ebenen denkt, welche den drei Koordinatenebenen parallel sind und durch ihren Abstand von letzteren fixiert werden. Die räumlichen Polarkoordinaten kann man durch ein System konzentrischer Kugeln und durch zwei Ebenensysteme, welche durch den Mittelpunkt des ersteren gehen, repräsentieren u. s. w.

Die Gleichung (4) stellt ein System von Ellipsoiden, eines von einschaligen und eines von zweischaligen Hyperboloiden dar, wenn man λ zwischen den angegebenen Grenzen variiert. Geben wir je ein λ_1, λ_2, λ_3 bestimmt an, so ist hierdurch je eine Fläche dieser drei Gattungen eindeutig festgesetzt, und diese drei Flächen schneiden sich im allgemeinen in acht Punkten, welche hierdurch als bestimmt anzusehen sind. Wir können also die λ_1, λ_2, λ_3 als ein elliptisches Koordinatensystem betrachten. Die Lage jedes Punktes wird — freilich achtdeutig — dadurch angegeben, dafs man die Parameter λ_1, λ_2, λ_3 für ihn festsetzt; diese bestimmen drei Flächen der genannten Gattungen, die sich in dem Punkte schneiden.

Die Vieldeutigkeit der Bestimmung durch elliptische Koordinaten bringt nach den Bemerkungen von § 29, 1 bei mechanischen Problemen keine besonderen Nachteile mit sich.

5. Läfst man a^2 ins Unendliche wachsen, so geht (4) in

$$\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \tag{5}$$

über. Es ist dies ein System von konfokalen elliptischen und hyperbolischen Cylindern, welche aus der yz-Ebene ein System von konfokalen Ellipsen und Hyperbeln ausschneiden, wodurch wir auch für die Ebene ein elliptisches Koordinatensystem erhalten. Einem bestimmten Punkte y, z entspricht ein $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$, so dafs

$$\lambda_1 > -c^2, \quad -b^2 < \lambda_2 < -c^2$$

ist. λ_1 bestimmt das System von Ellipsen, λ_2 dasjenige von Hyperbeln. Durch die Schnittpunkte beider Systeme sind die Punkte der Ebene vierdeutig bestimmt.

Nimmt man $-\lambda_3$ als unendlich und von a^2 nur um eine endliche Gröfse verschieden an, so erhält man zu den Cylindersystemen noch ein System von Ebenenpaaren, welche der yz-Ebene parallel sind.

6. Will man die drei elliptischen Koordinaten eines räumlichen Punktes x, y, z bestimmen, so mufs man die kubische Gleichung (4) nach λ auflösen; die Lösungen λ_1, λ_2, λ_3 sind die elliptischen Koordinaten

Ebenso hat man zur Bestimmung der elliptischen Koordinaten eines Punktes y, z in der Ebene die quadratische Gleichung (5) nach λ zu lösen.

Sind umgekehrt die elliptischen Koordinaten bekannt und werden die Kartesischen gesucht, so hat man bei drei Koordinaten x, y, z aus den drei Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2+\lambda_1} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda_1} + \dfrac{z^2}{c^2+\lambda_1} = 1, \\ \dfrac{x^2}{a^2+\lambda_2} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda_2} + \dfrac{z^2}{c^2+\lambda_2} = 1, \\ \dfrac{x^2}{a^2+\lambda_3} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda_3} + \dfrac{z^2}{c^2+\lambda_3} = 1 \end{cases}$$

durch Elimination zu bestimmen. Man erhält für x^2, y^2, z^2 nur je einen Wert, während x, y, z positiv oder negativ genommen werden können, so daſs sich im ganzen acht Punkte ergeben; dieselben liegen symmetrisch in den acht Teilen des Raumes, in welche dieser durch die drei Koordinatenebenen geteilt wird.

Die Elimination selbst führt man am besten allmählich durch. Multipliziert man die Gleichungen mit $c^2+\lambda_1$, $c^2+\lambda_2$, $c^2+\lambda_3$ und subtrahiert dann die zweite und dritte jeweilig von der ersten, so erhält man

$$\left(\frac{c^2+\lambda_1}{a^2+\lambda_1} - \frac{c^2+\lambda_2}{a^2+\lambda_2}\right)x^2 + \left(\frac{c^2+\lambda_1}{b^2+\lambda_1} - \frac{c^2+\lambda_2}{b^2+\lambda_2}\right)y^2 = \lambda_1 - \lambda_2,$$

$$\left(\frac{c^2+\lambda_1}{a^2+\lambda_1} - \frac{c^2+\lambda_3}{a^2+\lambda_3}\right)x^2 + \left(\frac{c^2+\lambda_1}{b^2+\lambda_1} - \frac{c^2+\lambda_3}{b^2+\lambda_3}\right)y^2 = \lambda_1 - \lambda_3$$

oder, wenn man die Identitäten

$$(7) \qquad \frac{c^2+\lambda_1}{a^2+\lambda_1} - \frac{c^2+\lambda_2}{a^2+\lambda_2} = \frac{(a^2-c^2)(\lambda_1-\lambda_2)}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)} \quad \text{u. s. w.}$$

beachtet und die gemeinsamen Faktoren $\lambda_1 - \lambda_2$ und $\lambda_1 - \lambda_3$ wegdividiert,

$$(8) \qquad \begin{cases} \dfrac{(a^2-c^2)x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)} + \dfrac{(b^2-c^2)y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)} = 1, \\ \dfrac{(a^2-c^2)x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_3)} + \dfrac{(b^2-c^2)y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_3)} = 1. \end{cases}$$

Um auch y^2 zu eliminieren, multipliziert man die erste Gleichung (7) mit $b^2+\lambda_2$, die zweite mit $b^2+\lambda_3$ und erhält durch Subtraktion

$$\frac{a^2-c^2}{a^2+\lambda_1}\left[\frac{b^2+\lambda_2}{a^2+\lambda_2} - \frac{b^2+\lambda_3}{a^2+\lambda_3}\right]x^2 = \lambda_2 - \lambda_3$$

oder

$$\frac{(a^2-c^2)(a^2-b^2)x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)} = 1$$

oder endlich, wenn die analogen Gleichungen zugefügt werden,

$$(9)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}, \\ y^2 = \dfrac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}, \\ z^2 = \dfrac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(c^2-b^2)(c^2-a^2)}. \end{cases}$$

Dafs die rechten Seiten dieser Gleichungen, wie notwendig, stets positiv sind, ist leicht nachzuweisen. In dem Ausdrucke für x^2 sind alle Faktoren positiv, in demjenigen für y^2 sind $b^2+\lambda_3$ und b^2-a^2 negativ, in demjenigen für z^2 sind alle Faktoren aufser dem ersten des Zählers negativ.

Für die planimetrische Aufgabe erhält man entweder durch Anwendung des gleichen Verfahrens auf die Relationen, welche für $\lambda=\lambda_1$ und $\lambda=\lambda_2$ aus (5) hervorgehen, oder durch Unendlichsetzen von a^2 und $-\lambda_3$ in (9) die Gleichungen

$$(9\text{a})\quad \begin{cases} y^2 = \dfrac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}{b^2-c^2}, \\ z^2 = \dfrac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}{c^2-b^2}. \end{cases}$$

Durch die Relationen (9) und (9a) ist der Übergang von elliptischen Koordinaten zu Kartesischen ermöglicht.

7. Aus (9) folgen

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}$$
$$=\frac{a^2+\lambda_3}{(a^2-c^2)(a^2-b^2)}-\frac{b^2+\lambda_3}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}+\frac{c^2+\lambda_3}{(b^2-c^2)(a^2-c^2)}$$

oder, wenn man rechts Alles auf denselben Nenner bringt,

$$(10)\quad \frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}=0$$

und zwei analoge Gleichungen.

8. Je zwei konfokale Flächen stehen aufeinander senkrecht, d. h. ihre Normalen bilden längs ihrer Schnittlinie rechte Winkel miteinander.

Bei einer beliebigen Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

stehen bekanntlich die Richtungskosinus der Normalen im Punkte x, y, z im Verhältnisse

$$\frac{\partial f}{\partial x}:\frac{\partial f}{\partial y}:\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Die Bedingung dafür, dafs die Normalen zweier Flächen

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{und} \quad f_1(x, y, z) = 0$$

längs ihrer Schnittlinie rechte Winkel miteinander bilden, dafs also die Kosinus dieser Winkel verschwinden, ist daher

$$(11) \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0.$$

Für eine Fläche (4) ist aber

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{a^2+\lambda}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2+\lambda}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{c^2+\lambda};$$

die Gleichung (11) für zwei dieser Flächen wird daher mit einer der Gleichungen (10) identisch.

Schneiden sich aber je zwei verschiedenen Systemen angehörige Flächen — demselben Systeme angehörige Flächen schneiden sich überhaupt nicht — rechtwinklig, so stehen auch die drei Schnittlinien von drei durch einen Punkt gehenden Flächen paarweise aufeinander senkrecht. Die elliptischen Koordinaten sind orthogonal.

Zugleich geht hieraus hervor, dafs auch die ebenen elliptischen Koordinaten orthogonal sind.

Durch unendlich viele, jeweilig unendlich benachbarte Flächen der drei räumlichen Systeme wird also der ganze Raum in unendlich viele unendlich kleine rechtwinklige Parallelepipeda zerlegt.

Beiläufig möge bemerkt werden, dafs die Kurven, in welchen eine Fläche des einen Systems durch diejenigen der beiden andern geschnitten werden, die Krümmungslinien dieser Fläche sind.

9. Infolge der Orthogonalität des elliptischen Koordinatensystems erhalten manche Differentialrelationen, insbesondere auch der Ausdruck für das Geschwindigkeitsquadrat, in diesen Koordinaten eine einfache Gestalt.

Nimmt man von den Ausdrücken (9) die Logarithmen und differentiiert dann, so folgt

$$(12) \qquad \begin{cases} \dfrac{2dx}{x} = \dfrac{d\lambda_1}{a^2+\lambda_1} + \dfrac{d\lambda_2}{a^2+\lambda_2} + \dfrac{d\lambda_3}{a^2+\lambda_3}, \\[2ex] \dfrac{2dy}{y} = \dfrac{d\lambda_1}{b^2+\lambda_1} + \dfrac{d\lambda_2}{b^2+\lambda_2} + \dfrac{d\lambda_3}{b^2+\lambda_3}, \\[2ex] \dfrac{2dz}{z} = \dfrac{d\lambda_1}{c^2+\lambda_1} + \dfrac{d\lambda_2}{c^2+\lambda_2} + \dfrac{d\lambda_3}{c^2+\lambda_3} \end{cases}$$

und hieraus

$$(13) \quad 4(dx^2+dy^2+dz^2) = \left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)^2}\right] d\lambda_1^2 \\ + \cdots \\ + 2\left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}\right] d\lambda_1 d\lambda_2 \\ + \cdots.$$

Nun ist aber nach (9)

$$L = \frac{x^2}{(a^2+\lambda_1)^2} + \frac{y^2}{(b^2+\lambda_1)^2} + \frac{z^2}{(c^2+\lambda_1)^2}$$
$$= \frac{(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(a^2+\lambda_1)(a^2-c^2)(a^2-b^2)} + \frac{(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(b^2+\lambda_1)(b^2-a^2)(b^2-c^2)}$$
$$+ \frac{(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(c^2+\lambda_1)(c^2-b^2)(c^2-a^2)}.$$

Die etwas umständliche Umrechnung dieses Ausdrucks kann man vermeiden, wenn man beachtet, dafs L für $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\lambda_1 = \lambda_3$ verschwindet, da es dann mit den Ausdrücken (10) übereinstimmt; dafs ferner der Zähler, nachdem Alles auf denselben Nenner gebracht ist, auch für

$$a^2 - b^2 = 0, \quad a^2 - c^2 = 0, \quad b^2 - c^2 = 0$$

verschwinden mufs, da dies mit dem Nenner der Fall ist, ohne dafs L hierfür unendlich wird, weil sich je zwei Glieder mit dem Nenner alsdann wegheben. Der Zähler mufs daher den Faktor

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)$$

besitzen, oder er mufs vielmehr ganz damit übereinstimmen, da z. B. das Glied $\lambda_1^2 a^4 (b^2 - c^2)$ in diesem Faktor und zugleich in dem entwickelten Zähler vorkommt. Daher wird

$$(14) \qquad L = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}.$$

Die beiden analogen Ausdrücke bezeichnen wir mit M und N.

Da ferner in (13) die Glieder mit $d\lambda_1\, d\lambda_2$ u. s. w. nach (10) verschwinden, so wird

$$(15) \qquad 4(dx^2 + dy^2 + dz^2) = L\,d\lambda_1^2 + M\,d\lambda_2^2 + N\,d\lambda_3^2$$

oder, wenn T wieder die lebendige Kraft eines Punktes mit der Masse m und ein Strich die Differentiation nach t bezeichnet,

$$(16) \quad 8T = 4m(x'^2 + y'^2 + z'^2) = m[L\lambda_1'^2 + M\lambda_2'^2 + N\lambda_3'^2].$$

Für das ebene System folgt aus (14)

$$(17) \qquad L = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}, \quad M = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)},$$

während man für T einen analogen Ausdruck erhält.

10. Aus (15) ist noch ersichtlich, dafs ein Linienelement einer der Schnittkurven, welches zwischen zwei benachbarten Flächen des orthogonalen Systems liegt, durch

$$(18) \qquad \sqrt{L}\,d\lambda_1, \quad \sqrt{M}\,d\lambda_2, \quad \sqrt{N}\,d\lambda_3$$

dargestellt ist. Ein solches Element mufs nämlich mit dem Streckenelement $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ zusammenfallen, wenn man zwei der $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ungeändert läfst, das dritte aber um $d\lambda_\alpha$ ändert.

Analoges gilt für das ebene System.

11. Wir wollen nun noch die partielle Differentialgleichung für die

Hamilton'sche Funktion W in elliptischen Koordinaten aufstellen. Nach § 30, 19 lautet dieselbe

$$a + T - U = 0,$$

wenn in T nach Einführung der q_α und p_α die letzteren Gröfsen, d. h. die $\frac{\partial T}{\partial q_\alpha'}$, durch $\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ ersetzt werden. Nun ist aber nach (16), wenn wir uns auf einen Punkt beschränken,

$$4\frac{\partial T}{\partial \lambda_1'} = mL\lambda_1', \quad 4\frac{\partial T}{\partial \lambda_2'} = mM\lambda_2', \quad 4\frac{\partial T}{\partial \lambda_3'} = mN\lambda_3',$$

wofür

$$4\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}, \quad 4\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}, \quad 4\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}$$

einzuführen sind. Es ist hiernach

$$\lambda_1' = \frac{4\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}}{mL} \text{ u. s. w.}$$

zu setzen, so dafs die Differentialgleichung schliefslich lautet:

$$(19) \quad a + \frac{2}{m}\left[\frac{1}{L}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{1}{M}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 + \frac{1}{N}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_3}\right)^2\right] - U = 0.$$

Entsprechend drückt sich die Differentialgleichung beim ebenen System aus.

§ 32.

Die Attraktion nach zwei festen Zentren.

1. Während das Problem der drei Körper, welche sich gegenseitig nach dem Newton'schen Gravitationsgesetze anziehen, noch ungelöst ist, läfst sich die Aufgabe, die Bewegung eines materiellen Punktes zu bestimmen, welcher von zwei festen Zentren aus nach demselben Gesetze angezogen wird, ohne sonderliche Schwierigkeit behandeln. Für die Astronomie ist das Resultat freilich nicht zu verwerten; denn die Voraussetzung zweier attrahierenden Körper, welche einen dritten in Bewegung setzen, sich aber gegenseitig gar nicht oder nur verschwindend wenig aus ihrer Lage bringen, läfst sich in der Natur in keiner Weise realisieren. Für die Störungstheorie ist das Problem also ohne Wert.

Die Differentialgleichungen der Attraktion nach zwei festen Zentren wurden von Euler für den Fall der Bewegung in einer Ebene, von Lagrange und Legendre allgemein integriert. Jacobi gab die Lösung nach dem Hamilton'schen Verfahren, die im folgenden vorgetragen wird. Koenigsberger stellte in seiner Dissertation: De motu puncti versus duo fixa centra attracti, 1860, das allgemeine Integral durch Thetafunktionen dar. Weitere Angaben findet man in einer Abhandlung von Perlewitz, Schlömilch's Zeitschrift, B. 18, in welcher spezielle Fälle

untersucht werden. Die Bewegung kann unter Umständen in einer Ellipse oder Hyperbel verlaufen.

2. Zuerst wollen wir den Fall betrachten, dafs die Bewegung in einer Ebene vor sich geht; dies mufs immer eintreten, wenn die Geschwindigkeitsrichtung in einem Momente mit der Verbindungslinie der beiden Attraktionszentren in einer Ebene liegt. Wir wählen dieselbe zur yz-Ebene, die Verbindungslinie der Zentren zur y-Achse; der Nullpunkt möge in der Mitte zwischen beiden Zentren liegen, so dafs beide um e von ihm abstehen. Sind k und k_1 die Beschleunigungen, welche die Zentren dem bewegten Punkte in der Einheit der Entfernung erteilen, und sind r und r_1 die Entfernungen des Punktes von den Zentren, so ist die Kräftefunktion

$$U = \frac{k}{r} + \frac{k_1}{r_1}, \tag{1}$$

und der Satz von der lebendigen Kraft lautet

$$T = \frac{k}{r} + \frac{k_1}{r_1} + h, \tag{2}$$

wo h an die Stelle des früheren $-a$ gesetzt ist.

Für die yz-Ebene gilt kein Flächensatz (§ 24, 8).

3. Wir wollen nun elliptische Koordinaten, die sich hier als die zweckmäfsigsten erweisen, einführen und dabei die beiden Zentren zu gemeinsamen Brennpunkten nehmen; die Gleichungen der Ellipsen und Hyperbeln beider Systeme sind in der Form

$$\frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1 \tag{3}$$

enthalten, worin

$$b^2 - c^2 = e^2 \tag{4}$$

sein mufs.

Nach § 31, (19) und (17) haben wir die Funktion W, welche sämtliche Integrale der Bewegung liefert, durch die partielle Differentialgleichung (wir nehmen $m = 1$)

$$\frac{(b^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_1)}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{(b^2 + \lambda_2)(c^2 + \lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 = \frac{1}{2} U + \frac{1}{2} h \tag{5}$$

zu bestimmen. Es sind nur noch in U die elliptischen Koordinaten einzuführen.

Nun ist

$$r^2 = (y - e)^2 + z^2, \quad r_1^2 = (y + e)^2 + z^2$$

oder

$$r^2 = y^2 + z^2 - 2ey + e^2, \quad r_1^2 = y^2 + z^2 + 2ey + e^2. \tag{6}$$

Nach § 31, (9a) ist aber

$$y^2 + z^2 = \frac{(b^2 + \lambda_1)(b^2 + \lambda_2) - (c^2 + \lambda_1)(c^2 + \lambda_2)}{b^2 - c^2} = b^2 + c^2 + \lambda_1 + \lambda_2, \tag{7}$$

während e^2 aus (4) zu entnehmen ist.

Hiernach und durch weitere Benutzung von § 31, (9a) erhalten wir

$$r^2 = 2b^2 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2\sqrt{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)} = [\sqrt{b^2+\lambda_1} - \sqrt{b^2+\lambda_2}]^2$$

$$r_1^2 = 2b^2 + \lambda_1 + \lambda_2 + 2\sqrt{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)} = [\sqrt{b^2+\lambda_1} + \sqrt{b^2+\lambda_2}]^2$$

oder

$$(8) \qquad \begin{cases} r = \sqrt{b^2+\lambda_1} - \sqrt{b^2+\lambda_2}, \\ r_1 = \sqrt{b^2+\lambda_1} + \sqrt{b^2+\lambda_2}, \end{cases}$$

also

$$(9) \qquad U = \frac{(k+k_1)\sqrt{b^2+\lambda_1} + (k-k_1)\sqrt{b^2+\lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Die Gleichung (5) geht daher über in

$$(10) \qquad (b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 - (b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2$$
$$= (k+k_1)\sqrt{b^2+\lambda_1} + \frac{1}{2}h\lambda_1 + (k-k_1)\sqrt{b^2+\lambda_2} - \frac{1}{2}h\lambda_2.$$

Die Betrachtung dieser Gleichung zeigt, dafs ein Teil ihrer Glieder nur λ_1 und $\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}$, ein Teil nur λ_2 und $\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}$ enthält. Man kann daher ein Integral von (10) finden, indem man die Gleichung, unter gleichzeitiger additiver und subtraktiver Zufügung einer willkürlichen Konstanten β, in zwei Teile zerlegt, welche nur je eine unabhängige Variable enthalten. Wir setzen also

$$(11) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_1}\right)^2 = \frac{(k+k_1)\sqrt{b^2+\lambda_1} + \frac{1}{2}h\lambda_1 + \beta}{(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial \lambda_2}\right)^2 = \frac{(k-k_1)\sqrt{b^2+\lambda_2} - \frac{1}{2}h\lambda_2 - \beta}{(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}, \end{cases}$$

und erhalten nach ausgeführter Integration dieser totalen Differentialgleichungen*)

$$(12) \qquad W = \int \sqrt{\frac{(k+k_1)\sqrt{b^2+\lambda_1} + \frac{1}{2}h\lambda_1 + \beta}{(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}}\, d\lambda_1$$
$$+ \int \sqrt{\frac{(k-k_1)\sqrt{b^2+\lambda_2} - \frac{1}{2}h\lambda_2 - \beta}{(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}}\, d\lambda_2.$$

Die beiden Integrale erweisen sich, nach Wegschaffung der Wurzeln

*) Integriert man die erste Gleichung, so kann die Integrationskonstante noch von λ_2 abhängen; integriert man die zweite, so kann in der Konstanten λ_1 vorkommen. Es ist daher $W = f_1(\lambda_1) + f_2(\lambda_2)$, wo f_1 und f_2 die einzelnen Integrale sind.

unter dem Wurzelzeichen, als elliptische. W enthält aufser der additiven Integrationskonstanten zwei willkürliche Konstanten h und β, ist also ein vollständiges Integral. Nach § 30, (21) sind die fertigen Bewegungsgleichungen*)

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial h} = t - t_0, \tag{13}$$

worin β_1 eine neue willkürliche Konstante bezeichnet.

4. Geht die Bewegung im Raume vor sich, so dafs der materielle Punkt eine Kurve doppelter Krümmung beschreibt, so denken wir uns durch ihn und die beiden Zentren eine bewegliche Ebene gelegt. Wir können uns dann vorstellen, dafs der Punkt sich in dieser Ebene bewegt, während letztere selbst um die Achse der Zentren eine Rotation ausführt. Beide Teile der Bewegung können getrennt aufgestellt werden. Wenn insbesondere die Bewegung in der rotierenden Ebene bekannt ist, so läfst sich das Gesetz der Rotation dieser Ebene sofort mittels des Flächensatzes angeben, der für eine Ebene gilt, welche senkrecht zur Achse der Zentren steht. Doch erhält man so die letztere Bewegungsgleichung in impliziter Form, so dafs es vorteilhafter erscheint, direkt nach der Hamilton'schen Theorie vorzugehen.

Die Achse der Zentren möge wieder die y-Achse sein und der Nullpunkt wie früher liegen; über die x- und z-Achse ist keine besondere Festsetzung zu machen. Dagegen wollen wir das ebene elliptische Koordinatensystem λ_1 und λ_2 immer in der rotierenden Ebene gelegen denken.

Ist ϱ der senkrechte Abstand des beweglichen Punktes von der y-Achse, φ der Winkel, welchen ϱ mit der positiv gerichteten x-Achse bildet, so haben wir

$$x = \varrho \cos \varphi, \quad z = \varrho \sin \varphi. \tag{14}$$

Die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung ist hier

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 = 2U + 2h, \tag{15}$$

worin wir durch (14) ϱ und φ statt x und z einführen wollen. Es ist

$$\varrho = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{z}{x},$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \frac{x}{\varrho}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial z} = \frac{z}{\varrho}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{z}{x^2 + z^2} = -\frac{z}{\varrho^2}, \quad \frac{\partial \varrho}{\partial z} = \frac{x}{\varrho^2},$$

also

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial \varrho}\frac{x}{\varrho} - \frac{\partial W}{\partial \varphi}\frac{z}{\varrho^2},$$

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial \varrho}\frac{z}{\varrho} + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\frac{x}{\varrho^2},$$

---

*) Dafs h mit $-a$ zu identifizieren ist, erhellt aus der Vergleichung von (2) mit § 30, (19) (s. oben).

so dafs aus (15)

$$(16)\qquad \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 = 2U + 2h$$

wird.

Die Kräftefunktion U hängt nur von den Abständen des materiellen Punktes von den Zentren, also nicht vom Rotationswinkel φ ab. Daher können wir mit (16) eine ähnliche Transformation in bezug auf φ vornehmen, wie § 30, 8 in bezug auf t. Wir setzen, eine neue Variable α einführend,

$$(17)\qquad W_1 = W - \alpha\varphi,$$

indem wir

$$(18)\qquad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = \alpha$$

annehmen und φ hieraus berechnet und in (17) eingesetzt denken; W_1 ist dann von φ unabhängig. Da nun, wenn α als neue, von den übrigen Koordinaten unabhängige Variable betrachtet wird,

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \alpha\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

oder wegen (18)

$$\frac{\partial W_1}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y} \quad \text{und direkt} \quad \frac{\partial W_1}{\partial \varrho} = \frac{\partial W}{\partial \varrho}$$

ist, so wird (16) zu der von φ freien Gleichung

$$(19)\qquad \left(\frac{\partial W_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_1}{\partial \varrho}\right)^2 = 2U - \frac{\alpha^2}{\varrho^2} + 2h.$$

Beachten wir, dafs in der rotierenden Ebene y und ϱ dieselbe Rolle spielen wie beim ebenen Problem y und z, so können wir wie dort zu elliptischen Koordinaten übergehen, wenn wir noch für ϱ^2, welches dem z^2 in § 31, (9a) entspricht, setzen

$$\varrho^2 = -\frac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)}{b^2-c^2},$$

und so

$$(20)\qquad \frac{\alpha^2}{\varrho^2} = \frac{\alpha^2 e^2}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\frac{1}{c^2+\lambda_1} - \frac{1}{c^2+\lambda_2}\right]$$

erhalten. Für U benutzen wir (9), während wir die linke Seite von (19) derjenigen von (5) entsprechend nach § 31, (19) u. s. w. umgestalten; wir gelangen zu der Gleichung

$$(21)\qquad \frac{(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}{\lambda_1-\lambda_2}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \lambda_1}\right)^2 + \frac{(b^2+\lambda_2)(c_2+\lambda_2)}{\lambda_2-\lambda_1}\left(\frac{\partial W_1}{\partial \lambda_2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{(k+k_1)\sqrt{b^2+\lambda_1} + (k-k_1)\sqrt{b^2+\lambda_2}}{\lambda_1-\lambda_2}$$
$$-\frac{\alpha^2 e^2}{4(\lambda_1-\lambda_2)}\left[\frac{1}{c^2+\lambda_1} + \frac{1}{c^2+\lambda_2}\right] + \frac{1}{2}h.$$

Nachdem der Nenner $\lambda_1 - \lambda_2$ beseitigt ist, kann wie oben eine Zerlegung in zwei totale Differentialgleichungen mit den Variabeln λ_1 und λ_2 vorgenommen werden. Wir erhalten schliefslich

$$(22)\quad W_1 = \int \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(k+k_1)\sqrt{b^2+\lambda_1} - \frac{1}{4}\frac{\alpha^2 e^2}{c^2+\lambda_1} + \frac{1}{2}h\lambda_1 + \beta}{(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}}\, d\lambda_1$$

$$+ \int \sqrt{\frac{-\frac{1}{2}(k-k_1)\sqrt{b^2+\lambda_2} - \frac{1}{4}\frac{\alpha^2 e^2}{c^2+\lambda_2} + \frac{1}{2}h\lambda_2 + \beta}{(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}}\, d\lambda_2 .$$

Um die drei fertigen Integralgleichungen zu erhalten, müssen wir

$$W = W_1 + \alpha\varphi$$

nach β und α differentiiert zwei Konstanten, nach h differentiiert aber $t - t_0$ gleichsetzen. Die Bewegung ist also durch die drei Gleichungen

$$(23)\qquad \frac{\partial W_1}{\partial \beta} = \beta', \quad \frac{\partial W_1}{\partial \alpha} = \alpha' - \varphi, \quad \frac{\partial W_1}{\partial h} = t - t_0$$

dargestellt, die sich leicht entwickeln lassen.

Die erste liefert eine Gleichung zwischen λ_1 und λ_2, also die Bahnkurve in der rotierenden Ebene; die zweite liefert den Rotationswinkel, die dritte die Zeit für jeden Punkt der Bahnkurve, in welchem sich gerade der bewegte Punkt befindet.

§ 33.

Herleitung neuer Integrale der Bewegungsgleichungen aus zwei gefundenen.

1. In § 29, (26) und (27) setzten wir bei vorhandener Kräftefunktion die Bewegungsgleichungen in die Form

$$(1)\qquad \frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}, \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}.$$

Sind zwei Integrale dieser Gleichungen in der Form

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi(q_1, q_2, \ldots q_k, p_1, p_2, \ldots p_k, t) = a, \\ \psi(q_1, q_2, \ldots q_k, p_1, p_2, \ldots p_k, t) = b \end{cases}$$

gefunden, so ist

$$(3)\qquad (\varphi, \psi) = c$$

ein neues Integral, wenn

$$(4)\qquad (\varphi, \psi) = \sum_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha}$$

gesetzt wird (Poisson-Jacobi'scher Satz)*).

Beweis. Die Richtigkeit dieses Satzes ist dargethan, wenn die Relation

$$(5)\qquad \frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = 0$$

mittels der Gleichungen (1) erwiesen wird; denn durch Integration von (5) folgt (3). Selbstverständlich sind die q_α und p_α hierbei als Funktionen von t anzusehen.

Es ist

$$(6)\qquad \frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = \sum_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial q_\alpha}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial p_\alpha}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}\right).$$

Um diese Gleichung umzugestalten, differentiieren wir φ partiell nach t, dann weiter nach q_β und p_β; wir finden

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha}\frac{dp_\alpha}{dt}\right) = 0$$

oder mit Benutzung von (1)

$$(7)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) = 0$$

und weiter

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\,\partial q_\beta} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial q_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha \partial q_\beta} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_\alpha \partial q_\beta}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) = 0,$$

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\,\partial p_\beta} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\alpha}\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha \partial p_\beta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha \partial p_\beta}\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_\alpha}\frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha \partial p_\beta} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_\alpha \partial p_\beta}\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) = 0.$$

Andrerseits folgt direkt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_\beta}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\,\partial q_\beta} + \sum_\alpha \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\alpha \partial q_\beta}\frac{dq_\alpha}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_\alpha \partial q_\beta}\frac{dp_\alpha}{dt}\right)$$

oder

---

*) Die Gleichung der Erhaltung der lebendigen Kraft, welche hier immer gilt und eine Vorbedingung der Existenz der Gleichungen (1) ist, darf nicht unter den Integralen (2) vorkommen. — Der Satz wurde von Poisson zuerst erwiesen, blieb jedoch lange unverstanden, bis Jacobi ihn erst recht eigentlich in die Mechanik einführte. Eine Erweiterung desselben wurde von Laurent in der Abhandlung: Sur un théorème de Poisson, Liouville J. (2), B. 17, p. 422 gegeben; doch werden hierdurch keine weitergehenden Resultate erzielt.

$$(10)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\beta}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial q_\beta}+\sum_\alpha\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\,\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_\alpha\partial q_\beta}\,\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right)$$

und ebenso

$$(11)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\beta}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial p_\beta}+\sum_\alpha\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_\alpha\partial p_\beta}\,\frac{\partial H}{\partial p_\alpha}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}\,\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right).$$

Aus (8) und (10), (9) und (11) eliminieren wir

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial q_\beta}\quad\text{und}\quad\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial p_\beta},$$

wodurch wir zu den Gleichungen

$$(12)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\beta}\right)=-\sum_\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha\partial q_\beta}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}\right),$$

$$(13)\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p_\beta}\right)=-\sum_\alpha\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q_\alpha}\,\frac{\partial^2 H}{\partial p_\alpha\partial p_\beta}-\frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha\partial p_\beta}\right)$$

gelangen. Ganz analoge Relationen finden wir für ψ.

Durch Benutzung dieser Ausdrücke geht (6) über in

$$(14)\qquad \frac{d(\varphi,\psi)}{dt}=0\,.$$

Bei teilweiser Änderung der Summationsindices ist nämlich z. B. der Koeffizient von $\frac{\partial^2 H}{\partial q_\alpha\partial q_\beta}$

$$(15)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial\psi}{\partial p_\beta}-\frac{\partial\psi}{\partial p_\alpha}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_\beta};$$

beachtet man aber, dafs α und β beide sämtliche Werte von 1 bis k durchlaufen, so müssen sich je zwei dieser Gröfsen, bei denen α und β vertauscht erscheinen, wegheben, während für $\alpha=\beta$ (15) selbst verschwindet. Dasselbe gilt für die übrigen Koeffizienten.

Somit ist der Satz bewiesen.

2. Bei einem freien System haben wir wieder für die p_α

$$m_\alpha x_\alpha',\quad m_\alpha y_\alpha',\quad m_\alpha z_\alpha',$$

während die q_α die Koordinaten selbst sind. Nun sind zwei Integrale des Systems durch die beiden Flächensätze

$$\sum m_\alpha(y_\alpha z_\alpha'-z_\alpha y_\alpha')=a,$$
$$\sum m_\alpha(z_\alpha x_\alpha'-x_\alpha z_\alpha')=b$$

gegeben. Verfährt man nach (4) und (3), so erhält man als neues Integral

$$\sum m_\alpha(y_\alpha x_\alpha'-x_\alpha y_\alpha')=c,$$

also den dritten Flächensatz, der in der That ein neues Integral repräsentiert.

3. Da man auf das neue Integral (φ, ψ) in Verbindung mit einem der beiden andern dieselbe Methode anwenden und in dieser Art beliebig lange fortfahren kann, so lassen sich aus zwei gefundenen Integralen beliebig viele andere herleiten, vorausgesetzt, dafs man nicht wieder auf frühere Integrale oder auf eine Identität kommt. Aus zwei der Flächensätze ergiebt sich immer der dritte, so dafs man weiterhin aus ihnen nichts Neues erhält. Jacobi glaubt, dafs sich aus solchen Integralen, welche für das spezielle Theorem charakteristisch sind — dies ist bei den Flächensätzen, die einer grofsen Zahl von Theoremen gemeinsam zukommen, nicht der Fall — thatsächlich eine gröfsere Zahl von Integralen, vielleicht sogar alle herleiten lassen. Doch ist kein Fall bekannt, wo die Integration wirklich durch dieses Hilfsmittel gelungen wäre.

§ 34.

Das allgemeine Störungsproblem.

1. In den §§ 12 und 13 haben wir bereits den Begriff der Störungen für spezielle Fälle kennen gelernt. Wir können nun den Gegenstand zu der Aufgabe verallgemeinern: Es ist die Bewegung eines Systems materieller Punkte unter dem Einflusse gewisser Kräfte bekannt, d. h. die Bewegungsgleichungen sind für diesen Fall vollständig integriert. Nun treten zu den vorhandenen Kräften neue hinzu, welche gegen die alten verhältnismäfsig geringfügig sind; es soll eine Methode angegeben werden, die neue Bewegung aus der alten, nötigenfalls durch Näherung, herzuleiten.

Die integrierten Bewegungsgleichungen enthalten aufser den Variabeln eine Anzahl von Konstanten, die man in der Planetentheorie als Bahnelemente bezeichnet. Wir sahen bereits in § 12, dafs man zwei Wege zur Berücksichtigung der Störungen einschlagen kann. Man kann erstens annehmen, dafs die materiellen Punkte infolge der störenden Kräfte nur wenig von dem Orte entfernt werden, an dem sie sich ohne Störung befinden würden, und kann hiernach an den Koordinaten, die für das ungestörte System berechnet sind, Korrekturen anbringen (Störung der Koordinaten). Zweitens kann man annehmen, dafs sich die Gleichungen der gestörten Bahn in wesentlich derselben Form darstellen wie diejenigen der ungestörten, nur dafs an Stelle der Konstanten (der Elemente) jetzt Funktionen der Zeit eintreten (Störung der Elemente). Bei den planetarischen Störungen gingen wir von den Störungen der Koordinaten aus, um nachträglich einen Teil der Störungen auf die Elemente zu übertragen. Bei der allgemeinen Aufgabe wollen wir uns nur mit der Störung der Elemente beschäftigen; in der Praxis wird diese Methode besonders bei der Berechnung der speziellen Störungen angewandt, welche bei Planetenbahnen gebraucht werden mufs, die starke Exzentrizitäten

und bedeutende Neigungen gegen die Bahnen der störenden Planeten aufweisen. Wir wollen dieses spezielle Problem hier nicht verfolgen, über das man bei Israel-Holtzwart, „Elemente der Astromechanik“ Auskunft erhält (p. 123 ff.)*); man möge mit den dort gegebenen speziellen Formeln die hier herzuleitenden allgemeinen vergleichen.

2. Die Gleichung

$$\frac{\partial V_0}{\partial t} + H = 0 \tag{1}$$

möge die Hamilton'sche partielle Differentialgleichung für das ungestörte Punktesystem darstellen; H denken wir uns wie in § 30, (9) als Funktion von t, q_α, $\frac{\partial V_0}{\partial q_\alpha}$. Durch die Substitution von (§ 30, (17))

$$W = V_0 + at \tag{2}$$

führen wir dieselbe auf

$$H = a \tag{3}$$

zurück, wo jetzt H als Funktion der q_α und $\frac{\partial W}{\partial q_\alpha}$ anzusehen ist**).

Die Integrale der ungestörten Bewegung sind dann (§ 30, (21))

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial a_1} = b_1, \quad \frac{\partial W}{\partial a_2} = b_2, \quad \ldots \quad \frac{\partial W}{\partial a_{k-1}} = b_{k-1}, \\ &\frac{\partial W}{\partial a} = t - t_0, \quad \frac{\partial W}{\partial q_\alpha} = p_\alpha; \end{aligned}\right. \tag{4}$$

hierin ist W als Funktion der q_α und der Konstanten a, a_1, a_2, $\ldots a_{k-1}$ anzusehen.

3. Treten nun störende Kräfte auf, so müssen wir H durch $H + \Omega$ ersetzen, worin Ω als die „Störungsfunktion“ bezeichnet wird; es leuchtet ein, dafs hierbei keinerlei besondere Voraussetzung zu machen ist, da man Ω immer so bestimmen kann, dafs $H + \Omega$ der Gröfse $T - U$ für die neue Bewegung gleich wird. Nennen wir die neue charakteristische Funktion V, so geht Gleichung (1) für das gestörte Problem über in

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H + \Omega = 0; \tag{5}$$

hierin sind H und Ω zunächst als Funktionen von t, q_α, $\frac{\partial V}{\partial q_\alpha}$ zu denken.

Diese partielle Differentialgleichung läfst sich durch eine totale ersetzen. Da

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum \frac{\partial V}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum p_\alpha \frac{dq_\alpha}{dt}$$

ist, worin wie früher (§ 30, (4))

*) Ausführliches über das Problem der Störungen der Elemente findet man auch in Lagrange's Mécanique analytique, 2. Auflage, an welche sich die Übersetzung von Servus anschliefst. In Jacobi's Vorlesungen über Dynamik ist das allgemeine Problem weiter durchgeführt.

**) Wir haben hier nur $-a$ an Stelle des früheren a gesetzt.

$$\frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = p_\alpha$$

gesetzt wurde, so kann man statt (5)

$$(6) \qquad dV = -(H + \Omega)dt + p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_k dq_k$$

schreiben.

Der Ausdruck W ist im ungestörten Problem nach ausgeführter Integration als Funktion der q_α und der Konstanten $a, a_1, a_2, \ldots a_{k-1}$ anzusehen. Nach früherer Auseinandersetzung wollen wir aber das gestörte Problem dadurch aus dem ungestörten herleiten, dafs wir die Konstanten des letzteren zu Funktionen der Zeit werden lassen. Daher müssen wir bei Betrachtung der gestörten Bewegung die $a, a_1, a_2, \ldots a_{k-1}$, wie auch die übrigen Konstanten, als Funktionen von t behandeln. Demnach ist

$$dW = \frac{\partial W}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial W}{\partial q_2} dq_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial q_k} dq_k$$
$$+ \frac{\partial W}{\partial a} da + \frac{\partial W}{\partial a_1} da_1 + \frac{\partial W}{\partial a_2} da_2 + \cdots + \frac{\partial W}{\partial a_{k-1}} da_{k-1}$$

oder unter Benutzung von (4)

$$(7) \qquad dW = p_1 dq_1 + p_2 dq_2 + \cdots + p_k dq_k + (t - t_0)da$$
$$+ b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_{k-1} da_{k-1}\,.$$

Diese Gleichung mufs durch die Integrale des Störungsproblems zu einer identischen gemacht werden.

Die Zusammenstellung von (6) und (7) liefert

$$(8) \qquad d(W - V) = (H + \Omega)dt + (t - t_0)da$$
$$+ b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_{k-1} da_{k-1}\,.$$

Aus der Gleichung (3) folgt aber

$$(9) \qquad Hdt + tda = adt + tda = d(at),$$

wodurch (8) in

$$(10) \qquad d(W - at - V) = \Omega dt - t_0 da$$
$$+ b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_{k-1} da_{k-1}$$

übergeht oder, wenn

$$(11) \qquad W - at - V = V_0 - V = S$$

gesetzt wird, in

$$(12) \qquad dS = \Omega dt - t_0 da + b_1 da_1 + b_2 da_2 + \cdots + b_{k-1} da_{k-1}\,.$$

Die Funktionen S und Ω können wir uns durch Elimination der q_α mittels (4) als Funktionen von $t, a, a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, t_0, b_1, b_2, \cdots b_{k-1}$ dargestellt denken. Ein Vergleich von (5) und (6) zeigt, dafs wir die totale Differentialgleichung (12) durch die partielle

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \Omega = 0 \tag{13}$$

ersetzen können, wenn in Ω an Stelle der b_α die Werte $\frac{\partial S}{\partial a_\alpha}$, an Stelle von t_0 aber $-\frac{\partial S}{\partial a}$ treten. Die Gleichung (13) entspricht genau der Hamilton'schen Gleichung (1) für das ungestörte Problem. Aber es sind hier nicht mehr die ursprünglichen Variabeln q_α die gesuchten Gröſsen, sondern vielmehr die Konstanten des ungestörten Problems, welche jetzt in veränderliche, von der Zeit abhängige Gröſsen übergegangen sind.

So wie § 30, (9) gleichwertig ist mit dem Systeme totaler Differentialgleichungen § 29, (26) und (27), so kann auch (13) durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{da}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial t_0}, \quad \frac{da_1}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_1}, \quad \ldots \frac{da_{k-1}}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial b_{k-1}}, \\ &\frac{dt_0}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial a}, \quad \frac{\partial b_1}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_1}, \quad \ldots \frac{db_{k-1}}{dt} = \frac{\partial\Omega}{\partial a_{k-1}} \end{aligned}\right. \tag{14}$$

ersetzt werden.

Suchen wir uns nun das erhaltene Resultat und seinen Wert klar zu machen. Die Funktion Ω läſst sich mittels der Gleichung der lebendigen Kraft für das Störungsproblem unmittelbar aufstellen, und zwar als Funktion der q_α, p_α und t. Sind aber die Differentialgleichungen der ungestörten Bewegung integriert, so kann man mit ihrer Hilfe aus Ω die ursprünglichen Variabeln q_α und p_α eliminieren und an ihre Stelle die Konstanten des ungestörten Problems setzen, die, nunmehr als variabel betrachtet, die Unbekannten des Störungsproblems sind.

Hiermit ist freilich für die Integration von (14) noch gar nichts geleistet. Allein man kann jetzt, falls die störenden Kräfte gering sind, eine erste Näherung dadurch erreichen, daſs man in den rechten Seiten der Gleichungen (14) den Gröſsen $a, a_1, a_2, \ldots a_{k-1}, t_0, b_1, b_2, \ldots b_{k-1}$ die konstanten Werte, welche sie im ungestörten Problem besitzen, beilegt, so daſs die rechten Seiten nur noch Funktionen der Zeit sind. Dann werden die Gleichungen (14) unmittelbar integrabel, wenn auch oft nur auf mechanischem Wege.

In der Theorie der speziellen Störungen werden in der That zunächst die Differentialquotienten der gestörten Elemente nach der Zeit als Funktionen der Zeit dargestellt.

Weitere Annäherungen führen zu groſsen Komplikationen.

Vierter Abschnitt.

Das Potential.

§ 35.

Die Kräftefunktion eines zusammenhängenden Körpers.

1. Wir haben in den vorhergehenden Abschnitten die Bewegungen materieller Punkte verfolgt, auf welche Kräfte wirken, teilweise ohne Rücksicht auf den Ursprung dieser Kräfte, teilweise unter der Annahme, dafs von einzelnen materiellen Punkten eine Anziehung ausgehe. Wir wollen jetzt die Kräfte untersuchen, welche von einer zusammenhängenden Masse auf einen materiellen Punkt ausgeübt werden.

Wie schon früher gesagt wurde, lassen sich fast alle in der Natur vorkommenden Kräfte zwischen Körpern so auffassen, als ob jedes kleinste Teilchen des einen Körpers auf jedes Teilchen des andern Körpers eine Kraft ausübe, die nur eine Funktion der betreffenden Massen und der Entfernung der beiden Teilchen ist. Um demnach die Wirkung eines Körpers auf einen materiellen Punkt zu finden, müssen wir uns ersteren auf irgend eine Weise in unendlich kleine Elemente zerlegt denken (die wir wie materielle Punkte behandeln), die Kraft bestimmen, welche jedes dieser Elemente auf den materiellen Punkt ausübt und die Resultante dieser sämtlichen Kräfte suchen. Seien x, y, z die Koordinaten des materiellen Punktes, m seine Masse, seien ferner ξ, η, ζ die Koordinaten eines Punktes des Körpers und $d\mu$ die Masse des unendlich kleinen Elementes, das wir uns um jenen Punkt abgegrenzt denken, so ist zunächst

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \tag{1}$$

die Entfernung der beiden Punkte. Wir haben dann für die Kraft, welche das Körperelement auf den materiellen Punkt ausübt,

$$m f(r)\, d\mu\,. \tag{2}$$

Da die Kräfte, welche so von den einzelnen Körperelementen auf den materiellen Punkt wirken, verschiedene Richtungen besitzen, so müssen wir, um ihre Resultierende zu bestimmen, sie in Komponenten nach den Koordinatenachsen zerlegen und diese summieren. So erhalten wir für die Komponenten der Kraft

$$(3) \qquad \begin{cases} f(r)\,\dfrac{x-\xi}{r}\,m\,d\mu\,, \\ f(r)\,\dfrac{y-\eta}{r}\,m\,d\mu\,, \\ f(r)\,\dfrac{z-\zeta}{r}\,m\,d\mu \end{cases}$$

und, wenn wir über alle Elemente $d\mu$ summieren, also die Integrale über den ganzen Körper ausdehnen,

$$(4) \qquad \begin{cases} X = m\displaystyle\int f(r)\,\frac{x-\xi}{r}\,d\mu\,, \\ Y = m\displaystyle\int f(r)\,\frac{y-\eta}{r}\,d\mu\,, \\ Z = m\displaystyle\int f(r)\,\frac{z-\zeta}{r}\,d\mu \end{cases}$$

als Komponenten der Gesamtkraft. Diese selbst ist

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}\,,$$

und ihre Richtungskosinus' sind

$$\frac{X}{P}\,,\quad \frac{Y}{P}\,,\quad \frac{Z}{P}\,.$$

P, X, Y, Z sind Funktionen von x, y, z.

2. So wie man die Komponenten der Einzelkraft (2) als Differentialquotienten einer Kräftefunktion darstellen kann, läfst sich dieselbe Darstellung auch für (4) geben. Setzen wir nämlich

$$(5) \qquad F(r) = \int f(r)\,dr\,,$$

worin zunächst noch eine willkürliche Konstante auftritt, so stellt

$$(6) \qquad U = m\int F(r)\,d\mu$$

die Kräftefunktion der Gesamtkraft dar. In (6) ist das Integral wieder über den ganzen Körper auszudehnen.

Um nachzuweisen, dafs U wirklich den Charakter der Kräftefunktion trägt, bilden wir z. B. $\frac{\partial U}{\partial x}$. Da die Integrationsgrenzen von der Lage des Punktes x, y, z unabhängig sind, so dürfen wir einfach unter dem Integralzeichen differentiieren und erhalten

$$(7) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = m\int F'(r)\,\frac{\partial r}{\partial x}\,d\mu = m\int f(r)\,\frac{x-\xi}{r}\,d\mu\,.$$

Es ist also in der That

$$(8) \qquad X = \frac{\partial U}{\partial x}\,,\quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}\,,\quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}\,.$$

3. Wir können das oben gefundene Resultat folgendermafsen in Worten ausdrücken: Um die Kraftkomponente in der Richtung der x-

(resp. y-, z-)Achse zu finden, denken wir uns den angezogenen Punkt in dieser Richtung um ein unendlich kleines Stück verschoben, berechnen die dabei eintretende Änderung der Kräftefunktion und dividieren diese Änderung durch die Gröfse der Verschiebung, so ist der Quotient die gesuchte Kraftkomponente.

Dieser Satz läfst sich nun auch auf die Kraftkomponenten in beliebiger Richtung übertragen. Die Kraftkomponente in der Richtung n ist

$$P_n = \frac{\partial U}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos\gamma,$$

wo α, β, γ die Winkel zwischen n und den positiv gerichteten Koordinatenachsen sind. Denken wir uns aber den angezogenen Punkt in der Richtung n um das unendlich kleine Stück dn verschoben, so ist

$$\cos\alpha = \frac{dx}{dn}, \quad \cos\beta = \frac{dy}{dn}, \quad \cos\gamma = \frac{dz}{dn},$$

es wird also

$$P_n = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dn}.$$

Der Ausdruck rechts ist aber gleich $\frac{dU}{dn}$ (vgl. § 6, (15)).

4. Hieraus ergiebt sich die mechanische Bedeutung von U. Lassen wir den angezogenen Punkt sich auf einer beliebigen Bahn s vom Punkte s_0 bis zum Punkte s_1 bewegen, so ist $\frac{dU}{ds}ds$ die in jedem Momente und

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{dU}{ds} ds = U_1 - U_0$$

die im ganzen geleistete Arbeit; dabei ist diese Arbeit nur von der Anfangs- und Endlage des Punktes abhängig, nicht aber von dem zurückgelegten Wege, ein Resultat, das wir auch schon früher für anziehende Punkte und Punktsysteme erhalten haben. Bei Gültigkeit des Newton'schen Attraktionsgesetzes werden wir später U für einen unendlich fernen Punkt $= 0$ setzen; dann stellt also U die Arbeit dar, welche geleistet werden mufs, um den angezogenen materiellen Punkt aus unendlicher Entfernung nach dem Punkte (x, y, z) hinzuziehen.

5. Die Kräftefunktion ist geeignet, uns ein aufserordentlich anschauliches Bild der Wirkung des Körpers an jedem Punkte des Raumes zu geben. Angenommen, wir kennen U für jeden Punkt des Raumes (wir setzen voraus, dafs U eine eindeutige Funktion ist), so werden alle Punkte, in welchen U einen konstanten Wert a annimmt, auf einer durch die Gleichung $U = a$ bestimmten Fläche liegen; wir nennen eine solche Fläche Niveaufläche. Da U in der Fläche konstant ist, so mufs der partielle Differentialquotient von U nach einer in der Niveaufläche gelegenen Richtung Null sein, damit aber auch die in die Niveaufläche fallende Kraftkomponente, d. h. die Kraftrichtung steht in

jedem Punkte senkrecht auf der durch ihn gehenden Niveaufläche.

Konstruieren wir uns nun noch eine zweite, unendlich benachbarte Niveaufläche, für welche $U = a + da$ sein möge, und ist dn an einer Stelle der Normalabstand*) beider Flächen, so ist $\frac{da}{dn}$ die Kraft, welche an jener Stelle wirksam ist. Der Sinn der Kraft ist der vom kleineren zum gröfseren U.

Die Kraft an einer Stelle des Raumes ist also umgekehrt proportional dem Abstande der benachbarten Niveauflächen, ihre Richtung ist normal zur Niveaufläche und zwar vom kleineren zum gröfseren U hin.

Bilden wir in gleichen Differenzen Δa die Niveauflächen, so geben diese uns in ähnlicher Weise ein Bild von der Wirksamkeit der Kräfte, wie es uns die Kurven gleicher Höhe (Isohypsen) auf Landkarten von der gröfseren oder geringeren Steilheit der dargestellten Berge gewähren. Wo an einem Punkte die Niveauflächen einander sehr nahe rücken, wird eine starke Kraftwirkung vorhanden sein und umgekehrt, und zugleich ergeben sich die Richtungen der Kräfte als Tangenten der senkrechten Trajektorien der Niveauflächen.

Diese Trajektorien sind durch die Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz = \frac{\partial U}{\partial x} : \frac{\partial U}{\partial y} : \frac{\partial U}{\partial z} \tag{9}$$

bestimmt, da sich die Richtungskosinus eines Kurvenelementes wie die links, diejenigen einer Flächennormale wie die rechts stehenden Gröfsen verhalten.

6. Die Dimension der Kräftefunktion wird, wie nach § 5 selbstverständlich ist, durch $l^2 t^{-2} m$ dargestellt. Der Differentialquotient, genommen nach irgend einer Richtung, mufs daher die Dimension $l t^{-2} m$ aufweisen, was zu Früherem stimmt. Hiernach bestimmt sich die Dimension der in $F(r)$ auftretenden Konstanten.

Um Irrtümer zu verhüten, sei hier noch ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, dafs die Niveauflächen nicht etwa Flächen gleicher Kraftwirkung sind. Nur in dem Falle, dafs zwei aufeinanderfolgende Niveauflächen überall äquidistant sind, sind sie auch Flächen gleicher Anziehung.

§ 36.

Spezialisierung für das Newton'sche Gesetz: das Potential.

1. Bisher haben wir über die besondere Art des Gesetzes der Anziehung nichts vorausgesetzt, als dafs dieselbe eine Funktion des Ab-

*) Die Normalen benachbarter Elemente zweier Flächen, welche durch infinitesimale Änderung eines Parameters aus derselben Gleichung hervorgegangen sind, können bis auf unendlich kleine Unterschiede als gleichgerichtet angesehen werden, einzelne Punkte etwa ausgenommen.

standes sei; im folgenden wollen wir unsere Betrachtungen auf Kräfte beschränken, deren Wirkung dem reziproken Werte des Quadrats der Entfernung proportional ist. Wir haben in diesem Falle für die Kraft, welche von $d\mu$ auf m ausgeübt wird,

$$-\frac{k m d\mu}{r^2},$$

so dafs also

$$f'(r) = -\frac{k}{r^2},$$

mithin

$$f(r) = \int f'(r) dr = \frac{k}{r} + \text{Const.}$$

ist. Die Integrationskonstante setzen wir gleich Null, da wir sie ja für unsere Zwecke beliebig nehmen können; dann wird die Kräftefunktion, welche hier Potential genannt wird und mit V bezeichnet werden soll,

$$V = \int \frac{k m d\mu}{r},$$

wobei die Integration über alle Elemente $d\mu$ auszudehnen ist. Da das Produkt km konstant ist, so werden wir es bei den folgenden Untersuchungen einfach abwerfen, resp. gleich 1 setzen; wir verwenden also im folgenden für das Potential die Formel:

$$V = \int \frac{d\mu}{r}. \tag{1}$$

Bezeichnet σ die Masse, welche in einer Volumeinheit vorhanden ist (die sogenannte Dichte des Körpers) und $d\tau$ ein Raumelement, so ist $d\mu = \sigma d\tau$. Im rechtwinkligen Koordinatensysteme ist $d\tau = d\xi d\eta d\zeta$, hier nimmt das Potential also die Form an:

$$V = \iiint \frac{\sigma d\xi d\eta d\zeta}{r}. \tag{2}$$

Für die Kraftkomponenten erhalten wir:

$$\left\{\begin{aligned} X &= \frac{\partial V}{\partial x} = -\iiint \frac{\sigma}{r^2} \frac{x-\xi}{r} d\xi d\eta d\zeta, \\ Y &= \frac{\partial V}{\partial y} = -\iiint \frac{\sigma}{r^2} \frac{y-\eta}{r} d\xi d\eta d\zeta, \\ Z &= \frac{\partial V}{\partial z} = -\iiint \frac{\sigma}{r^2} \frac{z-\zeta}{r} d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Genau dieselben Ausdrücke würden wir durch direkte Bildung der Kraftkomponenten erhalten haben.

2. Rückt der angezogene Punkt in unendliche Entfernung, während der anziehende Körper endlich ist, so werden sowohl V wie seine ersten Derivierten zu Null und zwar so, dafs rV,

$r^2\frac{\partial V}{\partial x}$, $r^2\frac{\partial V}{\partial y}$, $r^2\frac{\partial V}{\partial z}$ und ebenso xV, yV, zV, $x^2\frac{\partial V}{\partial x}$, $y^2\frac{\partial V}{\partial y}$, $z^2\frac{\partial V}{\partial z}$ endliche Werte erhalten; rV ist immer von Null verschieden, die übrigen Gröfsen nur im allgemeinen.

Bei unendlicher Entfernung des Punktes x, y, z kann nämlich r für alle Punkte ξ, η, ζ des Körpers als konstant angesehen werden, so dafs

$$(4)\qquad V = \frac{1}{r}\int d\mu = \frac{M}{r}$$

wird, wenn M die Gesamtmasse des Körpers bezeichnet. Ebenso wird

$$(5)\qquad X = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{r^2}\int\int\int \sigma\,\frac{x-\xi}{r}\,d\xi d\eta d\zeta \quad \text{u. s. w.},$$

worin $\frac{x-\xi}{r}$ endlich ist, wenn es nicht verschwindet. Nimmt man noch hinzu, dafs x, y, z von derselben Gröfsendimension wie r sind — wenn nicht das eine oder andere gegen r verschwindet —, so ergiebt sich der behauptete Satz unmittelbar.

Wollte man dem Potential V eine Integrationskonstante zufügen, so würde natürlich für unendlich ferne Punkte V der Konstanten gleich werden.

3. Ehe wir nun das Potential für spezielle Körper entwickeln, müssen wir noch ein Bedenken beseitigen. Es ist klar, dafs V für Punkte aufserhalb des anziehenden Körpers überall endlich ist, da ja dort alle $\frac{\sigma}{r^2}$ ganz bestimmte, endliche Werte besitzen. Dasselbe gilt für die Derivierten von V; es ist deshalb V aufserhalb des anziehenden Körpers auch eine stetige Funktion. Wie verhält sich aber die Sache für Punkte, die innerhalb des anziehenden Körpers liegen? Hier wird $\frac{1}{r}$ für einzelne Punkte unendlich. Wir wollen nun nachweisen, dafs erstens V und seine ersten Derivierten auch hier endliche Werte besitzen und zweitens auch hier stetige Funktionen sind.

Zu diesem Zwecke führen wir Polarkoordinaten ein, indem wir

$$(6)\qquad \xi = \varrho \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \eta = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \zeta = \varrho\cos\vartheta$$

setzen. ϑ bezeichnet den Winkel, welchen der Radiusvektor mit der positiv gerichteten z-Achse, φ den Winkel, welchen die Ebene des Winkels ϑ mit der positiv gerichteten x-Achse bildet.

Ein Körperelement wird dann durch

$$\varrho^2 \sin\vartheta\, d\varphi d\vartheta d\varrho$$

dargestellt, und wir erhalten für das Potential, bezogen auf den Nullpunkt des Koordinatensystems, den wir mit jedem beliebigen Punkte des Körpers identifizieren können,

$$(7)\qquad V = \int\int\int \frac{\sigma\varrho^2 \sin\vartheta\, d\varphi d\vartheta d\varrho}{\varrho} = \int\int\int \sigma\varrho\sin\vartheta\, d\varphi d\vartheta d\varrho.$$

Wir sehen daraus, dafs die Beiträge, welche von den Körperelementen

in der Nachbarschaft des angezogenen Punktes herrühren, nicht nur nicht unendlich, sondern sogar Null sind, da ein ϱ im Zähler übrig bleibt. Die übrigen Teile können ein Unendlichwerden überhaupt nicht veranlassen. Mithin ist V auch für innere Punkte endlich.

Um auch für die Kraftkomponenten $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ den entsprechenden Nachweis zu führen, setzen wir jetzt

$$(8)\quad \xi = x + \varrho \sin \vartheta \cos \varphi, \quad \eta = y + \varrho \sin \vartheta \sin \varphi, \quad \zeta = z + \varrho \cos \vartheta.$$

Dann wird

$$(9)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = \int^{\bullet} \frac{1}{\varrho^2} \frac{\xi - x}{\varrho} d\mu = \int^{\bullet} \frac{\sin \vartheta \cos \varphi \, d\mu}{\varrho^2}$$
$$= \int^{\bullet}\int^{\bullet}\int^{\bullet} \sigma \sin^2 \vartheta \cos \varphi \, d\varphi d\vartheta d\varrho,$$

und ähnliche Resultate erhält man für die beiden andern Komponenten. Auch hier ist kein Faktor vorhanden, der ein Unendlichwerden verursachen könnte.

Aus der Endlichkeit seiner Derivierten können wir sofort auf die Stetigkeit von V schliefsen. V ist also eine im ganzen Raume endliche und stetige Funktion.

4. Um die Stetigkeit der Derivierten von V nachzuweisen, denken wir uns um den angezogenen Punkt eine Kugelfläche vom Radius δ abgegrenzt. Wir können uns dann V aus zwei Teilen bestehend denken, von denen der eine V_1 von den Elementen jener Kugel, der zweite V_2 von den aufserhalb der Kugel gelegenen Teilen des anziehenden Körpers herrührt. Es ist also

$$(10)\quad V = V_1 + V_2$$

und

$$(11)\quad \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial x};$$

$\frac{\partial V_2}{\partial x}$ ist jedenfalls stetig, da der angezogene Punkt für dasselbe ein äufserer ist. Wir zeigen nun, dafs $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ für abnehmende δ verschwindet; damit ist dann die Stetigkeit von $\frac{\partial V}{\partial x}$ nachgewiesen.

Bezeichnet $d\Sigma$ ein Element der Kugelfläche mit dem Radius 1, welche um den untersuchten Punkt beschrieben ist, so können wir, indem wir uns die abgegrenzte Kugel zuerst in konzentrische Kugelschichten, dann durch Pyramidenflächen, welche in dem Mittelpunkte ihre Spitze haben, weiter zerlegt denken,

$$(12)\quad d\mu = \sigma \varrho^2 d\Sigma d\varrho$$

setzen. Dann wird

$$(13)\quad \frac{\partial V_1}{\partial x} = \int^{\bullet}\int^{\bullet} \sigma \frac{\xi - x}{\varrho} d\Sigma d\varrho.$$

$\frac{\xi - x}{\varrho}$ ist jedenfalls ein **echter** Bruch von positivem oder negativem Werte, höchstens ± 1. Den gröſsten, sicher endlichen Wert, welchen der absolute Betrag von

$$\sigma \frac{\xi - x}{\varrho}$$

in der ganzen Kugel erreicht, wollen wir mit A bezeichnen. Dabei ist nicht auszuschlieſsen, daſs σ seinen Wert unstetig ändert; die Grenze des Körpers kann z. B. durch die Kugel hindurchgehen. In allen Fällen ist, wenn wir den absoluten Betrag einer Gröſse in bekannter Weise bezeichnen,

$$\left| \frac{\partial V_1}{\partial x} \right| \leqq A \int\int d\Sigma d\varrho$$

oder, da

$$\int_0^\delta d\varrho = \delta, \quad \int d\Sigma = 4\pi$$

ist,

$$\left| \frac{\partial V_1}{\partial x} \right| \leqq 4 A \pi \delta. \tag{14}$$

Für verschwindende δ verschwindet also $\frac{\partial V_1}{\partial x}$. Hiermit ist die Stetigkeit von $\frac{\partial V}{\partial x}$ dargethan; $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ lassen sich in gleicher Weise behandeln.

Das Potential V ist nebst seinen ersten Derivierten eine stetige Funktion von x, y, z.

Für die zweiten Differentialquotienten gilt nicht das Gleiche; wir werden dieselben später noch zu untersuchen haben.

§ 37.

Das Potential einer Kugelschale und einer Vollkugel.

1. Wir bestimmen das Potential einer **Kugelschale**, bei welcher die Dichtigkeit σ nur eine Funktion des Radius ist, welche also aus konzentrischen, einzeln gleichmäſsig dichten Schalen besteht. Wir wählen Polarkoordinaten wie in § 36, deren Anfangspunkt wir in den Mittelpunkt der Kugel verlegen. Die z-Achse möge durch den angezogenen Punkt hindurchgehen. Der Abstand dieses Punktes vom Mittelpunkte der Kugel sei l, der äuſsere Kugelradius P, der innere P_0.

Für den Abstand r eines Körperelements an der Stelle $(\varrho, \vartheta, \varphi)$ vom angezogenen Punkte finden wir

$$r = \sqrt{l^2 + \varrho^2 - 2 l \varrho \cos\vartheta}, \tag{1}$$

für die Masse des Elementes

$$d\mu = \sigma \varrho^2 \sin\vartheta \, d\varrho \, d\vartheta \, d\varphi. \tag{2}$$

Demnach ist das Potential

$$(3)\qquad V = \int\!\!\int\!\!\int \frac{\sigma\varrho^2 \sin\vartheta\, d\varrho\, d\vartheta\, d\varphi}{\sqrt{l^2+\varrho^2-2l\varrho\cos\vartheta}}.$$

Die Integrationen sind auszudehnen über φ von 0 bis 2π, über ϑ von 0 bis π, über ϱ von P_0 bis P, so dafs für (3) vollständiger

$$(4)\qquad V = \int_{P_0}^{P} \sigma\varrho^2 d\varrho \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{l^2+\varrho^2-2l\varrho\cos\vartheta}} \int_0^{2\pi} d\varphi$$

zu schreiben ist.

Indem wir nun die Integrationen der Reihe nach ausführen, erhalten wir zunächst

$$V = 2\pi \int_{P_0}^{P} \sigma\varrho^2 d\varrho \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\sqrt{l^2+\varrho^2-2l\varrho\cos\vartheta}},$$

dann, weil

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a-bx}} = -\frac{2}{b}\sqrt{a-bx}$$

ist,

$$(5)\qquad V = \frac{2\pi}{l} \int_{P_0}^{P} \sigma\varrho d\varrho \left[\sqrt{l^2+\varrho^2+2l\varrho} - \sqrt{l^2+\varrho^2-2l\varrho}\right].$$

Die Wurzelgröfsen sind hier nicht etwa doppeldeutig, da sie die **absolute** Gröfse spezieller Werte von r vorstellen und somit **positive** Werte haben müssen.

Hiernach ist der Wert der ersten Wurzel $= l + \varrho$, derjenige der zweiten aber:

$$l - \varrho \text{ für } l \geqq \varrho, \quad \varrho - l \text{ für } l < \varrho.$$

Der Klammerausdruck wird

$$\text{für } l \geqq \varrho \text{ zu } 2\varrho,$$
$$\text{für } l \leqq \varrho \text{ zu } 2l.$$

2. Wir haben nun bei der Integration nach ϱ drei Fälle zu unterscheiden:

a) der angezogene Punkt liegt **aufserhalb** der Hohlkugel; dann ist für alle ϱ: $l \geqq \varrho$;

b) der angezogene Punkt liegt **innerhalb des Hohlraumes**; dann ist für alle ϱ: $l \leqq \varrho$;

c) der angezogene Punkt liegt **im Innern der Kugelmasse**; dann ist für einen Teil $l > \varrho$, für den andern $l < \varrho$.

1. **Fall:** $l \geqq P$. Hier haben wir:

$$(6)\qquad V_a = \frac{4\pi}{l} \int_{P_0}^{P} \sigma\varrho^2 d\varrho.$$

Nun ist aber $\sigma \cdot 4\pi\varrho^2 d\varrho$ die Masse einer Kugelschale vom Radius ϱ und der Dicke $d\varrho$, und integrieren wir von P_0 bis P, so erhalten wir die Masse M der ganzen Hohlkugel. Demnach wird

$$(7) \qquad V_a = \frac{M}{l}$$

d. h. wir erhalten dasselbe Potential, wie wenn wir uns die Masse im Mittelpunkte der Hohlkugel vereinigt denken. Dies Resultat gilt selbstverständlich auch für die Vollkugel, da wir ja hier nur $P_0 = 0$ zu setzen haben. Dadurch sind die Probleme über die Anziehung von kugelförmigen Körpern nach aufsen auf die Anziehung materieller Punkte zurückgeführt.

2. Fall: $l \leq P_0$. Wir haben hier

$$(8) \qquad V_i = 4\pi \int_{P_0}^{P} \sigma\varrho\, d\varrho\,.$$

Wir ersehen hieraus, dafs V_i nicht mehr von l abhängt, also für alle Punkte im inneren Hohlraume konstant ist. Die Derivierten nach den Koordinaten des angezogenen Punktes sind also Null, es findet gar keine Anziehung statt. Ist σ konstant, so läfst sich die Integration ausführen, und wir erhalten

$$(9) \qquad V_i = 2\pi\sigma(P^2 - P_0^2)\,.$$

3. Fall: $P_0 < l < P$. Wir zerlegen die Hohlkugel in zwei Teile durch eine Kugelfläche vom Radius l. Für den inneren Teil ist der angezogene Punkt ein äufserer, für den äufseren Teil ein innerer Punkt. Demnach setzt sich das Potential V_m aus einem V_a und einem V_i zusammen:

$$(10) \qquad V_m = \frac{4\pi}{l} \int_{P_0}^{l} \sigma\varrho^2 d\varrho + 4\pi \int_{l}^{P} \sigma\varrho\, d\varrho\,.$$

Da die äufsere Hohlkugel keine Anziehung ausübt, so ist die Gesamtanziehung die gleiche, wie wenn nur die innere Hohlkugel mit den Radien P_0 und l vorhanden wäre.

Für konstante Dichte σ und für eine Vollkugel (d. h. $P_0 = 0$) erhalten wir

$$(11) \qquad V_m = 2\pi\sigma\left(P^2 - \frac{l^2}{3}\right).$$

Die Attraktion im Inneren der homogenen Vollkugel ist durch

$$(12) \qquad \frac{dV_m}{dl} = -\frac{4\pi\sigma l}{3}$$

gegeben; sie ist dem Abstande vom Mittelpunkte direkt proportional.

3. Es fällt uns auf, dafs die Funktion V in den drei verschiedenen

Teilen des Raumes ganz verschiedene Formen annimmt. Man sieht aber aus der Form von V_m, dafs an den Grenzen die Werte der verschiedenen V dieselben sind, indem in V_m für $l = P_0$ das erste, für $l = P$ das zweite Integral verschwindet. V geht also stetig von einem Raume in den andern über, wie wir es nach dem vorigen Paragraphen erwarten mufsten.

Auch für die Derivierte von V nach l könnten wir leicht direkt zeigen, dafs sie an den Grenzflächen beiderseits dieselben Werte erhält.

4. Da in allen Fällen V nur eine Funktion von l ist, so sind die Niveauflächen mit der Hohlkugel konzentrische Kugelflächen; die Attraktion ist immer nach dem gemeinsamen Mittelpunkte gerichtet. Natürlich kann im inneren Hohlraume von Niveauflächen nicht die Rede sein.

§ 38.

Das Potential eines homogenen Ellipsoids.

1. Das Potential eines homogenen Ellipsoids zu bestimmen ist eine der interessantesten Aufgaben aus der Lehre von der Anziehung. Schon Newton hatte sie zu lösen gesucht und auch wichtige Sätze über die Anziehung innerer Punkte gefunden. Vergeblich aber bemühten sich bis zum Ende des vorigen Jahrhunderts die Mathematiker, die allgemeine Lösung der Aufgabe zu finden. Besonders war es die Anziehung eines aufserhalb des Ellipsoids gelegenen Punktes, welcher grofse Schwierigkeiten bereitete. Maclaurin zeigte, wenigstens für gewisse einfache Fälle, wie sich diese Aufgabe auf diejenige der Anziehung eines inneren Punktes zurückführen läfst. D'Alembert und Lagrange verallgemeinerten den Maclaurin'schen Satz, der noch jetzt die Grundlage für die vorliegende Aufgabe bildet. Endlich gelang es Laplace, die Attraktion eines homogenen Ellipsoids allgemein zu berechnen. Dieser Lösung folgten bald eine Reihe anderer, die sehr verschiedene Wege einschlugen. (Über genauere Angaben der einschlägigen Litteratur siehe Bacharach, Geschichte der Potentialtheorie, pag. 61.) Wir werden hier der Methode folgen, welche zuerst von Gauss angegeben wurde und zwar in der etwas vereinfachten von Somoff herrührenden Form*). Um den Gang der Rechnung später nicht unterbrechen zu müssen, schicken wir einen Hilfssatz voraus.

2. **Hilfssatz von Gauss.** Es sei S eine beliebige geschlossene Fläche, P ein beliebiger Punkt des Raumes. Wir denken uns durch P nach allen Richtungen hin Halbgerade gezogen, welche die Fläche S ein oder mehrere Male schneiden. Wir betrachten einen unendlich dünnen Halbstrahlenkegel, welcher von P ausgehend die Fläche S zunächst in der Entfernung r_1 trifft, ein zweites Mal in der Entfernung r_2, dann in der

*) Gauss, Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata; Ges. Werke, B. 5, pag. 1. — Somoff, Theoretische Mechanik, übersetzt von Ziwet.

Entfernung r_3 u. s. w.; abwechselnd wird er dabei ein- und austreten. Dieser Kegel schneide aus S das erste Mal das Element dS_1, das zweite Mal dS_2 u. s. w. aus; wir berechnen zunächst die Projektionen dieser Elemente auf Kugelflächen von den resp. Radien r_1, r_2, r_3 u. s. f. und finden $dS_1 \cos(r, n_1)$, $dS_2 \cos(r, n_2) \ldots$, wenn (r, n_1) den Winkel zwischen einem der Halbstrahlen des Elementarkegels, wobei die Richtung nach dem Punkte P zu als die positive angesehen wird, und der nach aufsen gerichteten Normalen in dS bezeichnet. Dabei ist zu beachten, dafs die Winkel $(r, n_1), (r, n_2) \ldots$ abwechselnd spitz und stumpf sind, ihre Kosinus also abwechselnd positiv und negativ, ersteres für Eintrittsstellen, letzteres für Austrittsstellen. Wir berechnen weiter das Flächenelement $d\Sigma$, welches ein solcher Kegel aus einer mit dem Radius 1 um P beschriebenen Kugelfläche ausschneidet und finden

$$d\Sigma = \pm \frac{dS_1 \cos(r, n_1)}{r_1^2} = \mp \frac{dS_2 \cos(r, n_2)}{r_2^2} = \pm \cdots.$$

Wir summieren nun die $d\Sigma$ für die ganze Fläche S, wobei wir unterscheiden müssen, ob P aufserhalb oder innerhalb des von S abgeschlossenen Raumes liegt oder etwa auf S selbst. Im ersten Falle tritt jeder Strahl so oft ein wie aus, die Elemente heben sich alle weg und wir erhalten

$$(1) \qquad \int \frac{\cos(r, n)\, dS}{r^2} = 0.$$

Im zweiten Falle bleibt auf jedem Strahle ein Element übrig, bei welchem ein Austritt stattfindet; es ist daher

$$(2) \qquad \int \frac{\cos(r, n)\, dS}{r^2} = -\int d\Sigma = -4\pi.$$

Liegt P auf S selbst und zwar an einem Punkte stetiger Krümmung, so werden blofs auf der einen Hälfte der Kugel vom Radius 1 Elemente abgebildet, und wir erhalten

$$(3) \qquad \int \frac{\cos(r, n)\, dS}{r^2} = -2\pi.$$

Liegt P auf einer Kante oder Spitze von S, so ist die Integration über den Teil der Kugel auszudehnen, welcher durch den P umgebenden Tangentenkegel ausgeschnitten wird. Ist z. B. S die Oberfläche eines Parallelepipedes und liegt P auf einer Kante, so ist die Integration über $\frac{1}{4}$ der Kugelfläche auszudehnen; es wird

$$(4) \qquad \int \frac{\cos(r, n)\, dS}{r^2} = -\pi;$$

liegt P in einer Ecke des Parallelepipedes, so ist

$$(5) \qquad \int \frac{\cos(r, n)\, dS}{r^2} = -\frac{\pi}{2} \quad \text{u. s. f.}$$

3. Der Weg, welchen wir einschlagen, um das Potential eines ho-

mogenen Ellipsoids zu berechnen, ist der folgende. Wie schon oben erwähnt wurde, ist ein Satz von Maclaurin die Grundlage der Lehre von der Anziehung der Ellipsoide. Dieser Satz bezieht sich auf die Anziehung zweier konfokalen Ellipsoide auf einen äufseren Punkt. Um zu diesem Satze zu gelangen, berechnen wir nicht direkt das Potential des gegebenen Ellipsoids

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} + \frac{\zeta^2}{c_1^2} = 1, \tag{6}$$

sondern zunächst dasjenige eines zu jenem konfokalen Ellipsoids

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1, \tag{7}$$

wo

$$a^2 = a_1^2 + \lambda, \quad b^2 = b_1^2 + \lambda, \quad c^2 = c_1^2 + \lambda. \tag{8}$$

Das Potential von (6) können wir ja daraus leicht erhalten, indem wir $\lambda = 0$ setzen. Wir untersuchen dann, was aus dem Potentiale wird, wenn wir λ als variabel betrachten. Dabei wird sich leicht der Maclaurin'sche Lehrsatz und dann das Potential des Ellipsoids (6) ergeben.

Ein wichtiger Kunstgriff bei der Berechnung eines Potentials besteht darin, den anziehenden Körper auf eine passende Weise in Elemente zu zerlegen. Wir verfahren folgendermafsen:

Wir zerlegen uns das Ellipsoid (8) durch Ellipsoidflächen, welche mit der gegebenen ähnlich und ähnlich liegend sind. Die Gleichung einer solchen ist:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = \theta^2, \tag{9}$$

wobei θ eine zwischen 0 und 1 variable Gröfse ist; für die nächstfolgende Fläche müssen wir $\theta + d\theta$ statt θ setzen u. s. w. Ist nun V das Potential des ganzen Ellipsoids, so ist das Potential einer Schicht, welche zwischen zwei aufeinander folgenden Ellipsoidenflächen liegt, das Differential von V nach θ: $d_\theta V$. Ist dS ein Flächenelement von (9), ε der Abstand der beiden benachbarten Ellipsoide an der Stelle von dS, r die Entfernung des angezogenen Punktes (x, y, z) von dS, so folgt

$$d_\theta V = \sigma \int^{\bullet} \frac{\varepsilon\, dS}{r}, \tag{10}$$

wo die Integration über die ganze Oberfläche auszudehnen ist.

Der bequemeren Bearbeitung dieses Ausdrucks wegen führen wir neue Koordinaten ein, indem wir setzen:

$$u = \frac{\xi}{a}, \quad v = \frac{\eta}{b}, \quad w = \frac{\zeta}{c}. \tag{11}$$

Hierdurch wird das Ellipsoid (2) als Kugel abgebildet, deren Gleichung ist:

$$u^2 + v^2 + w^2 = \theta^2. \tag{12}$$

Betrachten wir das Verhältnis eines Körperteils des ursprünglichen

Systems zu dem entsprechenden im transformierten Systeme, so finden wir, dafs dasselbe konstant gleich abc ist; denn wir haben

$$(13) \qquad d\xi\, d\eta\, d\zeta = abc\, du\, dv\, dw\,.$$

Dem Elemente dS der Ellipsoidfläche entspricht ein Element der Kugelfläche (12), dessen Gröfse $\theta^2 d\Sigma$ ist, wenn $d\Sigma$ ein ähnliches, ähnlich gelegenes Element einer konzentrischen Kugel vom Radius 1 ist. Dem Körperelemente εdS entspricht das Element $\theta^2 d\theta d\Sigma$ einer Kugelschicht, die von Kugeln mit den Radien θ, resp. $\theta + d\theta$ eingeschlossen wird. Wegen (13) ist dann aber

$$(14) \qquad \varepsilon dS = abc\, d\Sigma \theta^2 d\theta$$

und folglich

$$(15) \qquad d_\theta V = \sigma abc \theta^2 d\theta \int \frac{d\Sigma}{r}\,.$$

Nun betrachten wir diesen Ausdruck als Funktion von λ. Wir differentiieren die Gröfse $\frac{d_\theta V}{abc}$ nach λ. Dabei ist zu beachten, dafs λ nur in r enthalten ist. r ist nämlich eine Funktion der ξ, η, ζ und diese sind nach (11) Funktionen von a, b, c und damit von λ; dagegen hängen die u, v, w nicht von λ ab*), ebensowenig $d\Sigma$, das Element der Kugel vom Radius 1.

Es ist also

$$(16) \qquad d_\lambda \left(\frac{d_\theta V}{abc}\right) = -\sigma\theta^2 d\theta \int \frac{d\Sigma\, d_\lambda r}{r^2}\,;$$

ferner ist

$$(17) \qquad r d_\lambda r = (\xi - x) d_\lambda \xi + (\eta - y) d_\lambda \eta + (\zeta - z) d_\lambda \zeta$$

und

$$(18) \qquad d_\lambda \xi = d_\lambda\left(u\sqrt{a_1^2 + \lambda}\right) = \frac{1}{2}\frac{u\,d\lambda}{\sqrt{a_1^2 + \lambda}} = \frac{\xi}{2a^2}\, d\lambda$$

und ebenso

$$d_\lambda \eta = \frac{\eta}{2b^2}\, d\lambda, \quad d_\lambda \zeta = \frac{\zeta}{2c^2}\, d\lambda\,.$$

4. Diese Gleichungen formen wir um mit Hilfe einer neu einzuführenden Gröfse p, welche Lamé und nach ihm Somoff als Differentialparameter (erster Ordnung) bezeichnen. Sei ξ, η, ζ ein Punkt des durch Gleichung (9) bestimmten Ellipsoids. Gehen wir vom Punkte ξ, η, ζ aus in der Richtung der äufseren Normale des Ellipsoids um eine unendlich kleine Strecke dn weiter und legen durch deren Endpunkt ein ähnliches und ähnlich liegendes Ellipsoid, so mag dieses durch die Gleichung

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = \theta^2 + d(\theta^2)$$

dargestellt sein. Dann definieren wir p durch die Gleichung

*) Wir denken uns nämlich hier alles in die Koordinaten u, v, w transformiert.

(19) $$p = \frac{1}{2}\frac{d(\theta^2)}{dn}.$$

Bezeichnet $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ die Gleichung einer Fläche, so sind bekanntlich die Richtungskosinus ihrer Normalen im Punkte ξ, η, ζ

$$\cos(n, x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2}} \quad \text{u. s. w.;}$$

für das Ellipsoid (9) haben wir daher

(20) $$\frac{d\xi}{dn} = \cos(n, x) = \frac{\frac{\xi}{a^2}}{\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}} \quad \text{u. s. w.}$$

Daher ist unter Benutzung von (9) und (20)

$$\begin{aligned} \frac{d(\theta^2)}{dn} &= \frac{\partial(\theta^2)}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dn} + \frac{\partial(\theta^2)}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dn} + \frac{\partial(\theta^2)}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dn} \\ &= \frac{2\xi}{a^2}\frac{d\xi}{dn} + \frac{2\eta}{b^2}\frac{d\eta}{dn} + \frac{2\zeta}{c^2}\frac{d\zeta}{dn} \\ &= 2\sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}, \end{aligned}$$

also

(21) $$p = \sqrt{\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4}}$$

und außerdem

(22) $$\frac{\xi}{a^2} = p\cos(n, x), \quad \frac{\eta}{b^2} = p\cos(n, y), \quad \frac{\zeta}{c^2} = p\cos(n, z).$$

5. Wir haben ferner nach (18) und (22)

(23) $$d_\lambda \xi = \frac{1}{2} p\cos(n, x) d\lambda, \quad d_\lambda \eta = \frac{1}{2} p\cos(n, y) d\lambda,$$
$$d_\lambda \zeta = \frac{1}{2} p\cos(n, z) d\lambda,$$

woraus für $d_\lambda r$ folgt

(24) $$\begin{aligned} d_\lambda r &= \frac{1}{2} p\left[\frac{\xi - x}{r}\cos(n, x) + \frac{\eta - y}{r}\cos(n, y) + \frac{\zeta - z}{r}\cos(n, z)\right] d\lambda \\ &= -\frac{1}{2} p\left[\cos(r, x)\cos(n, x) + \cos(r, y)\cos(n, y) + \cos(r, z)\cos(n, z)\right] d\lambda \\ &= -\frac{1}{2} p\cos(n, r) d\lambda. \end{aligned}$$

Setzen wir dies in (16) ein, so wird

(25) $$d_\lambda\left(\frac{d_\theta V}{abc}\right) = \sigma\theta^2 d\theta \int \frac{p\, d\Sigma \cos(n, r) d\lambda}{2r^2}.$$

Nun kann ferner statt (19) $\theta d\theta = p\varepsilon$ geschrieben werden, da $\varepsilon = dn$ ist; verbinden wir dies mit (14), so ergiebt sich

$$pd\Sigma = \frac{dS}{abc\theta}, \tag{26}$$

und dadurch verwandelt sich (25) in

$$d_\lambda\left(\frac{d_\theta V}{abc}\right) = \frac{\sigma\theta d\theta d\lambda}{2abc}\int^s \frac{\cos(n, r)\,dS}{r^2}. \tag{27}$$

Das rechtsstehende Integral ist aber nach dem Hilfssatze von Gauss, Gleichung (1) und (2), gleich 0 oder -4π, je nachdem der angezogene Punkt (x, y, z) aufserhalb oder innerhalb der Fläche (9) liegt.

Für einen äufseren Punkt wird also

$$d_\lambda\left(\frac{d\ V}{abc}\right) = 0. \tag{28}$$

Die Bedingung dafür, dafs (x, y, z) ein äufserer Punkt ist, lautet aber

$$\frac{x^2}{a_1^2+\lambda} + \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} + \frac{z^2}{c_1^2+\lambda} \overline{\gtrless} 1; \tag{29}$$

wird λ dieser Bedingung gemäfs gewählt, so ist für jedes θ zwischen 0 und 1 die Gleichung (28) erfüllt.

Mithin ist auch

$$d_\lambda\left(\frac{\int_0^1 d_\theta V}{abc}\right) = d_\lambda\left(\frac{V}{abc}\right) = 0, \tag{30}$$

d. h. der Quotient $\frac{V}{abc}$ ist für alle λ, welche (29) genügen, konstant.

Die Potentiale zweier konfokalen Ellipsoide von gleicher Dichtigkeit für einen äufseren Punkt sind den Produkten der drei Halbachsen, also auch dem Volumen der Ellipsoide proportional. Ist die Dichtigkeit beider (homogenen) Ellipsoide verschieden, so verhalten sich die Potentiale wie die Massen.

Sind V_1 und V_2 zwei solche Potentiale, so hat in allen Punkten, für welchen V_1 einen konstanten Wert besitzt, auch V_2 einen konstanten Wert; demnach müssen beide dieselben Niveauflächen besitzen. Daraus folgt aber nach den in § 35 angestellten Betrachtungen, dafs die in einem Punkte von beiden Körpern aus wirkenden Kräfte dieselbe Richtung besitzen.

Nimmt V_1 um die Gröfse dV_1 zu, so wächst V_2 um $dV_1\frac{M_2}{M_1}$, wenn M_1 und M_2 die Massen der beiden Ellipsoide sind.

Die Zunahmen von einer Niveaufläche zu der benachbarten, und damit auch die anziehenden Kräfte, sind also den Massen proportional. Dies giebt den Satz von Maclaurin:

Die Anziehungskräfte, welche von zwei homogenen konfokalen Ellipsoiden auf denselben äufseren Punkt ausgeübt werden, haben dieselbe Richtung und sind den Massen der Ellipsoide proportional.

6. Wir kehren zur Gleichung (27) zurück und betrachten nunmehr den Fall eines innerhalb (9) gelegenen Punktes. Es ist dann:

$$d_\lambda\left(\frac{d_\Theta V}{abc}\right) = -\frac{2\pi\sigma\theta d\theta d\lambda}{abc}. \tag{31}$$

Bei der Integration dieser Differentialgleichung ist folgendes zu beachten. Die Gleichung (9) repräsentiert einen doppelten Komplex von Ellipsoiden, falls wir a^2, b^2, c^2 durch ihre Werte (8) ersetzt denken. Variieren wir θ bei festem λ, so erhalten wir eine Schar ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsoide. Durch die Variation von λ allein wird dagegen eine Schar konfokaler Ellipsoide erzeugt.

Wir wollen nun zunächst ein bestimmtes λ festhalten und (31) nach θ von 0 bis 1 integrieren. Der Sinn dieses Verfahrens ist einfach der, dafs wir uns ein Ellipsoid (8) mit festem λ in unendlich dünne, von ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsoidflächen begrenzte Schalen zerlegt denken und die Anteile, welche diese Schalen zu der Gröfse

$$d_\lambda\left(\frac{V}{abc}\right)$$

liefern, summieren. Hierbei ist zu bemerken, dafs die Gleichung (31) nur dann in Kraft tritt, wenn x, y, z zu der betreffenden Ellipsoidfläche mit veränderlichem θ ein innerer Punkt ist. Der Anteil von allen Schalen, für welche x, y, z ein äufserer Punkt wird, verschwindet nach (30).

Damit überhaupt (31) auf einen Teil der Schalen Anwendung findet, mufs x, y, z innerhalb des Ellipsoids (7) liegen, d. h. es mufs

$$\frac{x^2}{a_1^2+\lambda} + \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} + \frac{z^2}{c_1^2+\lambda} < 1 \tag{32}$$

sein. Durch den Punkt x, y, z denken wir uns ein zu (7) ähnliches und ähnlich liegendes Ellipsoid (9) konstruiert, für welches $\theta = \theta_1$ sein möge; es ist dann θ_1 durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a_1^2+\lambda} + \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} + \frac{z^2}{c_1^2+\lambda} = \theta_1^2 \tag{33}$$

bestimmt. Alle Anteile von Ellipsoidschalen, welche innerhalb dieses Ellipsoides liegen, sind gleich Null zu setzen; für die übrigen ist (31) zu benutzen. Hiernach finden wir

$$d_\lambda\left(\frac{V}{abc}\right) = d_\lambda\left(\frac{\int_0^1 d_\Theta V}{abc}\right) = d_\lambda\left(\frac{\int_{\theta_1}^1 d_\Theta V}{abc}\right) = -\pi\sigma(1-\theta_1^2)\frac{d\lambda}{abc}. \tag{34}$$

Setzen wir für θ_1^2 seinen Wert aus (33) ein und integrieren nach λ von λ bis unendlich, so wird

$$(35)\qquad \left(\frac{V}{abc}\right)_\infty - \left(\frac{V}{abc}\right)_\lambda$$

$$= -\pi\sigma \int_\lambda^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2+\lambda} - \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} - \frac{z^2}{c_1^2+\lambda}\right) \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}}.$$

7. Es ist nun unschwer zu beweisen, dafs

$$(36)\qquad \left(\frac{V}{abc}\right)_\infty = \left(\frac{V}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}}\right)_\infty = 0$$

ist. Wir dürfen dies nicht etwa direkt aus § 36, 2 folgern, da für $\lambda = \infty$ V das Potential eines unendlich grofsen Ellipsoides wird.

Wählen wir den angezogenen Punkt zum Mittelpunkte, so ist ein Körperelement bei entsprechender Bezeichnung wie in § 36, 4

$$\sigma \varrho^2 d\Sigma d\varrho,$$

das Potential also

$$(37)\qquad V = \int\int \frac{\sigma\varrho^2 d\Sigma d\varrho}{\varrho} = \sigma \int d\Sigma \int \varrho d\varrho.$$

Ist R gröfser als der gröfste Wert, welchen ϱ annimmt, so ist das Doppelintegral auf der rechten Seite seiner Bedeutung wegen kleiner wie

$$\int d\Sigma \int \varrho d\varrho,$$

ausgedehnt über die Oberfläche einer Kugel, welche den Nullpunkt zum Mittelpunkte und R zum Radius hat, d. h. es ist

$$(38)\qquad V < 2\pi\sigma R^2.$$

Nun ist R jedenfalls*) von derselben Gröfsenordnung wie die Halbachsen des Ellipsoids, also wie a, b, c. Wächst λ ins Unendliche, so wird auch R unendlich, also V von der zweiten Ordnung unendlich; aber

$$\frac{V}{abc}$$

verschwindet, da der Nenner von der dritten Ordnung unendlich wird.

Wir haben also

$$(39)\qquad \left(\frac{V}{abc}\right) = \pi\sigma \int_\lambda^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2+\lambda} - \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} - \frac{z^2}{c_1^2+\lambda}\right) \times \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}}.$$

*) Wenn es nur um Endliches gröfser als der gröfste Wert von ϱ angenommen wird.

Wollen wir daraus das Potential des ursprünglichen Ellipsoids (1)

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} + \frac{\zeta^2}{c_1^2} = 1$$

für einen inneren Punkt erhalten, so müssen wir in der unteren Grenze des Integrals $\lambda = 0$ setzen; wir finden

$$(40) \qquad V = \pi\sigma a_1 b_1 c_1 \int_0^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2+\lambda} - \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} - \frac{z^2}{c_1^2+\lambda}\right) \times \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}}.$$

8. Mit Hilfe des Maclaurin'schen Satzes können wir endlich hieraus auch das Potential des Ellipsoids (6) für einen äußeren Punkt ableiten. Wir legen zu diesem Zwecke durch (x, y, z) ein zu (6) konfokales Ellipsoid. Für dieses ist dann (x, y, z) ein Punkt der Oberfläche, der gleichzeitig als innerer und als äußerer Punkt behandelt werden darf, da das Potential an der Grenzfläche stetig ist (§ 36); wir können daher das Potential V_1 des konfokalen Ellipsoids nach (39) berechnen. Das zu diesem Ellipsoid gehörige $\lambda = \lambda_1$ ist aus der Gleichung

$$(41) \qquad \frac{x^2}{a_1^2+\lambda_1} + \frac{y^2}{b_1^2+\lambda_1} + \frac{z^2}{c_1^2+\lambda_1} = 1$$

zu berechnen. Diese kubische Gleichung giebt für λ_1 nach § 31 nur einen Wert, welchem ein Ellipsoid entspricht.

Die Halbachsen des so erhaltenen Ellipsoids sind

$$(42) \qquad a_2 = \sqrt{a_1^2+\lambda_1}, \quad b_2 = \sqrt{b_1^2+\lambda_1}, \quad c_2 = \sqrt{c_1^2+\lambda_1}.$$

Die Gleichung (39) liefert dann

$$(43) \qquad \frac{V_1}{a_2 b_2 c_2} = \pi\sigma \int_{\lambda_1}^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2+\lambda} - \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} - \frac{z^2}{c_1^2+\lambda}\right) \times \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}}.$$

Nach dem Maclaurin'schen Satze ist aber

$$\frac{V}{a_1 b_1 c_1} = \frac{V_1}{a_2 b_2 c_2},$$

folglich wird

$$(44) \qquad V = \pi\sigma a_1 b_1 c_1 \int_{\lambda_1}^\infty \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2+\lambda} - \frac{y^2}{b_1^2+\lambda} - \frac{z^2}{c_1^2+\lambda}\right) \times \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}},$$

womit wir die gestellte Aufgabe vollständig gelöst haben.

9. Für die weitere Untersuchung wollen wir zur Abkürzung die Größe

(45) $$\sqrt{(a_1^2 + \lambda)(b_1^2 + \lambda)(c_1^2 + \lambda)} = D$$

setzen und

(46) $$\frac{4}{3} \pi a_1 b_1 c_1 \sigma = M,$$

wo M die Masse des Ellipsoids bedeutet; wir können dann für (40) auch schreiben

(47) $$V = \frac{3}{4} M \left[\int_0^\infty \frac{d\lambda}{D} - x^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda) D} - y^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b_1^2+\lambda) D} - z^2 \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_1^2+\lambda) D} \right].$$

Da die Integrale $\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda) D}$ u. s. w. nicht von x, y, z abhängen, so sehen wir aus (47), dafs die Niveauflächen für einen inneren Punkt Flächen zweiter Ordnung sind. Ferner haben die Integralwerte, wie aus ihrer Form hervorgeht, alle dasselbe Vorzeichen, die Niveauflächen sind also zu dem gegebenen koaxiale Ellipsoide.

Die Niveauflächen für äufsere Punkte sind dagegen transcendente Flächen, da hier x, y, z auch in der Grenze λ_1 vorkommen.

10. Für die Komponenten der Anziehung eines inneren Punktes erhalten wir durch Differentiation von (47)

(48) $$\frac{\partial V}{\partial x} = X = -\frac{3}{2} M x \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda) D},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Y = -\frac{3}{2} M y \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b_1^2 + \lambda) D}, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = Z = -\frac{3}{2} M z \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c_1^2 + \lambda) D}.$$

Sind x_1, y_1, z_1 die Koordinaten eines zweiten inneren Punktes, X_1, Y_1, Z_1 die auf ihn wirkenden Attraktionskomponenten, so folgt aus (48)

(49) $$\frac{X}{x} = \frac{X_1}{x_1}, \quad \frac{Y}{y} = \frac{Y_1}{y_1}, \quad \frac{Z}{z} = \frac{Z_1}{z_1}.$$

Liegen beide Punkte auf einer durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehenden Geraden und sind r und r_1 ihre Abstände vom Mittelpunkte, so hat man

$$x : x_1 = y : y_1 = z : z_1 = r : r_1$$

und demzufolge

$$X : X_1 = Y : Y_1 = Z : Z_1 = r : r_1,$$

also auch

(50) $$P : P_1 = r : r,$$

wenn P und P_1 die Gesamtkräfte in (x, y, z), resp. $(x_1\ y_1, z_1)$ bedeuten. Endlich findet sich

$$\frac{X}{P} = \frac{X_1}{P_1}, \quad \frac{Y}{P} = \frac{Y_1}{P_1}, \quad \frac{Z}{P} = \frac{Z_1}{P_1};$$

dies sind aber die Richtungskosinus der Kräfte P und P_1. Wir haben also das Resultat:

Zwei innere Punkte, welche auf einer durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehenden Geraden liegen, werden mit Kräften angezogen, welche der Entfernung vom Mittelpunkte proportional und einander parallel sind.

11. Hat man innerhalb des gegebenen Ellipsoids ein zweites ähnliches und ähnlich liegendes

$$\frac{\xi^2}{a_1^2} + \frac{\eta^2}{b_1^2} + \frac{\zeta^2}{c_1^2} = \theta^2,$$

so findet man dessen Anziehungskomponenten für einen inneren Punkt X_1, Y_1, Z_1, indem man in (48) statt a_1^2 setzt $a_1^2\theta^2$ u. s. w.; führt man zugleich statt λ eine neue Variable λ' ein, so dafs $\lambda = \theta^2\lambda'$ ist, und bedenkt, dafs $M_1 = M\theta^3$ ist, so findet man

$$(51)\quad X_1 = -\frac{3}{2} M\theta^3 \int_0^\infty \frac{\theta^2 d\lambda'}{\theta^2(a_1^2+\lambda')\theta^3 D} = -\frac{3}{2} M \int_0^\infty \frac{d\lambda'}{(a_1^2+\lambda')D} = X$$

u. s. w.

Zwei ähnliche und ähnlich liegende homogene Ellipsoide von gleicher Dichte ziehen einen (für beide) inneren Punkt mit gleichen und gleich gerichteten Kräften an.

Ohne weiteres folgert man hieraus:

Eine ellipsoidische Schale, welche von ähnlichen, ähnlich liegenden Ellipsoiden begrenzt wird, übt auf einen Punkt des inneren Hohlraums keine Anziehung aus.

Der letzte Satz wurde schon von Newton auf synthetischem Wege gefunden.

Die Integrale, welche in den Kraftkomponenten vorkommen, sowie diejenigen des Potentials, lassen sich auf ein einziges Integral und seine partiellen Derivierten zurückführen. Setzt man nämlich

$$(52)\qquad A = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}},$$

so ist

$$(53)\quad \frac{\partial A}{\partial (a_1^2)} = -\frac{1}{2} \int_0^\infty [(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)]^{-\frac{3}{2}} (b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)\, d\lambda$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)D} \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist also

$$(54)\quad \begin{cases} V = \frac{3}{4} M \left(A + 2 \frac{\partial A}{\partial (a_1^2)} x^2 + 2 \frac{\partial A}{\partial (b_1^2)} y^2 + 2 \frac{\partial A}{\partial (c_1^2)} z^2 \right), \\ X = 3 M x \frac{\partial A}{\partial (a_1^2)}, \quad Y = 3 M y \frac{\partial A}{\partial (b_1^2)}, \quad Z = 3 M z \frac{\partial A}{\partial (c_1^2)}. \end{cases}$$

Das Integral A ist ein elliptisches erster Gattung.

12. Suchen wir nun die Anziehungskomponenten für einen äußeren Punkt. Es ist dabei zu beachten, dafs die Integrationsgrenze λ eine Funktion von x, y, z ist.

Wir erhalten

$$(55)\quad X = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{3}{2} M x \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda) D} - \frac{3}{4} \frac{M \left(1 - \frac{x^2}{a_1^2 + \lambda_1} - \frac{y^2}{b_1^2 + \lambda_1} - \frac{z^2}{c_1^2 + \lambda_1} \right)}{D} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x}.$$

Der vom Integralzeichen freie Ausdruck ist aber wegen (41) gleich Null. Es ist also

$$(56)\quad \begin{cases} X = -\frac{3}{2} M x \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda) D}, \\ Y = -\frac{3}{2} M y \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(b_1^2 + \lambda) D}, \\ Z = -\frac{3}{2} M z \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(c_1^2 + \lambda) D}. \end{cases}$$

Auch die Integrale in X, Y, Z lassen sich wieder auf einziges Integral A zurückführen; man mufs nur wieder bei der Differentiation die Gleichung (41) beachten. Es ist hier

$$(57)\quad A = \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{D}$$

zu setzen; für V, X, Y, Z erhält man dann genau dieselben Resultate wie bei einem inneren Punkte.

13. Ist x, y, z ein Punkt auf dem Ellipsoide

$$(58)\quad \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1,$$

so ist

$$\frac{x a_2}{a_1}, \quad \frac{y b_2}{b_1}, \quad \frac{z c_2}{c_1}$$

ein Punkt auf einem zweiten Ellipsoide

$$(59)\qquad \frac{\xi^2}{a_2^2} + \frac{\eta^2}{b_2^2} + \frac{\zeta^2}{c_2^2} = 1,$$

wie unmittelbar zu verifizieren ist; wir bezeichnen beide Punkte, deren Beziehung eine reciproke ist, als entsprechende.

Wir wollen nun annehmen, dafs (58) und (59) konfokal sind und dafs das Ellipsoid (59) das kleinere ist; beide denken wir uns mit Masse von gleicher Dichtigkeit erfüllt. Es ist

$$(60)\qquad a_1^2 = a_2^2 + \lambda_1, \quad b_1^2 = b_2^2 + \lambda_1, \quad c_1^2 = c_2^2 + \lambda_1$$

und λ_1 positiv.

Die Attraktionskomponenten des Ellipsoids (59) auf den äufseren Punkt x, y, z sind

$$(61)\quad X_2 = -2\pi\sigma a_2 b_2 c_2 x \int_{\lambda_1}^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_2^2+\lambda)\sqrt{(a_2^2+\lambda)(b_2^2+\lambda)(c_2^2+\lambda)}} \quad \text{u. s. w.,}$$

worin λ_1 aus (60) zu entnehmen ist. Substituieren wir

$$\lambda = \lambda' + a_1^2 - a_2^2 = \lambda' + b_1^2 - b_2^2 = \lambda' + c_1^2 - c_2^2$$

und schreiben wieder λ statt λ', so wird aus (61)

$$(62)\quad X_2 = -2\pi\sigma a_2 b_2 c_2 x \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Attraktion des Ellipsoides (58) auf den inneren Punkt

$$\frac{x a_2}{a_1}, \quad \frac{y b_2}{b_1}, \quad \frac{z c_2}{c_1}$$

besitzt die Komponenten

$$(63)\quad X_1 = -2\pi\sigma a_1 b_1 c_1 \frac{x a_2}{a_1} \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)\sqrt{(a_1^2+\lambda)(b_1^2+\lambda)(c_1^2+\lambda)}} \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist also

$$(64)\qquad \begin{cases} X_2 : X_1 = b_2 c_2 : b_1 c_1, \\ Y_2 : Y_1 = c_2 a_2 : c_1 a_1, \\ Z_2 : Z_1 = a_2 b_2 : a_1 b_1. \end{cases}$$

Diese Gleichungen enthalten den Ivory'schen Satz, welcher die Attraktion eines homogenen Ellipsoids auf einen äufseren Punkt zurückführt auf die Attraktion eines anderen Ellipsoids auf einen inneren Punkt, also ein kompliziertes Problem auf ein einfacheres reduziert (besonders im Sinne eines früheren Standes der Wissenschaft). In Worte gekleidet lautet der Satz, wenn man die Verhältnisse der Produkte je zweier Halbachsen durch diejenigen der Flächeninhalte der Hauptschnitte ersetzt, welche durch diese Halbachsen gelegt sind:

Bestimmt man auf zwei konfokalen, koaxialen Ellipsoiden, welche mit homogener Masse von gleicher Dichtigkeit erfüllt zu denken sind, zwei entsprechende Punkte, so verhalten sich

die Attraktionskomponenten nach den Hauptachsen, welche jedes Ellipsoid auf den festgesetzten Punkt des anderen ausübt, wie die Flächeninhalte ihrer Hauptschnitte, welche auf der Richtung der Komponenten senkrecht stehen.

Nach einer Untersuchung von Poisson behält dieser Satz bei einem beliebigen Attraktionsgesetze seine Giltigkeit.

14. Die gefundenen Formeln vereinfachen sich wesentlich im Falle eines Rotationsellipsoids; die elliptischen Integrale gehen alsdann in logarithmisch-cyklometrische über. Wir wollen die Resultate nur für das Ellipsoid, welches durch Rotation einer Ellipse um die kleine Achse entstanden ist, und auch hier nur für innere Punkte und Oberflächenpunkte herleiten. Wir setzen $a_1 = b_1 = a$, $c_1 = b$ und haben (48)

$$(65)\qquad \begin{cases} X = -\dfrac{3Mx}{2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{b^2+\lambda}}, \\[2ex] Y = -\dfrac{3My}{2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{b^2+\lambda}}, \\[2ex] Z = -\dfrac{3Mz}{2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\int \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2\sqrt{b^2+\lambda}} = \frac{\sqrt{b^2+\lambda}}{(a^2-b^2)(a^2+\lambda)} + \frac{1}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2-b^2}}$$

und

$$\int \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{(a^2-b^2)\sqrt{b^2+\lambda}} - \frac{2}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{b^2+\lambda}{a^2-b^2}},$$

also, wenn man noch beachtet, daſs

$$\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} = \operatorname{arccotg}\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} = \arccos\frac{b}{a}$$

ist,

$$(66)\qquad \begin{cases} X = -\dfrac{3Mx}{2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\arccos\dfrac{b}{a} - \dfrac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\right], \\[2ex] Y = -\dfrac{3My}{2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\arccos\dfrac{b}{a} - \dfrac{b\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\right], \\[2ex] Z = -\dfrac{3Mz}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[-\arccos\dfrac{b}{a} + \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right]. \end{cases}$$

Da $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \varepsilon$, d. h. gleich der numerischen Exzentrizität ist, so kann auch noch

$$\arccos \frac{b}{a} = \arcsin \varepsilon$$

gesetzt werden.

15. Wir wollen jetzt das Rotationsellipsoid mit der Erde identifizieren, so dafs die xy-Ebene zur Äquatorebene wird. Bezeichnet ϱ den Abstand des Punktes x, y, z von der Rotationsachse, ist also

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

und ist P die Kraft, welche in dieser Richtung (von der Achse weg) wirkt, so haben wir für die Erdoberfläche

$$(67) \quad \begin{cases} P = -\dfrac{3M\varrho}{2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\arcsin\varepsilon - \dfrac{b}{a}\varepsilon\right], \\ Z = -\dfrac{3Mz}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[-\arcsin\varepsilon + \dfrac{a}{b}\varepsilon\right]. \end{cases}$$

Nehmen wir weiter an, dafs die Erde mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Achse rotiert, so dafs also die lineare Geschwindigkeit von x, y, z gleich $\varrho\omega$ ist, so haben wir für die Zentrifugalkraft in Bezug auf diesen Punkt (wobei die Einheiten entsprechend zu wählen sind)

$$\frac{v^2}{\varrho} = \varrho\omega^2;$$

dieselbe ist der Komponente P zuzufügen. Es wird also

$$(68) \qquad P = -\frac{3M\varrho}{2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\arcsin\varepsilon - \frac{b}{a}\varepsilon - \frac{2\omega^2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{3M}\right].$$

Die Normale des Ellipsoids im Punkte x, y, z bildet mit der Äquatorebene einen Winkel φ (die geographische Breite), für welchen*)

$$(69) \qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{d\varrho}{dz} = \frac{z}{\varrho}\cdot\frac{a^2}{b^2}$$

ist. Soll nun die Richtung der vereinigten Schwere und Zentrifugalkraft normal auf der Erdoberfläche stehen, so mufs

$$\frac{Z}{P} = \operatorname{tg}\varphi,$$

also

$$2\,\frac{-a\arcsin\varepsilon + \dfrac{a}{b}\varepsilon}{\arcsin\varepsilon - \dfrac{b}{a}\varepsilon - \dfrac{2\omega^2(a^2-b^2)^{\frac{3}{2}}}{3M}} = \frac{a^2}{b^2}$$

oder, wenn

---

*) Es ist

$$\frac{\varrho^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \quad \text{also} \quad \varrho = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - z^2} \quad \text{u. s. w.}$$

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad M = \frac{4a^2 b\sigma}{3}$$

eingesetzt wird,

$$(70) \qquad \omega^2 = \frac{\sigma}{\varepsilon^3}\left[2(3-2\varepsilon^2)\sqrt{1-\varepsilon^2}\arcsin\varepsilon - 6\varepsilon(1-\varepsilon^2)\right]$$

sein, eine Gleichung, die durch geeignete Werte von ω befriedigt wird.

Wir werden später sehen, dafs eine Flüssigkeitsmasse, welche unter dem Einflusse irgend welcher Kräfte steht, nur dann sich im Gleichgewichte befinden kann, wenn die Gesamtkraftrichtung in jedem Oberflächenpunkte normal zur Oberfläche steht. Aus dem eben Gefundenen ist ersichtlich, dafs ein abgeplattetes Rotationsellipsoid eine mögliche Gleichgewichtsgestalt einer rotierenden, schweren, homogenen Flüssigkeitsmasse ist.

Die landläufige Annahme, dafs die Erde ein Rotationsellipsoid sei, auf dessen Oberfläche die Richtung der Gesamtschwere normal steht, ist also unter der Hypothese gleichmäfsiger Massenverteilung im Erdinnern mechanisch zulässig.

§ 39.

Das Potential des rechtwinkligen Parallelepipedons und eines beliebigen Polyeders.

1. Wir suchen das Potential eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedons*) mit der Dichtigkeit 1, dessen Seitenlängen $2a$, $2b$, $2c$ sind. Der Mittelpunkt dieses Körpers sei der Nullpunkt des Koordinatensystems; die x, y, z-Achsen mögen den Seiten von der Länge $2a$, $2b$, $2c$ parallel laufen. Ist wieder x, y, z der angezogene Punkt, ξ, η, ζ ein Punkt des attrahierenden Körpers, so haben wir für das Potential V den Ausdruck

$$(1) \qquad V = \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r} = \varphi(a, b, c, x, y, z),$$

worin

$$(2) \qquad r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

ist.

Zunächst wollen wir durch geeignete Reduktionen den Ausdruck (1) auf etwas einfachere Ausdrücke zurückführen.

2. Setzen wir $\xi = \xi_1 + x$, lassen dann aber den Index der Einfachheit halber wieder weg, so ist

*) Die Aufgabe wurde gelöst von Bessel, Zach's monatl. Korrespondenz B. 27, p. 82, und Röthig, Borch. J. B. 58, p. 249. Wir folgen der Darstellung in der letzteren Abhandlung.

$$(3)\qquad \int_{-a}^{+a}\frac{d\xi}{r}=\int_{-(a+x)}^{a-x}\frac{d\xi}{r},$$

wo jetzt

$$(4)\qquad r^2=\xi^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$$

zu setzen ist.

Da r nunmehr ξ nur als Quadrat enthält, das Integral auf der rechten Seite von (3) also für $+\xi$ und $-\xi$ entgegengesetzte Werte annimmt, so ist weiter

$$(5)\qquad \int_{-(a+x)}^{a-x}\frac{d\xi}{r}=\int_{-(a+x)}^{0}\frac{d\xi}{r}+\int_{0}^{a-x}\frac{d\xi}{r}=\frac{1}{2}\int_{-(a+x)}^{a+x}\frac{d\xi}{r}+\frac{1}{2}\int_{-(a-x)}^{a-x}\frac{d\xi}{r}.$$

Führt man dieses Resultat in (1) ein, wobei man die Reihenfolge der Integrationen beliebig vertauschen kann, so erhält man

$$2V=\varphi(a+x,b,c,0,y,z)+\varphi(a-x,b,c,0,y,z)$$

oder

$$(6)\qquad V=\frac{1}{2}\sum\varphi(a+\varepsilon x,b,c,0,y,z),$$

wenn ε die Werte $+1$ und -1 annimmt.

Führt man auf der rechten Seite von (6) dieselbe Transformation in Bezug auf b und y, dann in Bezug auf c und z aus, so erhält man schliefslich

$$(7)\qquad V=\frac{1}{8}\sum\varphi(a+\varepsilon x,b+\varepsilon_1 y,c+\varepsilon_2 z,0,0,0),$$

wo $\varepsilon,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ die Werte $+1$ und -1 beizulegen sind, so dafs die Summe aus acht Gliedern besteht.

Die Aufgabe ist hierdurch auf die einfachere zurückgeführt, das Integral

$$(8)\qquad V_0=\varphi(\alpha,\beta,\gamma)=\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{-\beta}^{+\beta}\int_{-\gamma}^{+\gamma}\frac{d\xi\,d\eta\,d\zeta}{r}$$

zu berechnen, wo jetzt

$$(9)\qquad r^2=\xi^2+\eta^2+\zeta^2$$

zu nehmen ist. Diese Integration läfst sich direkt ausführen; wegen der komplizierten Rechnung gehen wir jedoch auf indirektem Wege vor.

3. Der Ausdruck $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ ist als eine homogene Funktion zweiter Ordnung seiner Variabeln α,β,γ anzusehen. Setzen wir nämlich in (8) $\lambda\xi,\lambda\eta,\lambda\zeta$ an Stelle von ξ,η,ζ, also auch in $\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$ $\lambda\alpha,\lambda\beta,\lambda\gamma$ an die Stelle von α,β,γ, so tritt $\lambda^3 d\xi\,d\eta\,d\zeta$ an Stelle von $d\xi\,d\eta\,d\zeta$, λr an Stelle von r, so dafs

$$\varphi(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma) = \lambda^2 \int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_{-\beta}^{+\beta}\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\xi\, d\eta\, d\zeta}{r}$$

oder

$$\varphi(\lambda\alpha, \lambda\beta, \lambda\gamma) = \lambda^2 \varphi(\alpha, \beta, \gamma) \tag{10}$$

wird. Differentiieren wir diese Gleichung nach λ und setzen dann $\lambda = 1$, so folgt (vgl. auch die speziellere Herleitung § 29, 6, Anm.)

$$2\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}. \tag{11}$$

Die Berechnung von $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ ist daher auf die einfachere der drei Gröfsen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$$

zurückgeführt.

Durch Differentiation von (11) nach α erhalten wir ferner

$$2\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma}$$

oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} + \gamma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma}, \tag{12}$$

so dafs $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$ bekannt ist, wenn

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma}$$

gefunden sind. Analoges gilt für $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$.

4. Aus (8) folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 2\int_{-\beta}^{+\beta}\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\eta\, d\zeta}{\sqrt{\alpha^2 + \eta^2 + \zeta^2}}; \tag{13}$$

denn α kommt nur in den Grenzen des Integrals vor*).

Durch weitere Differentiation nach β erhalten wir

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} = 4\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2}}. \tag{14}$$

Da aber

$$\int \frac{dz}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2}} = \frac{1}{2}\log \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2} + \zeta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \zeta^2} - \zeta} \tag{15}$$

---

*) Es ist $\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)dx = f(b), \quad \frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x)dx = -f(a).$

ist, so wird nach Einsetzen der Grenzwerte

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \beta} = 4 \log \frac{\varrho + \gamma}{\varrho - \gamma},$$

wenn

$$(17)\qquad \varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$

ist.

In gleicher Weise finden wir

$$(18)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha \partial \gamma} = 4 \log \frac{\varrho + \beta}{\varrho - \beta}.$$

5. Weiter folgt aus (19)

$$(19)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -2\alpha \int_{-\beta}^{+\beta}\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\eta\, d\zeta}{(\alpha^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da

$$(20)\qquad \int \frac{d\zeta}{(a + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\zeta}{a\sqrt{a + \zeta^2}}$$

ist, so wird

$$(21)\qquad \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\zeta}{(\alpha^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\gamma}{(\alpha^2 + \eta^2)\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + \eta^2}},$$

also

$$(22)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -4\alpha\gamma \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{d\eta}{(\alpha^2 + \eta^2)\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + \eta^2}}$$

und, da

$$(23)\qquad \int \frac{d\eta}{(\alpha^2 + \eta^2)\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + \eta^2}} = \frac{1}{\alpha\gamma} \operatorname{arctg} \frac{\gamma\eta}{\alpha\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2 + \eta^2}}$$

ist,

$$(24)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} = -8 \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho}.$$

6. Somit wird aus (12)

$$(25)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = -8\alpha \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho} + 4\beta \log \frac{\varrho + \gamma}{\varrho - \gamma} + 4\gamma \log \frac{\varrho + \beta}{\varrho - \beta},$$

und analoge Ausdrücke findet man für $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}$. Aus (11) wird also

$$(26)\qquad V_0 = \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = -4\alpha^2 \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\varrho} - 4\beta^2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha\gamma}{\beta\varrho} - 4\gamma^2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha\beta}{\gamma\varrho}$$
$$+ 4\beta\gamma \log \frac{\varrho + \alpha}{\varrho - \alpha} + 4\alpha\gamma \log \frac{\varrho + \beta}{\varrho - \beta} + 4\alpha\beta \log \frac{\varrho + \gamma}{\varrho - \gamma}.$$

Hieraus folgt nach (7) der Wert von V in etwas weitläufiger Form.

7. Haben wir schon bei dem für die Rechnung einfachsten ebenflächigen Körper einen recht komplizierten Potentialausdruck gefunden,

so dürfen wir umsomehr für das Potential eines beliebigen homogenen Polyeders recht verwickelte Verhältnisse erwarten. Trotzdem ist die Möglichkeit der elementaren Berechnung dieses Potentials mehrfach nachgewiesen worden*). Die Lösung der Aufgabe kann auf die der einfacheren reduziert werden: das Potential eines homogenen Tetraeders in Bezug auf einen seiner Eckpunkte zu finden.

Soll nämlich das Potential eines homogenen Polyeders für einen beliebigen, äufseren oder inneren Punkt O bestimmt werden, so denke man sich über sämtlichen Flächen des Polyeders Pyramiden errichtet, welche den Punkt O zur Spitze haben; Inhalt und Masse der Pyramide mögen als positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem sich die Pyramide an die innere oder äufsere Seite der Polyederfläche anlegt. Der Inhalt des Polyeders ist dann gleich der algebraischen Summe der Inhalte dieser Pyramiden. Ebenso ist auch das Potential des homogenen Polyeders gleich der algebraischen Summe der Potentiale dieser Pyramiden, welche mit Masse von der gleichen Dichtigkeit, aber positivem oder negativem Zeichen nach der obigen Festsetzung ausgefüllt zu denken sind. Da sich diese Pyramiden in dreiseitige (Tetraeder) zerlegen lassen, die alle eine Ecke in O haben, so ist die Möglichkeit jener Reduktion ersichtlich.

Die Grundfläche eines solchen Tetraeders, d. h. die dem angezogenen Eckpunkte gegenüberliegende Fläche, kann in zwei rechtwinklige Dreiecke, das Tetraeder also in zwei andere, welche die rechtwinkligen Dreiecke zu Grundflächen haben, zerlegt werden. Auf Tetraeder der letzteren Art werden wir nachher die Rechnung anwenden.

8. Die Attraktion des Tetraeders auf einen seiner Eckpunkte läfst sich aber wiederum auf eine viel einfachere Aufgabe zurückführen. Grenzen wir irgend eine Ecke durch zwei parallele Ebenen ab, so entstehen zwei ähnliche Pyramiden, deren Grundflächeninhalte sich verhalten wie die Quadrate ihrer Höhen (H und h); legt man dagegen durch den Scheitelpunkt der Ecke irgend welche Strahlen, so verhalten sich die durch die beiden Parallelebenen und den Scheitelpunkt auf ihnen abgegrenzten Strecken wie die Höhen selbst. Denkt man sich nun die beiden Grundflächen mit Massen von gleicher Dichtigkeit und derselben unendlich kleinen Dicke belegt, so üben sie auf den Scheitelpunkt die gleiche Anziehung aus. Zerlegt man nämlich beide Pyramiden durch unendlich viele durch den Scheitelpunkt gehende Ebenen in unendlich schmale Pyramiden, so werden jene beiden Schichten in unendlich viele Elementarteile zerlegt. Die Massen zweier entsprechenden Elementarteile verhalten sich wie die von ihnen bedeckten Flächen, also wie $h^2 : H^2$; die Quadrate der Abstände vom Scheitelpunkte verhalten

*) Von Mehler, Mertens, Cayley, Betti, Günther, Hoppe. — Selbstverständlich werden wir nur Polyeder betrachten, welche Körper im gewöhnlichen Sinne darstellen, keine solchen, deren Flächen sich selbst durchschneiden u. s. w.

sich ebenso. Hieraus folgt, dafs bei Voraussetzung des Newton'schen Attraktionsgesetzes beide Elementarteile und damit auch beide Schichten dieselbe Attraktion auf den Scheitelpunkt ausüben, sowohl der Gröfse als auch der Richtung nach. Zerlegt man daher eine homogene Pyramide durch Parallelebenen zur Grundfläche in unendlich viele Schichten von gleicher Höhe, so ist die Attraktion aller Schichten auf den Scheitelpunkt die gleiche, sowohl der Gröfse als auch der Richtung nach. Man braucht daher, um die Attraktion der Pyramide auf ihre Spitze zu ermitteln, nur die Attraktion zu berechnen, welche ihre Grundfläche, falls in einer Flächeneinheit derselben die der Raumeinheit zukommende Masse konzentriert wird, auf sie ausübt, und mit der Höhe zu multiplizieren.

Aus der Gleichheit der Attraktion zweier Punkte in Bezug auf denselben Punkt folgt nicht die Gleichheit ihrer Potentiale für den letzteren. Seien M und m zwei entsprechende Massenelemente zweier Pyramidengrundflächen, deren Höhen H und h betragen, während M und m um R und r von der Spitze entfernt sind; dann sind die Potentiale beider Teile in Bezug auf die Spitze

$$\frac{M}{R} \quad \text{und} \quad \frac{m}{r} = \left(M \frac{h^2}{H^2}\right) : \left(R \frac{h}{H}\right) = \frac{M}{R} \frac{h}{H}.$$

Bezeichnet man daher die Gesamtpotentiale jener beiden Grundflächen, wenn sie in der vorhin angegebenen Weise belegt sind, mit W und w, so folgt

$$w = W \frac{h}{H}. \tag{27}$$

Für das Potential V der ganzen Pyramide in Bezug auf die Spitze erhalten wir daher

$$V = \int_0^H W \frac{h}{H} dh = \frac{WH}{2}. \tag{28}$$

Um also das Potential einer homogenen Pyramide in Bezug auf ihre Spitze zu ermitteln, genügt es, das Potential ihrer gleichmäfsig mit Masse belegten Grundfläche in Bezug auf die Spitze aufzusuchen.

9. Stellen wir dieses Resultat mit den vorhergehenden Reduktionen zusammen, so ist die ganze Aufgabe auf die folgende zurückgeführt: Das Potential eines gleichmäfsig mit Masse belegten rechtwinkligen Dreiecks in Bezug auf irgend einen Punkt zu ermitteln.

Das rechtwinklige Dreieck möge in der xy-Ebene liegen, der Scheitel des rechten Winkels sei der Nullpunkt und die Katheten von der Länge a und b mögen in die positiv gerichtete x- und y-Achse fallen; ein laufender Punkt der Dreiecksfläche werde mit ξ, η, der angezogene Punkt mit x, y, z bezeichnet. Das Dreieck denke man sich dann in unendlich schmale, zur x-Achse parallele Streifen zerlegt, deren Potentiale zuerst berechnet werden sollen; die Länge des Streifens, welcher von der x-Achse die Ent-

fernung η hat, ist dann $\frac{\eta a}{b}$. Hiernach findet man für das Gesamtpotential V das Doppelintegral

$$(29) \qquad V = \sigma \int_0^b d\eta \int_0^{\frac{a\eta}{b}} \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2}}.$$

Die Integration nach ξ liefert

$$(30) \qquad V = \sigma \int_0^b \left\{ \log \left[\frac{a\eta}{b} - x + \sqrt{\left(\frac{a\eta}{b} - x\right)^2 + (\eta - y)^2 + z^2} \right] - \log \left[- x + \sqrt{x^2 + (\eta - y)^2 + z^2} \right] \right\} d\eta.$$

Auch die zweite Integration läfst sich in geschlossener Form ausführen; man hat nämlich allgemein durch partielle Integration

$$(31) \qquad \begin{aligned} &\int \log \left[A\eta + B + \sqrt{C\eta^2 + D\eta + E} \right] d\eta \\ &= \eta \log \left[A\eta + B + \sqrt{C\eta^2 + D\eta + E} \right] \\ &- \int \frac{\eta \left[A + \frac{2C\eta + D}{2\sqrt{C\eta^2 + D\eta + E}} \right]}{A\eta + B + \sqrt{C\eta^2 + D\eta + E}} d\eta. \end{aligned}$$

Das rechts stehende Integral ist elementar ausführbar, da es nur eine Quadratwurzel aus einem Ausdrucke zweiten Grades als Irrationalität enthält. Wir schreiben das fertige Resultat nicht hin, da es wegen seiner Kompliziertheit eine praktische Verwendung doch kaum gestattet. Das Problem der Attraktion eines homogenen Polyeders ist aber hiermit, prinzipiell betrachtet, vollkommen gelöst; es erfordert die Anwendung keiner transcendenten Funktionen mit Ausnahme von logarithmisch-cyklometrischen.

§ 40.

Die Laplace-Poisson'sche Gleichung.

1. Für unsere weitere Untersuchungen über die Theorie des Potentials müssen wir auch die zweiten partiellen Derivierten von V in Betracht ziehen. Wir werden zwischen ihnen eine Relation aufstellen, die für die Potentialtheorie von fundamentaler Bedeutung ist. Durch Differentiation der Ausdrücke für $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ in § 36, (3) finden wir

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= -\int\int\int \sigma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \left(\frac{1}{r^3} - 3\, \frac{(x - \xi)^2}{r^5} \right), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= -\int\int\int \sigma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \left(\frac{1}{r^3} - 3\, \frac{(y - \eta)^2}{r^5} \right), \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} &= -\int\int\int \sigma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta \left(\frac{1}{r^3} - 3\, \frac{(z - \zeta)^2}{r^5} \right). \end{aligned} \right.$$

Addieren wir diese drei Differentialquotienten, so erhalten wir für einen äufseren Punkt

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0.$$

Diese merkwürdige Beziehung wurde von Laplace entdeckt und führt seinen Namen.

Liegt der angezogene Punkt im Innern des anziehenden Körpers, so verlieren die Integrale der Gleichung (1) jede Bedeutung, was man durch Einführung von Polarkoordinaten wie in § 36, 3 leicht nachweisen kann. Es bleibt hier r im Nenner übrig, wodurch die Integrale einen unbestimmten Wert erhalten.

Damit ist nun nicht gesagt, dafs die zweiten Derivierten von V ihre Bedeutung in diesem Falle verlieren, vielmehr behalten diese und auch ihre Summen endliche Werte, nur werden sie nicht mehr durch (1) dargestellt.

2. Wir wollen zunächst in einem speziellen Falle die partiellen Derivierten von V für einen inneren Punkt entwickeln. Wir wählen die Kugel. Im § 37, (11) erhielten wir als Potential einer homogenen Kugel für einen inneren Punkt

$$V=2\pi\sigma\left(P^2-\frac{l^2}{3}\right).$$

Wir haben hier $l^2=x^2+y^2+z^2$ und finden für die ersten Derivierten:

$$\frac{\partial V}{\partial x}=-\frac{4}{3}\pi\sigma x,\quad \frac{\partial V}{\partial y}=-\frac{4}{3}\pi\sigma y,\quad \frac{\partial V}{\partial z}=-\frac{4}{3}\pi\sigma z,$$

demnach für die zweiten

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-\frac{4}{3}\pi\sigma,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-\frac{4}{3}\pi\sigma,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{4}{3}\pi\sigma,$$

also

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-4\pi\sigma.$$

3. Ist nun V das Potential eines beliebigen Körpers in Bezug auf einen inneren Punkt x, y, z und ändert sich die Dichtigkeit σ in der Umgebung des letzteren nur stetig, so kann man sich aus dem Körper eine unendlich kleine Kugel mit dem Mittelpunkte x, y, z ausgeschnitten denken. Es sei $V=V_1+V_2$; V_1 sei der Anteil, welchen die unendlich kleine Kugel liefert, V_2 der Anteil des übrigen Körpers. Da x, y, z in Bezug auf letzteren ein äufserer Punkt ist, so ist nach (2)

$$\frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_2}{\partial z^2}=0.$$

Innerhalb der unendlich kleinen Kugel kann man die Dichtigkeit σ wegen ihrer Stetigkeit als konstant ansehen, so dafs nach (3)

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V_1}{\partial^2 z}=-4\pi\sigma$$

ist. Durch Addition beider Gleichungen folgt

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\sigma,$$

die Poisson'sche Gleichung.

Die hier vorgetragene Ableitung von (4) ist die erste von Poisson selbst gegebene. Da ihre Strenge nicht unanfechtbar ist, wurden vielfache Versuche einer strengeren Begründung gemacht*). Wir wollen noch den Beweis reproduzieren, welchen Riemann (Schwere, Elektricität und Magnetismus; bearbeitet von Hattendorff) auf Grundlage eines Satzes von Gauss gegeben hat.

4. Hilfssatz von Gauss. Gegeben seien eine vollständig geschlossene Fläche S und innerhalb oder aufserhalb derselben ein anziehender Körper. Wir teilen die Fläche in unendlich kleine Elemente, errichten in jedem derselben die nach aufsen gerichtete Normale und berechnen die Komponente der von dem Körper auf einen Punkt des Elements ausgeübten Anziehungskraft, welche in jene Normale fällt, multiplizieren diese Komponente mit der Gröfse des Flächenelements und summieren über die ganze Fläche. Wir werden sehen, dafs die so erhaltene Summe N einen ganz bestimmten, sehr einfachen Wert besitzt.

Zunächst sei nur ein anziehender Punkt Π mit der Masse 1 vorhanden; dann ist die Anziehung, welche er auf einen Punkt des Elements dS ausübt $= -\frac{1}{r^2}$, wenn r den Abstand der beiden Punkte bezeichnet. Sei nun n die Richtung der Normalen von dS, so ist die Komponente der Anziehung nach der Normalen $= -\frac{1}{r^2}\cos(r, n)$. Wir multiplizieren mit dS, summieren und erhalten

$$N = -\int \frac{1}{r^2}\cos(r, n)\, dS,$$

wobei die Integration über die ganze Fläche S zu erstrecken ist.

Nun haben wir aber in § 38, 2 gezeigt, dafs

$$\int \frac{1}{r^2}\cos(r, n)\, dS = 0, \quad -4\pi, \quad -2\pi$$

ist, je nachdem der Punkt aufserhalb, innerhalb oder auf der Fläche S liegt. Es ist demnach

$$N = 0, \quad 4\pi, \quad 2\pi,$$

wenn Π aufserhalb, innerhalb oder auf S liegt.

Ist die Masse im Punkte Π nicht 1, sondern dm, so müssen wir das gefundene Integral damit multiplizieren; sind mehrere Punkte Π, Π_1, Π_2

*) Über die ausgedehnte Litteratur dieses Gegenstandes, der so recht im Mittelpunkte der ganzen Potentialtheorie steht, siehe bei Bacharach, Abrifs der Geschichte der Potentialtheorie, p. 7 ff.

u. s. w. vorhanden, so können wir die von ihnen ausgehenden Wirkungen ohne weiteres addieren, da ja in jedem dS die von Π, Π_1 u. s. w. hervorgebrachten Kraftkomponenten dieselbe Richtung, nämlich diejenige der Normalen haben. Ist ein zusammenhängender Körper vorhanden, so zerlegen wir ihn in Elemente dm, die wir als materielle Punkte behandeln. Wir erhalten so

$$(5) \qquad N = -\int dm \int^{\bullet} \frac{\cos(r, n) dS}{r^2} = 4\pi \int^{\bullet} dm = 4\pi M,$$

falls die Masse M innerhalb des von S abgeschlossenen Raumes sich befindet;

$$(6) \qquad N = 0,$$

wenn die ganze Masse aufserhalb S sich befindet, also innerhalb S keine Masse vorhanden ist;

$$(7) \qquad N = 2\pi M,$$

wenn eine endliche Masse auf der Oberfläche S sich befindet;

$$(8) \qquad N = 4\pi M\varepsilon,$$

wenn eine endliche Masse sich in einer Kante oder Spitze von S befindet; ε ist dabei ein echter Bruch und giebt an, über den wievielten Teil der Kugelfläche vom Radius 1 sich die erste Integration (s. § 38, 2) erstreckt.

5. Beweis der Poisson'schen Gleichung. Wir wenden den eben gefundenen Satz auf ein unendlich kleines Parallelepipedon an. Die sechs Flächen desselben sind paarweise $dydz$, normal zur x-Achse, $dxdz$, normal zur y-Achse, $dxdy$, normal zur z-Achse. Nehmen wir zuerst die beiden Flächen, welche zur x-Achse normal stehen. Die Kraftkomponente für die erste derselben ist:

$$\frac{\partial V}{\partial x},$$

für die gegenüberliegende

$$-\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{x+dx} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx;$$

mit der Grösse $dydz$ der Flächen multipliziert, liefern sie zusammen zu N den Beitrag

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dxdydz.$$

Ebenso liefern die beiden andern Flächenpaare die Beiträge

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} dxdydz$$

und

$$-\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} dxdydz.$$

Daraus findet sich

$$N = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) dxdydz = 4\pi\sigma dxdydz,$$

wenn innerhalb des Elementes Masse von der Dichte σ vorhanden ist. Dividieren wir mit $dxdydz$, so ergiebt sich die Poisson'sche Gleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\sigma.$$

Liegt der Punkt (x, y, z) aufserhalb der anziehenden Masse, so ist $N = 0$, also auch:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Die Laplace'sche Gleichung ist ein Spezialfall der Gleichung von Poisson; man braucht in letzterer nur $\sigma = 0$ zu nehmen.

6. Falls der angezogene Punkt x, y, z gerade auf der Oberfläche des Körpers oder auch in einer Stelle desselben liegt, wo sich die Dichtigkeit σ unstetig ändert, so kommt dem Ausdrucke

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

überhaupt kein bestimmter Wert zu; er führt hier einen Stetigkeitssprung aus. Die früher manchmal gemachte Annahme, dafs hier für jenen Ausdruck $-2\pi\sigma$ zu setzen sei, entbehrt der Begründung.

7. Wir wollen hier sogleich die Poisson'sche Formel auch für Polarkoordinaten (wie in § 36) ableiten. Wir wenden wieder den Gauss-schen Hilfssatz auf ein Körperelement an, dessen Inhalt bekanntlich $r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$, dessen Masse also $\sigma r^2 \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi$ ist. Wir haben auch hier sechs Flächenelemente. Zunächst zwei, welche auf r senkrecht sind; ihr Inhalt ist $r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ und $(r + dr)^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$, die auf ihnen normalen Kraftkomponenten sind

$$\frac{\partial V}{\partial r} \quad \text{und} \quad -\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r+dr}.$$

Diese beiden Flächen liefern also zu N den Beitrag:

$$\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} - \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)_{r+dr}\right) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$= -\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)}{\partial r} \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi = -r\frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} \sin\vartheta dr d\vartheta d\varphi.$$

Ein zweites Flächenpaar, welches auch auf den durch die Achse $\vartheta = 0$ gelegten Ebenen senkrecht steht, besitzt die Flächeninhalte

$$r \sin\vartheta dr d\varphi \quad \text{und} \quad r \sin(\vartheta + d\vartheta) dr d\varphi.$$

Um die ihm entsprechenden Kraftkomponenten aufzustellen, beachten wir, dafs durch Verwandlung von ϑ in $\vartheta + d\vartheta$ ein Punkt r, ϑ, φ die Verschiebung $rd\vartheta$ normal zu jenen Flächen erleidet. Hiernach ist die Kraftkomponente für die erste Fläche

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial \vartheta} d\vartheta}{r d\vartheta}$$

oder

$$\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta},$$

diejenige für die zweite Fläche also

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} d\vartheta.$$

Zu N liefern beide zusammen den Beitrag

$$-\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\cos\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi - \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= -\frac{\partial\left(\sin\vartheta \frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta} dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Endlich haben wir noch zwei Flächen, deren Ebenen durch die Achse $\vartheta = 0$ gehen und deren Flächeninhalt $r\, dr\, d\vartheta$ beträgt. Ihre Kraftkomponenten sind

$$\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial V}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad -\frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} d\varphi\right),$$

ihre Beiträge zu N also zusammen

$$-\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Summieren wir, so wird

$$N = -\left[r\frac{\partial(rV)}{\partial r}\sin\vartheta + \frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right]$$

$$= 4\pi\sigma r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi,$$

mithin

$$(9)\quad \frac{1}{r^2}\left[r\frac{\partial(rV)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right] = -4\pi\sigma,$$

die Form der Poisson'schen Gleichung für Polarkoordinaten. Die Gleichung von Laplace lautet hier

$$(10)\quad r\frac{\partial(rV)}{\partial r} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Die direkte Umformung von (4) in (9) ist sehr weitläufig.

§ 41.

Das Flächenpotential.

1. Während wir bisher annahmen, daſs jede anziehende Masse einen Raum erfülle, wollen wir jetzt die Hypothese untersuchen, daſs sich eine solche Masse auf einer Fläche ausbreite derart, daſs einem endlichen Flächenstücke eine endliche Masse zukommt. Die Gravitationstheorie bietet uns hierfür allerdings kein vollkommen zutreffendes Beispiel, während die

Elektrizitätslehre von Elektrizitätsmengen ausgeht, welche auf einer Oberfläche ausgebreitet sind. Trotzdem ist auch für die reine Mechanik die Untersuchung des Potentials einer über eine Fläche verteilten Masse von der gröfsten Wichtigkeit, schon deshalb, weil häufig — wie später ausführlich erörtert werden soll — das Potential einer räumlich ausgedehnten Masse durch ein hypothetisches Flächenpotential ersetzt werden kann.

Ist wieder x, y, z der angezogene, ξ, η, ζ einer der anziehenden Punkte und σ die Dichtigkeit in dem letzteren, r der Abstand von x, y, z und ξ, η, ζ, und ds ein Element der mit Masse bedeckten Fläche, so haben wir für das Flächenpotential den Ausdruck

$$V = \int \frac{\sigma\, ds}{r}, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}, \tag{1}$$

wo die Integration über die ganze Fläche auszudehnen ist.

2. Wir untersuchen das Potential V in Bezug auf seine Stetigkeit unter der Voraussetzung, dafs σ nirgends unendlich wird und sich nur stetig ändert und dafs ferner die Fläche keine Singularitäten, wie Spitzen, aufweist, welche mit unendlich starker Krümmung verbunden sind.

Es ist wieder einleuchtend, dafs V nebst seinen Differentialquotienten für alle Punkte x, y, z endlich und stetig ist, für welche kein r unendlich klein wird, d. h. für solche Punkte, welche der Fläche nicht unendlich nahe kommen.

Um das Verhalten des Potentials in letzteren zu untersuchen, lassen wir x, y, z sich einem Punkte ξ, η, ζ der Fläche auf der Normalen in diesem Punkte unendlich nähern; den unendlich kleinen Teil der Fläche, welcher möglicherweise Unstetigkeiten hervorruft, dürfen wir als eben betrachten. Um die Rechnung zu vereinfachen, führen wir ein neues Koordinatensystem ein. Die Ebene jenes unendlich kleinen Flächenteils möge die xy-Ebene, der frühere Punkt ξ, η, ζ der neue Nullpunkt sein; die Normale fällt mit der z-Achse zusammen. Um den Nullpunkt denken wir uns mit dem sehr kleinen Radius δ auf der Fläche einen Kreis beschrieben, und wir werden nun lediglich die Masse, welche auf dieser Kreisfläche mit der hier als konstant anzusehenden Dichtigkeit σ verteilt ist, berücksichtigen, da die übrigen Teile der Fläche zu Unstetigkeiten keine Veranlassung bieten. Das Potential V_0 dieser Kreisfläche, genommen für einen Punkt, der auf der z-Achse vom Nullpunkte um den Abstand z entfernt ist, lautet, wenn für die xy-Ebene Polarkoordinaten durch

$$\xi = \varrho \cos\varphi, \qquad \eta = \varrho \sin\varphi$$

eingeführt werden,

$$V_0 = \sigma \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\delta} \frac{\varrho\, d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 + z^2}}. \tag{2}$$

Die Ausführung beider Integrationen liefert

$$V_0 = 2\sigma\pi\left[\sqrt{\delta^2 + z^2} - \sqrt{z^2}\right]; \tag{3}$$

hierin sind die beiden Quadratwurzeln als positiv zu betrachten beim Durchgang durch die Fläche. Man sieht sofort, daſs die Gröſse V_0 und damit auch V keine Stetigkeitsunterbrechung erleidet.

3. Anders gestaltet sich die Sache für die Differentialquotienten von V_0 und V. Aus (3) folgt nämlich

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = 2\sigma\pi\left[\frac{z}{\sqrt{\delta^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2}}\right]. \tag{4}$$

Dieser Ausdruck, in dem die Wurzeln wieder als positiv anzusehen sind, nimmt für verschwindende z verschiedene Werte an, je nachdem z positiv oder negativ ist. Beachtet man, daſs z auch gegen δ unendlich klein gemacht wird, so erhält man im ersten Falle

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = -2\sigma\pi, \tag{5}$$

im zweiten

$$\frac{\partial V_0}{\partial z} = 2\sigma\pi. \tag{6}$$

Nimmt man die eine Seite der Fläche willkürlich als die äuſsere, die andere als die innere an und bezeichnet man jetzt, um sich von der speziellen Wahl des Koordinatensystems wieder frei zu machen, die Richtung der Normalen nach der äuſseren und der inneren Seite mit n_a und n_i, so folgt aus den beiden letzten Gleichungen, wenn z bisher die Richtung nach der äuſseren Normalen hatte,

$$\frac{\partial V_0}{\partial n_a} + \frac{\partial V_0}{\partial n_i} = -4\sigma\pi$$

oder, da der übrige Teil von V keine Unstetigkeit verursacht,

$$\frac{\partial V}{\partial n_a} + \frac{\partial V}{\partial n_i} = -4\sigma\pi. \tag{7}$$

$\frac{\partial V}{\partial n}$ führt also beim Durchgang durch die Fläche von der inneren nach der äuseren Seite einen Sprung um $-4\sigma\pi$ aus*).

Die seitlichen Attraktionskomponenten zeigen an der Fläche selbst keinerlei Stetigkeitsunterbrechung; die Wirkung der unendlich benachbarten Teile hebt sich hier auf und die Wirkung der übrigen bietet nichts Besonderes.

4. Die Laplace'sche Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{8}$$

besteht selbstverständlich auch beim Flächenpotential, welches ja nur ein Spezialfall des räumlichen Potentials ist, für jeden Punkt x, y, z, der nicht auf der Fläche selbst liegt.

---

*) Vertauscht man die äuſsere und die innere Seite, so wird an diesem Resultate nichts geändert, da nach einer Umkehrung der Fortschreitungsrichtung auch die Gröſse der Normalkraft in umgekehrtem Sinne zu rechnen ist.

§ 42.

Das Potential der Doppelfläche.

1. Auf einer beliebigen Fläche sei wie im vorigen Paragraphen eine attrahierende Masse ausgebreitet; in sämtlichen Punkten der Fläche errichten wir Normalen und denken uns auf diesen unendlich kleine Strecken dn — positiv gerechnet nach der Seite der Fläche, welche als innere angenommen wird — abgetragen, die übrigens für verschiedene Stellen verschieden sein können. Wir konstituieren so eine zweite, der ersten unendlich benachbarte Fläche, die jener Punkt für Punkt zugeordnet ist. Auf ihr möge eine Masse ausgebreitet sein, welche in derselben Weise abstofsend wirkt wie die erste anziehend; je zwei entsprechende Teilchen beider Flächen mögen gleiche Massen enthalten. Wir können das verschiedene Verhalten beider Massenarten so in Rechnung bringen, dafs wir die erste als positiv, die zweite als negativ nehmen. Ist also ein Massenteilchen der ersten Fläche σds, so ist das entsprechende der anderen $-\sigma ds$.

Verhältnisse der beschriebenen Art treten näherungsweise in der Elektrizitätstheorie auf, wenn auf Belegungen, welche durch dünne Glasscheiben getrennt sind, sich entgegengesetzt gleiche Elektrizitäten ansammeln (Franklin'sche Tafel, Leydener Flasche). Auch in der Lehre von den elektrischen Strömen und dem Magnetismus spielt die Doppelfläche eine wichtige Rolle. In der spezielleren Mechanik haben wir sie als eine Art hypothetischer Hilfsgröfse zu verwenden.

2. Das Potential der Doppelfläche wird offenbar, wenn r die Entfernung des angezogenen Punktes x, y, z von einem Punkte ξ, η, ζ der ersten, positiv belegten Fläche bezeichnet, durch

$$(1)\qquad W = \int \sigma \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \frac{\partial r}{\partial n} dn}\right] ds$$
$$= \int \sigma \frac{\frac{\partial r}{\partial n} dn}{r^2} ds = -\int \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dn ds$$

dargestellt, wo die Integration über die ganze Fläche auszudehnen ist. Für nicht unendliche σ ist W verschwindend klein; daher wollen wir jetzt immer voraussetzen, dafs

$$(2)\qquad \varepsilon = -\sigma dn$$

eine endliche, übrigens mit dem Orte veränderliche Gröfse sei. Hiernach geht (1) in die endgültige Form

$$(3)\qquad W = \int \varepsilon \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds$$

über; die Differentiation nach n ist in der mehrfach erörterten Weise zu verstehen (§ 6, 11).

Wir behandeln jetzt, da wir uns dn als verschwindend denken, die Doppelfläche wie eine einfache.

3. Die Stetigkeit von W steht für Punkte, welche von der Doppelfläche einen endlichen Abstand haben, aufser Frage. Um das Verhalten von W beim Durchgange durch die Fläche selbst zu untersuchen, wenden wir genau dasselbe Verfahren wie in § 41, 2 an; W_0 möge das Potential eines als eben und kreisförmig anzusehenden Teilchens der Doppelfläche sein. Bei derselben Bezeichnung*) wie an der angeführten Stelle ist

$$(4)\qquad W = -\varepsilon\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\delta} \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\varrho^2+z^2}}}{\partial z}\,\varrho\, d\varrho = \varepsilon\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\delta} \varrho z(\varrho^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\, d\varrho$$

oder nach Ausführung der Integrationen

$$(5)\qquad W_0 = 2\varepsilon\pi z\left[\frac{1}{\sqrt{z^2}} - \frac{1}{\sqrt{\delta^2+z^2}}\right].$$

Die Wurzeln sind als positiv zu betrachten. Lassen wir z auch gegen δ verschwindend klein werden, so verschwindet das zweite Glied gegen das erste und es wird

$$(6)\qquad \begin{aligned} W_0 &= 2\varepsilon\pi \quad \text{für positive } z,\\ W_0 &= -2\varepsilon\pi \quad \text{für negative } z.\end{aligned}$$

W_0, mithin auch W, erleidet also beim Übergange von der inneren nach der äufseren Seite der Doppelfläche einen Sprung um $4\varepsilon\pi$.

4. Aus (5) folgt durch Differentiation

$$(7)\qquad \frac{\partial W_0}{\partial z} = -\frac{2\varepsilon\pi\delta^2}{(\delta^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

oder bei verschwindendem z

$$(8)\qquad \left(\frac{\partial W_0}{\partial z}\right)_0 = -\frac{2\varepsilon\pi}{\delta}.$$

Dieser Ausdruck hängt zwar nicht von z, aber von der ganz willkürlichen, sehr kleinen Gröfse δ ab; besonders auffällig erscheint es, dafs $\left(\frac{\partial W_0}{\partial z}\right)_0$ desto gröfser werden soll, je kleiner δ genommen wird. Zur Klarstellung der Sachlage dient die folgende Überlegung. Die endliche Gröfse ε ist das negative Produkt der unendlich kleinen Strecke dn und der unendlich grofsen Dichtigkeit σ. Bei endlicher Entfernung des Punktes x, y, z von der Doppelfläche kann diese als einfache Fläche behandelt

*) z wird nach der äufseren Seite zu als positiv gerechnet.

werden, indem man nicht dn selbst, sondern nur den Wert von ε in Rechnung bringt. Wird aber die Distanz des Punktes x, y, z von der Doppelfläche eine unendlich kleine Gröſse derselben oder höherer Ordnung wie dn, so ist diese Entfernung in Betracht zu ziehen. Die Gröſse δ spielt hierbei insofern eine Rolle, als z kleiner sein soll als δ, durch den Wert von δ also demjenigen von z eine Grenze gezogen wird.

Kommt x, y, z der attrahierenden Seite so nahe, daſs $\frac{dz}{dn}$ nicht unendlich groſs wird, so muſs die Attraktion die Repulsion durch die entferntere, negative Seite um ein endliches Vielfaches überwiegen, bei der unendlich groſsen Dichtigkeit also unendlich sein; ebenso muſs auf der entgegengesetzten Seite eine unendlich starke Repulsion stattfinden. In der Doppelfläche selbst ist die Kraftwirkung, wenn nicht dn ein ganz bestimmter sehr kleiner, aber doch endlicher Wert beigelegt wird, schlechterdings unbestimmt.

Die Gröſse

$$\frac{\partial W_0}{\partial z}, \quad \text{also auch} \quad \frac{\partial W}{\partial z},$$

hat in der Doppelfläche selbst keinen endlich bestimmten Wert.

Läſst man x, y, z der positiven Seite nahe kommen, ohne daſs jedoch $\frac{dz}{dn}$ endlich wird, so erkennt man auch ohne Rechnung, daſs hier die Attraktion durch eine abgegrenzte unendlich benachbarte unendlich kleine Kreisfläche ebenso stark ist wie in dem symmetrisch auf der anderen Seite gelegenen Punkte die Repulsion. Beide Kräfte wirken aber in dem gleichen Sinne. Die Wirkung der übrigen Teile der Doppelfläche ist beiderseits die gleiche. So gelangen wir zu dem Resultate:

Der nach der Normalrichtung genommene Differentialquotient des Potentials einer Doppelfläche wird für einen Punkt in unendlicher Nachbarschaft dieser unstetig; die Werte, zu welchen man nach Passieren der Doppelfläche gelangt, reihen sich jedoch, wenn man nur die unendlich nahe an dieser gelegenen Punkte ausschlieſst, an die vorher durchlaufenen stetig an.

Durch diese eingehendere Betrachtung beseitigen wir das öfters ausgesprochene, paradoxe Resultat, daſs W selbst, nicht aber $\frac{\partial W}{\partial n}$, an der Doppelfläche unstetig sei.

Auch die Differentialquotienten nach seitlichen Richtungen sind an der Doppelfläche im allgemeinen nicht stetig.

5. Das Potential einer Doppelfläche läſst auch eine sehr einfache geometrische Veranschaulichung zu. Da

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n} = -\frac{1}{r^2}\cos(r, n) \tag{9}$$

ist, wenn (r, n) den Winkel zwischen r und der positiven Richtung der Normalen n bezeichnet, und die Projektion des Flächenteils ds auf eine Kugel mit dem Radius 1, welche um x, y, z als Zentrum der Projektion beschrieben ist, die Gröfse

$$(10) \qquad dK = \pm \frac{ds \cos(r, n)}{r^2}$$

besitzt, so wird aus (3)

$$(11) \qquad W = \mp \int \varepsilon dK.$$

In (10) und (11) gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem $\cos(r, n)$ positiv oder negativ ist. Wechselt $\cos(r, n)$ auf der belegten Fläche sein Zeichen, so mufs das Integral für die einzelnen Teile besonders ausgeführt werden, auf denen kein Zeichenwechsel vorkommt.

§ 43.

Der Green'sche Satz.

1. Es sei $F(x, y, z)$ eine beliebige Funktion von x, y, z, welche nebst ihrer partiellen Ableitung nach x innerhalb eines Raumes, der durch eine nirgends sich selbst durchschneidende Fläche S vollständig begrenzt wird, stetig und eindeutig ist. Die Eindeutigkeit ist so zu verstehen, dafs sich bei einem an sich mehrdeutigen F ein Zweig dieser Funktion innerhalb dieser Fläche vollständig von den übrigen isolieren läfst, d. h. dafs daselbst kein Verzweigungspunkt von F liegt. Nach diesen Festsetzungen wollen wir das dreifache Integral

$$(1) \qquad \iiint \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x} dx dy dz$$

untersuchen, welches über den ganzen von S umgrenzten Raum auszudehnen ist. Durch Ausführung einer Integration erhalten wir

$$(2) \qquad \iint [F(x, y, z)] dy dz,$$

wo die Einklammerung von $F(x, y, z)$ bedeutet, dafs die Differenz der Grenzwerte dieser Funktion genommen werden soll.

Wir können uns das dreifache Integral (1) als eine Summation dreifach unendlich vieler rechtwinkligen Parallelepipeda $dx dy dz$, multipliziert mit der Gröfse $\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}$, vorstellen. Durch Ausführung der einen Integration ist je eine Reihe dieser Elementarteile, welche der x-Achse parallel läuft, als summiert anzusehen; diese Reihe, deren senkrechter Durchschnitt $dy dz$ ist, wird an ihren beiden Enden durch Elemente der Fläche S begrenzt, die wir als ds_1*) und ds_2 bezeichnen wollen. Sollte die Reihe mehr als zweimal durch die Fläche S geschnitten werden, so

*) ds_1 gehöre zu einem kleineren x als ds_2.

wollen wir sie in Teile zerlegt denken, welche nur von zwei Flächenstücken begrenzt werden. Sind n_1 und n_2 die nach innen gerichteten Normalen der Fläche in ds_1 und ds_2, so ist bei bekannter Bezeichnungsweise nach den Gesetzen der Projektion von Flächen

$$(3) \qquad ds_1 = \frac{dy\,dz}{\cos(n_1, x)}, \quad ds_2 = -\frac{dy\,dz}{\cos(n_2, x)}.$$

Der Gegensatz der Zeichen hat darin seinen Grund, daſs die Richtung der Normalen in ds_2 in umgekehrtem Sinne wie in ds_1 (bei parallelen Flächenteilen) zu rechnen ist; eine Richtungsumkehrung entspricht aber der Ersetzung eines Winkels durch seinen Nebenwinkel. Durch diese Zeichenfestsetzung wird es möglich, ds_1 und ds_2 als positive Gröſsen zu erhalten.

Durch Benutzung von (3) wird aus (2), wenn nur noch ein Integralzeichen geschrieben wird,

$$-\int [F(x, y_1, z_1) \cos(n_1, x)\, ds_1 + F(x, y_2, z_2) \cos(n_2, x)\, ds_2]$$

oder, wenn jetzt ds überhaupt ein Element von S bezeichnet,

$$-\int F(x, y, z) \cos(n, x)\, ds,$$

wo nunmehr über die ganze Fläche S zu integrieren ist.

Bezeichnen wir der Kürze wegen das Raumelement $dx\,dy\,dz$ mit $d\tau$ und schreiben wir statt der drei Integralzeichen in (1) nur eines, so erhalten wir

$$(4) \qquad \int \frac{\partial F(x, y, z)}{\partial x}\, d\tau = -\int F(x, y, z) \cos(n, x)\, ds.$$

Das zweite Integral ist über die Fläche S, das erste über den von S eingeschlossenen Raum auszudehnen.

2. Wir machen von diesem Resultate aus der Theorie der mehrfachen Integrale Anwendung auf das folgende über den Raum S auszudehnende Integral

$$(5) \qquad \int \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) d\tau,$$

in welchem zunächst φ und ψ beliebige, innerhalb S einwertige und nebst ihren Ableitungen stetige Funktionen von x, y, z sein mögen.

Alsdann sind wir zur partiellen Integration der einzelnen Glieder von (5) berechtigt; es ist z. B.

$$(6) \qquad \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}\, d\tau = \iiint \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x}\, dx\,dy\,dz$$

$$= \iint \left[\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] dy\,dz - \iiint \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\, dx\,dy\,dz$$

$$= -\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x} \cos(n, x)\, ds - \int \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\, d\tau.$$

Hiernach wird aus (5), wenn wir die häufig gebrauchte Abkürzung

(7) $$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

benutzen,

(8) $$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau$$
$$= -\int\varphi\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cos(n,z)\right]ds$$
$$-\int\varphi\Delta\psi\,d\tau.$$

Nun ist aber

(9) $$\frac{\partial\psi}{\partial x}\cos(n,x) + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cos(n,y) + \frac{\partial\psi}{\partial z}\cos(n,z)$$
$$= \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \frac{\partial\psi}{\partial n},$$

wo dn wieder nach innen gerichtet ist. Hiernach wird schliefslich

(10) $$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau$$
$$= -\int\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds - \int\varphi\Delta\psi\,d\tau.$$

Diese Gleichung, welche die Zerlegung eines Raumintegrals in ein Flächen- und ein Raumintegral zeigt, heifst der Green'sche Satz im weiteren Sinne.

3. Die Gleichung (10) vereinfacht sich, wenn ψ die Eigenschaft besitzt, innerhalb des Raumes φ der Laplace'schen Gleichung

(11) $$\Delta\psi = 0$$

zu genügen. Es wird dann

(12) $$\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)d\tau = -\int\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}ds,$$

so dafs hier ein Raumintegral vollständig auf ein Flächenintegral reduziert wird.

Vertauschen φ und ψ ihre Rolle, so ergiebt sich eine (10) analoge Gleichung, welche mit (10) zusammengestellt

(13) $$\int\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds = -\int(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,d\tau$$

liefert.

Genügen φ und ψ beide innerhalb S der Gleichung (11), so wird

(14) $$\int\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)ds = 0.$$

Gleichung (13) enthält den Green'schen Satz im engeren Sinne.

4. Die Wichtigkeit des zunächst rein mathematischen Green'schen Satzes beruht in seiner weitgehenden Anwendbarkeit auf die Potentialtheorie; durch Spezialisierung liefert er mehrere sehr bemerkenswerte Resultate. Setzen wir z. B. ψ einer Konstanten, φ aber einem Potential V gleich, welches innerhalb S und auf der Fläche von S der Gleichung (11) genügt, welches also einer Masse zugehört, die ganz aufserhalb dieses Gebietes liegt, so wird aus (14)

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} ds = 0. \tag{15}$$

Da $\frac{\partial V}{\partial n}$ die senkrecht zu S auf einen Punkt von S ausgeübte Attraktion mifst, so kann man sagen, dafs die algebraische Summe dieser Anziehungen gleich Null ist, wenn man die nach dem Inneren von S gehende Kraftwirkung als positiv, die umgekehrte als negativ rechnet.

Derselbe Satz folgt übrigens aus ganz elementaren geometrischen Betrachtungen. In erweiterter Form findet man ihn bei Gauss, Ges. W., B. V, p. 9.

§ 44.

Allgemeine Untersuchungen über die Bestimmung eines Potentials.

1. Um das Potential einer attrahierenden räumlichen Masse zu entwickeln, schlugen wir bisher nur einen einzigen Weg ein: wir stellten den Ausdruck für das Potential eines unendlich kleinen Teils der Masse auf und summierten über die ganze Masse. Doch treten häufig Fälle ein, in denen eine solche Summation nicht thunlich ist, während die Herleitung des Potentials auf indirektem Wege gelingt. Dies kann entweder die Folge von analytischen Schwierigkeiten sein, welche bei indirekten Methoden leichter zu überwinden sind, oder durch die Natur des Problems begründet werden. Nehmen wir z. B. an, es solle das Potential der Attraktion der Erde bestimmt werden, ohne dafs über die Massenverteilung im Innern beschränkende Voraussetzungen gemacht werden. Eine direkte Beobachtung der Massenverteilung im Erdinnern ist natürlich ausgeschlossen; es können nur Beobachtungen über die Intensität und Richtung der Schwerkraft in Punkten der Erdoberfläche angestellt werden. In der Folge werden wir sehen, dafs aus diesen Beobachtungen das Potential der Erde für alle äufseren Punkte abgeleitet werden kann. Ganz analog verhält es sich mit dem Erdmagnetismus; man kann an möglichst zahlreichen Punkten der Erdoberfläche Intensität und Richtung des Erdmagnetismus beobachten und daraus sein Potential für äufsere Punkte herleiten. — Wir geben mehrere Sätze über indirekte Bestimmungen des Potentials, an die sich verschiedene anderweitige Sätze eng anschliefsen.

2. Wenn von einer Funktion V von x, y, z verlangt wird,

dafs sie für alle Punkte des Raumes, etwa einzelne Punkte, Linien und Flächen, aber keine Raumteile ausgenommen, der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \Delta V = -4\pi\sigma$$

genügt, worin σ als Funktion von x, y, z für jeden Punkt des Raumes gegeben ist, dabei nebst ihren Differentialquotienten

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

überall endlich und stetig ist und im Unendlichen nebst diesen derart unendlich klein wird, dafs

$$(2) \qquad xV, \quad yV, \quad zV, \quad x^2 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad y^2 \frac{\partial V}{\partial y}, \quad z^2 \frac{\partial V}{\partial z}$$

nicht unendlich grofs werden, so ist sie *eindeutig* als Potential einer Masse bestimmt, welche in jedem Punkte x, y, z die Dichtigkeit σ besitzt. Selbstverständlich kann σ in einem Teile des Raumes, der dann von Masse frei ist, verschwinden.

Die Freiheit, dafs V stellenweise (1) nicht genügt, mufs schon deshalb eingeräumt werden, weil diese Gleichung an der Oberfläche eines begrenzten Massenteils ihre Gültigkeit verliert.

Um diesen Satz zu beweisen, setzen wir in der Gleichung (10) von § 43

$$\varphi = \psi = U$$

und erhalten

$$(3) \int U \Delta U d\tau = -\int U \frac{\partial U}{\partial n} ds - \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

wo die Integrale sich teils auf eine geschlossene Fläche S, teils auf den Inhalt derselben beziehen.

Nehmen wir nun an, ein V, welches den angegebenen Bedingungen genügt, sei nicht das Potential der Masse, welche durch Angabe der Dichtigkeit σ für jeden Punkt des Raumes bestimmt ist; das Potential sei vielmehr eine Funktion V', welche nach Früherem denselben Bedingungen genügt. Dann befriedigt $V - V' = U$, einzelne Punkte, Linien oder Flächen ausgenommen, die Gleichung

$$(4) \qquad \Delta U = \Delta V - \Delta V' = 0,$$

da sowohl ΔV als auch $\Delta V'$ im allgemeinen der Gröfse $-4\pi\sigma$ gleich ist; im Übrigen befriedigt U dieselben Bedingungen wie V und V' selbst. Identifizieren wir nun, wozu wir berechtigt sind, dieses U mit demjenigen der Gleichung (3), so wird die linke Seite von (3) gleich Null. Denn im allgemeinen ist $\Delta U = 0$, und die einzelnen nicht räumlichen, sondern höchstens zweidimensionalen Punktekomplexe, welche sich singulär verhalten, können bei dem Raumintegrale keinen endlichen Bestandteil erzeugen. Daher haben wir

$$(5)\qquad \int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=-\int U\frac{\partial U}{\partial n}\,ds.$$

Als Fläche S wollen wir jetzt eine Kugelfläche annehmen, deren Mittelpunkt der Nullpunkt und deren Radius unendlich grofs ist, so dafs jedenfalls alle in Betracht kommenden Massenteile von der Kugel eingeschlossen werden. Dann wird nach den Bedingungen (2) $U\frac{\partial U}{\partial n}$ unendlich klein von der dritten Ordnung, wenn der Kugelradius unendlich grofs von der ersten Ordnung und demnach die Oberfläche der Kugel unendlich grofs von der zweiten Ordnung wird. Auch ohne weitere Rechnung ist hieraus ersichtlich, dafs das Integral auf der rechten Seite von (5) verschwindet; sein absoluter Betrag ist nämlich kleiner als das Produkt des absoluten Maximalwertes von $U\frac{\partial U}{\partial n}$ mit der Oberfläche der Kugel, d. h. als eine unendlich kleine Gröfse erster Ordnung. Somit wird

$$(6)\qquad \int\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=0.$$

Die linke Seite von (6) kann als eine Summe von lauter wesentlich positiven Gröfsen betrachtet werden; sie kann daher nur verschwinden, wenn ihre sämtlichen Glieder verschwinden. Daher mufs für beliebige x, y, z, einzelne Punkte, Linien oder Flächen, die für den Wert des Integrals ohne Belang sind, etwa ausgenommen,

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial z}=0,$$

also

$$U=\text{Const.}$$

sein. Da aber U im Unendlichen verschwinden soll, so mufs überall $U=0$, also $V=V'$ sein. Der behauptete Satz ist mithin bewiesen.

3. Wichtiger als der bewiesene Satz ist die folgende Untersuchung, welche zeigt, dafs ein Potential V innerhalb eines durch eine Fläche S eingeschlossenen Raumes bestimmt ist, falls V innerhalb desselben der Gleichung

$$(7)\qquad \Delta V=0$$

genügt und die Werte von V auf der Fläche S gegeben sind. Ist $\frac{\partial V}{\partial n}$ auf dieser Fläche gegeben, so ist bei Zuziehung von (7) das Potential bis auf eine additive Konstante bestimmt.

Die Fläche S kann aus mehreren getrennten Teilen bestehen. Die unendlich fernen Punkte dürfen nicht in den begrenzten Flächenraum zu liegen kommen; sie sind nötigenfalls durch eine unendlich grofse Kugel (oder eine andere, überall im Unendlichen liegende geschlossene Fläche), welche als ein

Teil von S betrachtet wird, auszuschliefsen. V mufs auf dieser Kugel derart verschwinden, dafs xV, yV, zV nicht unendlich werden*). Weifs man im voraus, dafs V die Eigenschaften eines Potentials besitzt, so kann man von der Zufügung dieser Bedingung absehen.

Um diese Sätze zu erweisen, nehmen wir an, dafs zwei verschiedene Funktionen V und V' existieren, welche (7) innerhalb S befriedigen und auf S die gleichen Werte annehmen. Dann besitzt $V - V' = U$ auf der ganzen Fläche S den Wert 0. Auf U, welches ebenfalls (7) innerhalb S befriedigt, ist aber die Gleichung (5) anwendbar, bei welcher die Fläche S und der von ihr umgrenzte Raum die Ausdehnung der Integration bezeichnet. Da aber die rechte Seite von (5) nur solche U-Werte enthält, welche sich auf die Fläche S beziehen, also verschwinden, so erhalten wir wieder die Gleichung (6), aus der wir

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

und somit $U = \text{Const.}$ herleiten. V stimmt also mit V' bis auf eine Konstante überein; da beide für S identisch werden sollen, so mufs diese Konstante gleich Null sein.

Ist $\frac{\partial V}{\partial n}$ statt V auf S gegeben, so sind wesentlich dieselben Schlüsse anwendbar, da die rechte Seite von (5) auch den für S verschwindenden Faktor $\frac{\partial U}{\partial n}$ enthält. Nur können wir nicht den Schlufs ziehen, dafs die Konstante, welche V und V' unterscheidet, verschwinden mufs, da auf S nur $\frac{\partial V}{\partial n}$ und $\frac{\partial V'}{\partial n}$, nicht aber V und V' identisch zu werden brauchen. Enthält S eine unendlich ferne Fläche, so mufs die Konstante verschwinden, da hier V und V' beide der Null gleich werden.

Auch wenn V für einen Teil von S, $\frac{\partial V}{\partial n}$ aber für den anderen Teil gegeben ist, ist mit Hilfe der nämlichen Schlüsse nachzuweisen, dafs V für den ganzen Raum S, in welchem $\Delta V = 0$ ist, vollständig bestimmt ist.

Die Bedingung $\Delta V = 0$ sagt natürlich für den Raum S nichts anderes aus, als dafs kein Teil der anziehenden Masse in ihn zu liegen kommt.

Das gefundene Resultat ist deshalb von so fundamentaler Wichtigkeit, weil die supponierten Bedingungen, dafs V oder $\frac{\partial V}{\partial n}$ auf einer Oberfläche S bekannte Werte annehmen, in der Wirklichkeit vorkommen. Bei dem eingangs erwähnten Beispiele des Potentials der attrahierenden Erdmasse läfst sich zwar nicht für alle, aber doch für sehr viele Punkte der Erd-

*) Hieraus folgt von selbst, dafs auch $x^2 \frac{\partial V}{\partial x}$ u. s. w. im Unendlichen nicht unendlich werden; denn die unendliche Kleinheit eines analytischen Ausdrucks im Unendlichen erhöht sich durch Differentiation um einen Grad.

oberfläche die gegen die Oberfläche gerichtete Komponente der Schwerkraft — wir wollen dahingestellt sein lassen, ob die Schwerkraft normal zur Erdoberfläche ist — bestimmen; diese ist aber nichts Anderes als $\frac{\partial V}{\partial n}$.

Hiermit ist freilich über die wirkliche Ausführung der Potentialbestimmung noch gar nichts gesagt; auch ist diese Aufgabe bis jetzt nur für spezielle Fälle gelöst, von denen uns der wichtigste später noch eingehend beschäftigen soll. Ferner wissen wir noch nicht, ob die Werte von V oder $\frac{\partial V}{\partial n}$ auf S ganz willkürlich vorgelegt werden dürfen.

4. Setzen wir $\varphi = V$, welches für einen Raum S der Gleichung $\varDelta V = 0$ genügt, und $\psi = \frac{1}{r}$, wenn

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

ist und ξ, η, ζ einen Punkt innerhalb des Raumes S bezeichnet, so dürfen wir die Formel (14) von § 43 zur Anwendung bringen, wobei wir nur den Punkt $x = \xi$, $y = \eta$, $z = \zeta$, für den $\frac{1}{r}$ unendlich wird, durch eine um ihn als Mittelpunkt beschriebene verschwindend kleine Kugel mit dem Radius R auszuschliefsen haben. Die Grenze des nunmehr in Betracht kommenden Raumes, innerhalb dessen φ und ψ nebst ihren Ableitungen endlich und stetig sind, besteht aus der ursprünglichen Fläche S, von der ein Element ds sein möge, und jener unendlich kleinen Kugelfläche, von der ein Element mit ds' bezeichnet werde. Dann geht jene Relation, wenn die Integrationen sich auf die durch die Differentiale angedeuteten Flächen beziehen*), in

$$(8) \qquad \int \frac{V\,ds'}{r^2} + \int \frac{\partial V}{\partial r}\frac{ds'}{r} = \int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\,ds - \int \frac{\partial V}{\partial n}\frac{ds}{r}$$

über. Auf der linken Seite ist $r = R$ zu nehmen, da sich die beiden Integrale hierselbst nur auf die Kugeloberfläche beziehen.

Da V und $\frac{\partial V}{\partial r}$ in ξ, η, ζ und dessen Umgebung endlich und stetig sind, so kann man diese beiden Gröfsen für den Bereich der beiden linksstehenden Integrale als konstant annehmen. Bei Einführung von Polarkoordinaten r, ϑ und φ, durch welche ds' in $r^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ übergeht, wird

$$\int \frac{V\,ds'}{r^2} + \int \frac{\partial V}{\partial r}\frac{ds'}{r} = V \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta + \frac{\partial V}{\partial r}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} r \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$= 4\pi V + 4\pi r \frac{\partial V}{\partial r} = 4\pi V,$$

*) Es ist auf der kleinen Kugel z. B. $\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial r}$, da hier die nach innen gerichtete Normale in die Richtung des wachsenden r fällt.

da $r = R$ als verschwindend anzusehen ist; in V sind die Koordinaten ξ, η, ζ einzuführen. Denkt man sich nun ξ, η, ζ durch x, y, z ersetzt, so geht (8) für beliebige Punkte x, y, z des Raumes S in

$$V = \frac{1}{4\pi}\int V \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial V}{\partial n}\frac{ds}{r} \tag{9}$$

über.

In dieser Gleichung wird das Potential V für jeden Punkt des Raumes S durch die Werte von V und $\frac{\partial V}{\partial n}$, welche diese auf der Fläche S besitzen, ausgedrückt. Doch löst dieses Ergebnis die durch die vorige Nummer postulierte Aufgabe, V im Raume S zu bestimmen, wenn V oder $\frac{\partial V}{\partial n}$ auf der Fläche S gegeben sind, keineswegs; es müssen hier V und $\frac{\partial V}{\partial n}$ gleichzeitig gegeben sein.

Nur wenn S eine Niveaufläche von V ist, so dafs auf ihr V einer Konstanten V_0 gleich wird, läfst (9) das allgemeinere V durch $\frac{\partial V}{\partial n}$ allein auf der Oberfläche bestimmen. Denn alsdann geht das erste Integral in einen Ausdruck über, der lediglich von der Lage des angezogenen Punktes x, y, z und der Gestalt von φ, aber nicht von der Massenverteilung abhängt. Das mehrerwähnte Problem von der Attraktion der Erde könnte hiernach behandelt werden.

Das erste Integral auf der rechten Seite von (9) kann als das Potential der Doppelfläche S, für welche in jedem einzelnen Punkte $\varepsilon = \frac{V}{4\pi}$ ist, das zweite aber als das Potential der einfachen Fläche S mit der Dichtigkeit $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$ angesehen werden.

5. Nehmen wir jetzt speziell an, dafs S eine Kugelfläche mit dem beliebigen (im allgemeinen endlichen) Radius R sei, in deren Mittelpunkt sich x, y, z befindet, so wird

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \frac{1}{r^2},$$

worin dann, wie auch in dem zweiten Integrale von (9), für r der konstante Wert R einzusetzen ist. Das letztere Integral verschwindet nach § 43, (15) und aus (9) wird

$$V = \frac{1}{4\pi R^2}\int V ds. \tag{10}$$

Da $4\pi R^2$ den Flächeninhalt der Kugelfläche darstellt, $\int V ds$ aber als Summe von unendlich vielen, auf der Kugelfläche ausgebreiteten V-Werten, multipliziert mit dem zugeordneten Flächenstücke, betrachtet werden kann,

so sagt (10) aus, dāſs **der Wert, welchen V im Mittelpunkte einer Kugel besitzt, welche keine attrahierenden Massen enthält, als das arithmetische Mittel der Werte angesehen werden kann, welche V auf der Kugelfläche annimmt.** Dies ist der Gauss'sche **Mittelwertsatz***).

Wir ziehen aus dem gefundenen Resultate den einfachen Schluſs, daſs V im Mittelpunkte der Kugel einen Wert besitzt, der zwischen dem gröſsten und kleinsten Werte liegt, welchen es auf deren Oberfläche annimmt. Da die Kugel beliebig klein angenommen, ihr Mittelpunkt nach jedem Punkte des Raumes S verlegt werden kann, so folgt, **daſs V in keinem Punkte von S ein Minimum oder Maximum sein kann.** Denn wenn es nicht gerade konstant ist, finden sich in seiner Umgebung sowohl gröſsere als auch kleinere Werte. Wir können mit C. Neumann sagen, daſs im ganzen Raume S das Potential V nur **Durchgangswerte**, keine **extremen** Werte erlangt. Die letzteren können sich nur auf der Grenzfläche des anziehenden Körpers selbst oder im Unendlichen befinden.

Dieser Satz läſst sich dahin interpretieren, daſs kein im Endlichen, aber auſserhalb der attrahierenden Massenteile gelegener Punkt existiert, von dem aus scheinbar eine Attraktion oder Repulsion auf **alle** umgebenden Punkte ausgeübt wird.

Daſs V im ganzen Raume S konstant wird, wenn dies für einen noch so kleinen endlichen Teil desselben der Fall ist, geht schon daraus hervor, daſs V für irgend einen nicht in der anziehenden Masse gelegenen Punkt eine stetige, wohl immer als analytisch anzusehende Funktion ist, also konstant sein muſs, wenn dies für jenen Raum der Fall ist.

Ein Beispiel hierfür bietet der innere Hohlraum einer Kugelschale.

6. Wir können noch weiter zeigen, daſs auch die *Kraftwirkung* **der anziehenden Masse in keinem Punkte auſserhalb von ihr ein Maximum wird, während sie ein Minimum sein kann.** Daſs letzteres nicht ausgeschlossen ist, geht schon daraus hervor, daſs zwischen zwei anziehenden Körpern in der Regel ein Punkt vorhanden ist, in welchem sich die beiderseitigen Anziehungen aufheben.

Um die Richtigkeit des Satzes zu beweisen, brauchen wir nur darzuthun, daſs nicht für **alle** Punkte x, y, z, welche einen Punkt x_0, y_0, z_0 auf einer unendlich kleinen Kugelfläche umgeben,

$$(11)\qquad \left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_0}{\partial z}\right)^2 > \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

ist, wenn V_0 und V den Punkten x_0, y_0, z_0 und x, y, z entsprechen. An Stelle der links stehenden Gröſse können wir lediglich

*) Man findet den Satz in erweiterter Form bei Gauss, Ges. W. B. V, p. 222.

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)^2$$

setzen, wenn die Koordinatenachsen so gewählt werden, dafs die x-Achse in die Richtung der Kraftwirkung in x_0, y_0, z_0 fällt.

Nun folgt aber durch Differentiation von (7) nach x, dafs $\frac{\partial V}{\partial x}$ derselben Differentialgleichung genügt, wie V selbst; auch die übrigen Eigenschaften von V, welche zur Herleitung der Resultate der vorigen Nummern nötig sind, kommen $\frac{\partial V}{\partial x}$ zu. Hiernach können wir durch das gleiche Verfahren wie dort beweisen, dafs es Punkte x, y, z in der Umgebung von x_0, y_0, z_0 giebt, für welche

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 > \left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)^2$$

ist.

Hiermit ist dargethan, dafs (11) nicht für alle Punkte x, y, z richtig sein kann.

§ 45.

Das Dirichlet'sche Prinzip.

1. Nachdem wir uns überzeugt haben, dafs nur eine Funktion V von x, y, z existieren kann, welche der Differentialgleichung

$$\Delta V = 0 \tag{1}$$

genügt, innerhalb eines durch eine Fläche S begrenzten Raumes eindeutig und stetig ist und auf dieser Fläche vorgeschriebene Werte annimmt, wollen wir den Dirichlet'schen Nachweis vortragen, dafs die Werte auf der Fläche beliebig festgesetzt werden dürfen*). Man nennt den hierdurch begründeten Satz das Dirichlet'sche Prinzip.

Es liegt in der unbestimmten Natur des Problems, dafs auch dieser Nachweis sich auf ziemlich vage Annahmen stützt. Die Beweiskraft desselben ist daher eine recht zweifelhafte. In der Praxis werden für eine Fläche immer nur solche Werte vorgelegt sein, welche wirklich einem Potential angehören, wie dies z. B. bei der Attraktion der Erde u. s. w. der Fall ist; hier ist also von Bedenken keine Rede. Immerhin scheint es schon des historischen Interesses wegen erforderlich, die Dirichlet'sche Untersuchung vorzuführen.

2. Dirichlet geht von der als selbstverständlich betrachteten Annahme aus, dafs jedenfalls reelle Funktionen U möglich sind, welche auf S die vorgeschriebenen Werte annehmen und die Bedingung der Eindeu-

*) Dabei ist wieder zu beachten, dafs die unendlich fernen Punkte durch eine unendliche Kugel ausgeschlossen werden müssen, die mit zu S gerechnet wird.

tigkeit und Stetigkeit innerhalb S erfüllen, ohne dafs sie der Gleichung $\Delta U = 0$ zu genügen brauchen. In dieser sehr unbestimmten Annahme liegt hauptsächlich das Bedenkliche des ganzen Nachweises.

Unter der gemachten Voraussetzung wollen wir den Ausdruck

$$W = \int \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau \tag{2}$$

bilden, worin die Integration wie immer über den von S begrenzten Raum auszudehnen ist. Da das Integral die Summe lauter positiver Gröfsen darstellt, also selbst positiv ist, mufs es für irgend ein U einen **kleinsten** Wert annehmen. Konstanz für beliebige U kann bei der Willkürlichkeit derselben ausgeschlossen werden. Wir werden nun nachweisen, dafs für den notwendig vorhandenen kleinsten Wert von W (mehrere gleiche kleinste Werte werden sich von selbst ausschliefsen) die Gröfse U der Gleichung $\Delta U = 0$ genügt, wodurch die Existenz einer Funktion dargethan ist, welche alle eingangs aufgestellten Bedingungen befriedigt.

Wir wollen jetzt das spezielle U, welches (2) zu einem Minimum macht, mit V bezeichnen. Dann kann man irgend ein anderes U gleich

$$V + V'$$

setzen. Alsdann genügt aber auch

$$U = V + hV', \tag{3}$$

worin h eine willkürliche Konstante ist, den Bedingungen, welche wir U vorschrieben; denn V' mufs für alle Punkte von S gleich Null werden, um das erstbetrachtete U mit V auf S zu identifizieren, während die Eindeutigkeit und Stetigkeit selbstverständlich ist.

Aus (3) folgt

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + h\frac{\partial V'}{\partial x},$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial y} + h\frac{\partial V'}{\partial y},$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} + h\frac{\partial V'}{\partial z},$$

so dafs aus (2) wird

$$\begin{aligned} W = & \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau \\ & + 2h \int \left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial V'}{\partial z}\right] d\tau \\ & + h^2 \int \left[\left(\frac{\partial V'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V'}{\partial z}\right)^2\right] d\tau. \end{aligned} \tag{4}$$

Soll nun W für $U = 0$ ein Minimum werden, so mufs die Summe der beiden letzten Integrale für beliebige h positiv sein. Da aber für geeignete kleine h das vorletzte Glied negativ und absolut gröfser als das

letzte gemacht werden kann, wenn nicht der Faktor von h verschwindet, so mufs

$$\int \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V'}{\partial z} \right] d\tau = 0 \tag{5}$$

sein. Nach § 43, (10) können wir hierfür setzen

$$-\int V' \frac{\partial V}{\partial n} ds - \int V' \Delta V d\tau = 0$$

oder, weil V' auf der Fläche S verschwindet,

$$\int V' \Delta V d\tau = 0. \tag{6}$$

Falls nun ΔV von Null verschieden wäre, so könnten wir — was freilich auch recht unsicher ist — V' infolge seiner Willkürlichkeit im inneren Raume von S so annehmen, dafs es im ganzen Raume das gleiche Zeichen wie ΔV besäfse, was sich mit (6) nicht verträgt, da sich in diesem Falle die Summanden des Integrals nicht gegenseitig zerstören. Daher bleibt nur die Annahme

$$\Delta V = 0$$

für den ganzen Innenraum von S übrig. Allerdings würde (6) auch bestehen, wenn in einzelnen, höchstens zweidimensionalen Teilen des Raumes die letzte Relation nicht erfüllt würde; allein solche Singularitäten vertragen sich mit der vorausgesetzten Stetigkeit von V nicht.

Hiermit ist der Nachweis der Existenz eines V, welches die geforderten Bedingungen erfüllt, in einer freilich höchst unsicheren Weise erbracht.

3. Wir wollen nun noch darthun, dafs das Potential beliebiger räumlichen Massen, welche *innerhalb* einer geschlossenen Fläche S liegen, ohne dafs der Innenraum durch sie vollständig erfüllt zu sein brauchte, in Bezug auf die *aufserhalb* von S gelegenen Punkte durch das Potential einer Massenbelegung ersetzt werden kann, welche sich auf der Fläche S ausbreitet, und zwar nur auf eine einzige Art.

Von einer Ausschliefsung der unendlich fernen Punkte kann hier abgesehen werden, wenn keine Massen in unendlicher Ferne liegen; das Potential erfüllt von selbst die Bedingung für unendlich ferne Punkte. Wir können demnach die beiden Raumteile, in welche die endliche Fläche S (die auch aus mehreren getrennten Teilen bestehen kann) den Gesamtraum zerlegt, ganz gleichartig behandeln.

Wir sahen im vorigen Paragraphen, dafs irgend ein Potential, dessen Werte für eine Fläche S gegeben sind, für den einen oder andern der beiden Raumteile eindeutig bestimmt ist, wenn nur in demselben $\Delta V = 0$ ist. Rührt das Potential von räumlichen Massen her, so kann diese Be-

dingung nur für einen der beiden Raumteile, möglicherweise auch für keinen zutreffen. Geht dagegen die Attraktion von einer Massenbelegung der Fläche S aus, so ist das entsprechende Flächenpotential V durch seine Werte auf S für den inneren und den äufseren Raum eindeutig bestimmt.

Kennt man nun die Werte des Potentials V von Massen, welche im Innern von S liegen, für die Fläche S, so ist V nach dem Vorhergehenden für den ganzen Aufsenraum bestimmt; dafs wir es nicht allgemein angeben können, ist hier, wo es sich nur um einen Existenzbeweis handelt, irrelevant. Hiernach ist auch $\frac{\partial V}{\partial n_a}$ als bekannt anzunehmen, wo n_a die Richtung der äufseren Normale von S bezeichnet. Nach § 41, (5) ist bei geänderter Bezeichnung

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial n_a} \tag{7}$$

die Dichtigkeit der Masse, welche in jedem Punkte von S aufzutragen ist, um eine Massenverteilung zu erhalten, deren Potential mit dem der inneren Massen für S selbst, also auch im äufseren Raume übereinstimmt (§ 44, 3).

Insbesondere kann man das Potential einer räumlichen Masse auf eine einzige Art für äufsere Punkte durch das Potential einer Belegung ersetzen, welche die Oberfläche dieser Masse bedeckt.

Die wirkliche Ersetzung von Potentialen räumlicher Massen durch Flächenpotentiale und ihre Entwicklung unter der Voraussetzung, dafs ihre Werte auf einer geschlossenen Fläche bekannt sind, ist unter Zugrundelegung eines speziellen Falles die Aufgabe der folgenden Untersuchungen.

§ 46.

Theorie der Kugelfunktionen einer Variabeln*).

1. Jedes Potential kann als eine Summe unendlich vieler, mit einem Faktor multiplizierten Gröfsen

$$\frac{1}{\varrho}$$

angesehen werden, wenn ϱ der Abstand des angezogenen Punktes x, y, z von einem Punkte ξ, η, ζ des anziehenden Körpers ist, also

*) Eine umfassende Behandlung des Gegenstandes nebst Angabe der reichhaltigen Litteratur findet man in Heine, „Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen“, einem Werke, dem wir in einem Teile der Darstellung folgen. Eine Entwicklung aus ganz anderen Gesichtspunkten geben Thomson und Tait in ihrem „Handbuch der theoretischen Physik“, deutsche Übersetzung, B. I, p. 156 ff. — Vgl. ferner Dirichlet-Grube,

$$(1)\qquad \varrho = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta^2)}$$

gesetzt wird. Führen wir Polarkoordinaten durch die Substitution

$$(2)\qquad \begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\varphi, & \xi = r_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1, \\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi, & \eta = r_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1, \\ z = r \cos\vartheta, & \zeta = r_1 \cos\vartheta_1 \end{cases}$$

ein, so wird

$$(3)\qquad \varrho = \sqrt{r^2 - 2rr_1[\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)] + r_1^2}.$$

Nennen wir andrerseits den Winkel, welchen die Radienvektoren r und r_1 miteinander bilden, γ, so haben wir direkt

$$(4)\qquad \varrho = \sqrt{r^2 - 2rr_1\cos\gamma + r_1^2}.$$

Durch Vergleichung von (3) und (4) folgt, was auch durch direkte sphärisch-trigonometrische Betrachtung leicht herzuleiten wäre,

$$(5)\qquad \cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1).$$

Nehmen wir an, dafs $r < r_1$ sei, und setzen

$$(6)\qquad \frac{r}{r_1} = \alpha, \quad \cos\gamma = x,$$

so wird aus (4)

$$(7)\qquad \varrho = r_1\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2},$$

und wir stellen uns die Aufgabe,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha x + \alpha^2}}$$

in eine nach Potenzen von α fortschreitende Reihe zu entwickeln.

Bereits in § 11 hatten wir uns mit der Entwicklung desselben Ausdrucks zu beschäftigen; doch war es uns damals darum zu thun, eine nach $\cos k\gamma$ fortschreitende Reihe zu erhalten, während hier nach Potenzen von α geordnet wird.

2. Nach dem binomischen Satze erhalten wir, wenn α und x beliebige komplexe Gröfsen sind, welche nur der Bedingung*)

Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte; C. Neumann, Über die nach Kreis-, Kugel- und Cylinderfunktionen fortschreitenden Entwickelungen u. s. w. — Die Einführung der Kugelfunktionen verdankt man Legendre und Laplace.

*) Wir bezeichnen, wie in der Funktionentheorie üblich, mit $|a + bi|$ den absoluten Betrag von $a + bi$, also $\sqrt{a^2 + b^2}$. — Die nach Potenzen von α geordnete Reihe (9) konvergiert für $|\alpha| < 1$, falls $x = \cos\gamma$ gesetzt und γ als reell angenommen wird. Nach einem einem funktionaltheoretischen Satze mufs

(8) $$|\,2\alpha x - \alpha^2\,| < 1$$

zu genügen haben — für hinreichend kleine α ist dieselbe immer erfüllt —,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = [1-\alpha(2x-\alpha)]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\alpha(2x-\alpha) + \frac{1.3}{2.4}\alpha^2(2x-\alpha)^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3(2x-\alpha)^3 + \cdots$$

oder, wenn die Klammern gleichfalls nach dem binomischen Satze entwickelt werden,

(9) $$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = P^0(x) + \alpha P^{(1)}(x) + \alpha^2 P^{(2)}(x) + \alpha^3 P^{(3)}(x) + \cdots,$$

worin (wie sich nach einigen Vereinfachungen leicht ergiebt) für $n > 0$

(10) $$P^{(n)}(x) = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n}\Big[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - \cdots\Big],$$

$$P^0(x) = 1$$

ist.

Die ganze Funktion n^{ten} Grades $P^{(n)}(x)$ heifst die n^{te} Kugelfunktion von x (im engeren Sinne).

Es ist

(11) $$P^{(n)}(-x) = (-1)^n P^{(n)}(x),$$

d. h. für gerade n ist $P^{(n)}$ eine gerade, für ungerade eine ungerade Funktion von x. Speziell haben wir

$$P^{(1)}(x) = x,$$
$$P^{(2)}(x) = \frac{3}{2}\Big(x^2 - \frac{1}{3}x\Big),$$
$$P^{(3)}(x) = \frac{5}{2}\Big(x^3 - \frac{3}{5}x\Big),$$
$$P^{(4)}(x) = \frac{35}{8}\Big(x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}\Big)$$

u. s. w.

3. Nimmt man wieder $x = \cos\gamma$, so kann man (10) durch die $\cos k\gamma$ ausdrücken. Zu diesem Zwecke setzt man am einfachsten wie in § 11

---

nämlich die Konvergenz bis zu dem 0 nächstgelegenen Unstetigkeitspunkte von $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$ reichen. Aus $1 - 2\alpha x + \alpha^2 = 0$ folgt aber

$$\alpha = x \pm \sqrt{x^2-1} = \cos\gamma \pm i\sin\gamma,$$

ein Wert, dessen absoluter Betrag 1 ist.

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}}=\frac{1}{\sqrt{(1-\alpha e^{i\gamma})(1-\alpha e^{-i\gamma})}}$$
$$=\left[1+\frac{1}{2}\alpha e^{i\gamma}+\frac{1.3}{2.4}\alpha^2e^{2i\gamma}+\cdots\right]$$
$$\times\left[1+\frac{1}{2}\alpha e^{-i\gamma}+\frac{1.3}{2.4}\alpha^2e^{-2i\gamma}+\cdots\right];$$

multipliziert man aus und führt dann wieder

$$2\cos k\gamma=e^{ki\gamma}+e^{-ki\gamma}$$

ein, so erhält man als Koeffizienten von α^n:

$$P^{(n)}(\cos\gamma)=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{4.6\ldots(2n)}\left[\cos n\gamma\right.\tag{12}$$
$$\left.+\frac{1n}{1(2n-1)}\cos(n-2)\gamma+\frac{1.3n(n-1)}{1.2(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\gamma+\cdots\right].$$

Aus dieser Darstellung läfst sich der wichtige Schlufs ziehen, dafs $P^{(n)}(\cos\gamma)$ für reelle γ innerhalb der Grenzen -1 und $+1$ liegt. Da nämlich in (12) die Koeffizienten sämtlicher Glieder der rechten Seite positiv sind, so nimmt $P^{(n)}(\cos\gamma)$ seinen gröfsten absoluten Wert für $\gamma=0$ an, wodurch sämtliche Kosinus 1 werden. In diesem Falle sind aber die $P^{(n)}$ die Koeffizienten der Entwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha+\alpha^2}}=\frac{1}{1-\alpha}=1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots,$$

d. h. die positive Einheit. Für beliebige reelle Werte von γ wird der absolute Betrag von $P^{(n)}(\cos\gamma)$ nie über 1 steigen können, d. h. $P^{(n)}(\cos\gamma)$ ist auf den Spielraum von -1 bis $+1$ angewiesen.

4. Die Kugelfunktionen lassen sich noch in manche andere Formen setzen, von denen die folgende besonders übersichtlich ist:

$$P^{(n)}(x)=\frac{1}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.\tag{13}$$

Um die Richtigkeit dieser Formel nachzuweisen, entwickeln wir $(x^2-1)^n$ nach dem binomischen Satze:

$$(x^2-1)^n=x^{2n}-\frac{n}{1}x^{2n-2}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{2n-4}-\cdots.$$

Die $n$malige Differentiation dieses Ausdrucks liefert

$$2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)x^n-\frac{n}{1}(2n-2)(2n-3)\ldots(n-1)x^{n-2}$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}(2n-4)(2n-5)\ldots(n-3)x^{n-4}-\cdots.$$

Bemerkt man, dafs

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)}{2.4.6\ldots(2n)}$$
$$=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\ldots3.2.1}{2.4.6\ldots(2n).1.2.3\ldots n}=\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots3.1}{1.2.3\ldots n}$$

u. s. w.

ist, so erkennt man unschwer die Identität von (13) und (10).

5. Es ist allgemein, auch für **komplexe** a und b, $a^2=b^2$ ausgenommen,

$$\int\frac{d\psi}{a-b\cos\psi}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\frac{(a+b)\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{\sqrt{a^2-b^2}},\tag{14}$$

worin rechts die Wurzel beidemale dasselbe Zeichen zu erhalten hat. Hieraus folgt, sobald nicht $a^2=b^2$ oder $\frac{b}{a}$ reell und absolut gröſser als 1 ist*),

$$\int_0^\pi\frac{d\psi}{a-b\cos\psi}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}},\tag{15}$$

wo wir uns die Bestimmung des Vorzeichens der Wurzel für den speziellen Fall vorbehalten. Nehmen wir nun

$$a=1-\alpha x,\quad b=\alpha i\sqrt{1-x^2},$$

so wird aus (15)

$$\frac{\pi}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}=\int_0^\pi\frac{d\psi}{1-\alpha\left[x+i\cos\psi\sqrt{1-x^2}\right]}.\tag{16}$$

Es ist einleuchtend, daſs auf der linken Seite das Vorzeichen so zu bestimmen ist, daſs dieselbe für verschwindende α in π übergeht.

Für hinreichend kleine α kann man rechts nach Potenzen von α entwickeln; man erhält, wenn man links die Entwicklung (9) einsetzt, durch Koeffizientenvergleichung die Laplace'sche Relation

$$P^n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[x+i\cos\psi\sqrt{1-x^2}\right]^n d\psi.\tag{17}$$

Da die linke Seite für reelle x reell ist, müssen sich rechts nach ausgeführter Entwicklung die Glieder mit i zerstören; es ist daher ohne Einfluſs, welches Zeichen $\sqrt{1-x^2}$ beigelegt wird.

Die Gleichung (17) ist deshalb wichtig, weil man sie zu einer Er-

*) Im letzteren Falle wird $\frac{1}{a-b\cos\psi}$ für $\cos\psi=\frac{a}{b}$ unendlich.

weiterung des Begriffes des Kugelfunktionen benutzen kann; sie dient nämlich zur Definition der n^{ten} Kugelfunktion für beliebige gebrochene, negative und komplexe n. Im übrigen kommen diese erweiterten Kugelfunktionen für uns hier nicht in Betracht.

6. Wir beschäftigen uns jetzt mit dem für das Folgende wichtigen Integrale

$$(18) \qquad \int\limits_{-1}^{+1} P^{(n)}(x)\, P^{(m)}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 4 \ldots (2n) \cdot 2 \cdot 4 \ldots (2m)} \int\limits_{-1}^{+1} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \, \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m}\, dx\,.$$

Durch partielle Integration folgt

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \, \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m}\, dx$$

$$= \left[\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} \, \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m} \right]_{-1}^{+1} - \int\limits_{-1}^{+1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)}{dx^{n-1}} \, \frac{d^{m+1}(x^2-1)^m}{dx^{m+1}}\, dx$$

$$= -\int\limits_{-1}^{+1} \frac{d^{n-1}(x^2-1)}{dx^{n-1}} \cdot \frac{d^{m+1}(x^2-1)^m}{dx^{m+1}}\, dx\,.$$

Da nämlich die Gleichung $(x^2 - 1)^n = 0$ die Lösungen $+1$ und -1 $n$fach enthält, so sind dieselben auch noch Lösungen von

$$\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} = 0\,,$$

wodurch das Verschwinden des Klammerinhaltes erklärt wird.

Ist $n \geqq m$, so können wir dieses Verfahren $m$mal anwenden; wir erhalten

$$\int\limits_{-1}^{+1} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} \, \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m} = (-1)^m \int\limits_{-1}^{+1} \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}} \, \frac{d^{2m}(x^2-1)^n}{dx^{2m}}\, dx\,.$$

Nun ist aber $(x^2 - 1)^m$ eine ganze Funktion vom m^{ten} Grade mit dem höchsten Gliede x^{2m}; ihr $2m^{\text{ter}}$ Differentialquotient reduziert sich also auf die Konstante

$$1 \;\; 2 \,.\, 3 \ldots (2m)\,.$$

Daher wird das Integral rechts zu

$$(-1)^m \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (2m) \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}\, dx .$$

Ist $n > m$, so wird

$$(19) \qquad \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}}\, dx = \left[\frac{d^{n-m-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}}\right]_{-1}^{+1} = 0;$$

ist aber $n = m$, so wird derselbe Ausdruck zu

$$\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n\, dx .$$

Nun hat man einerseits durch partielle Integration

$$\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n dx = \Big[x(x^2-1)^n\Big]_{-1}^{+1} - 2n \int_{-1}^{+1} x^2(x^2-1)^{n-1} dx$$

$$= -2n \int_{-1}^{+1} x^2(x^2-1)^{n-1} dx,$$

andrerseits durch Zerlegung

$$\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n dx = \int_{-1}^{+1} x^2(x^2-1)^{n-1} dx - \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{n-1} dx,$$

also durch Elimination von

$$\int_{-1}^{+1} x^2(x^2-1)^{n-1} dx$$

aus beiden Relationen

$$\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n dx = -\frac{2n}{2n+1} \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^{n-1} dx .$$

Durch Wiederholung dieses Verfahrens gelangt man, da

$$\int_{-1}^{+1} (x^2-1)^0 dx = 2$$

ist, zu

$$(20) \qquad \int_{-1}^{+1} (x^2-1)^n dx = (-1)^n \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \ldots (2n)}{3 \,.\, 5 \ldots (2n+1)} \cdot 2 .$$

Wegen

$$(-1)^{n+n} \cdot 2 \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1) \cdot [2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)]^2}$$

$$= 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (2n)}{3 \cdot 5 \ldots (2n+1) \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n)} = \frac{2}{2n+1}$$

erhält man schliefslich für $n \gtrless m$

$$\int_{-1}^{+1} P^{(n)}(x) P^{(m)}(x) dx = 0, \tag{21}$$

dagegen

$$\int_{-1}^{+1} [P^{(n)}(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}. \tag{22}$$

7. Aus (10) geht hervor, dafs sich x^{2n} als lineare, ganze Funktion von

$$P^{(2)}(x),\ P^{(4)}(x), \ldots P^{(2n)}(x),$$

dagegen x^{2n+1} als ebensolche Funktion von

$$P^{(1)}(x),\ P^{(3)}(x), \ldots P^{(2n+1)}(x)$$

darstellen läfst. Um das erstere auszuführen, braucht man nur zuerst x^2 durch $P^{(2)}(x)$, dann x^4 durch $P^{(4)}(x)$ und $P^{(2)}(x)$ u. s. w. der Reihe nach darzustellen, und analog verfährt man im andern Falle.

In dieser Weise läfst sich jede ganze Funktion n^{ten} Grades von x als lineare Funktion von

$$P^{(1)}(x),\ P^{(2)}(x), \ldots P^{(n)}(x)$$

darstellen. Auch bei einer Potenzreihe von x kann man in ähnlicher Weise verfahren und so eine Funktion $f(x)$, welche sich in der Umgebung des Nullpunktes in eine Potenzreihe nach x entwickeln läfst, in die Form

$$f(x) = a_0 P^{(0)}(x) + a_1 P^{(1)}(x) + a_2 P^{(2)}(x) + \cdots \tag{23}$$

u. s. w. setzen; doch ist die Konvergenz dieser Reihe hiermit nicht aufser Frage gestellt.

Wissen wir aber von einer Funktion $f(x)$, dafs sie in eine für $|x| \leqq 1$ konvergente, nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe (23) entwickelt werden kann, so lassen sich die Koeffizienten a_n derselben leicht durch bestimmte Integrale darstellen.

Multiplizieren wir nämlich (23) mit $P^{(n)}(x)$ und integrieren nach x von -1 bis $+1$, so erhalten wir nach (21) und (22)

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P^{(n)}(x) dx. \tag{24}$$

Aus der Herleitung von a_n geht hervor, dafs $f(x)$ nur auf *eine* Art nach Kugelfunktionen entwickelt werden kann.

8. Wie schon früher bewiesen, genügt $V = \frac{1}{\varrho}$, genommen in dem Sinne von (1), der Differentialgleichung (vgl. § 40)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{25}$$

oder, wenn mittels (2) Polarkoordinaten eingeführt werden (§ 40, (10)),

$$r\frac{\partial^2 (rV)}{\partial r^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial V}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{26}$$

Nun haben wir, wenn $r < r_1$ ist, nach (9), (7) und (6)

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r_1}P^{(0)}(\cos\gamma) + \frac{r}{r_1^2}P^{(1)}(\cos\gamma) + \frac{r^2}{r_1^3}P^{(2)}(\cos\gamma) + \cdots, \tag{27}$$

eine Reihe, welche für die gegebene Bedingung $r < r_1$ sicher konvergiert (s. 2., Anm.). Für $\cos\gamma$ denken wir uns dann wieder mittels (5) die Koordinaten ϑ und φ nebst den hier als konstant anzusehenden Gröfsen ϑ_1 und φ_1 eingeführt.

Da $\frac{1}{\varrho}$ der Gleichung (26) für beliebige r Genüge leistet, so mufs dies mit den einzelnen Gliedern von (27) der Fall sein. Läfst man nämlich r gegen die Null abnehmen, so wird jedes Glied verschwindend klein gegen das vorhergehende; man schliefst daher der Reihe nach, dafs das erste, zweite, dritte u. s. w. Glied einzeln die Gleichung (26) befriedigen mufs. Nehmen wir daher

$$V = r^n P^{(n)}(\cos\gamma),$$

so folgt aus (26) unter Berücksichtigung, dafs $P^{(n)}$ von r unabhängig ist, für die n^{te} Kugelfunktion die wichtige partielle Differentialgleichung

$$n(n+1)P^{(n)} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial P^{(n)}}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 P^{(n)}}{\partial\varphi^2} = 0. \tag{28}$$

Ist $r > r_1$, so geht (27) über in

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r}P^{(0)}(\cos\gamma) + \frac{r_1}{r^2}P^{(1)}(\cos\gamma) + \frac{r_1^2}{r^3}P^{(2)}(\cos\gamma) + \cdots; \tag{28a}$$

setzt man nun

$$V = \frac{P^{(n)}}{r^{n+1}},$$

so gelangt man wieder zu der Gleichung (28). Zugleich halten wir als wesentliches Resultat fest, dafs

$$r^n P^{(n)} \quad \text{und} \quad \frac{P^{(n)}}{r^{n+1}}$$

der Differentialgleichung (26) oder (25) genügen.

9. Wir nehmen nun an, daſs wir irgend eine Funktion $f(\cos\gamma)$ für alle reellen γ nach Kugelfunktionen entwickelt haben:

$$f(\cos\gamma) = a_0 P^{(0)}(\cos\gamma) + a_1 P^{(1)}(\cos\gamma) + \cdots; \tag{29}$$

aus dem letzten Resultate folgt dann, daſs nach Ersetzung von $\cos\gamma$ durch (5) die beiden Reihen, für $r < 1$

$$W = a_0 P^{(0)} + a_1 r P^{(1)} + a_2 r^2 P^{(2)} + \cdots, \tag{30}$$

für $r > 1$

$$W' = \frac{a_0 P^{(0)}}{r} + \frac{a_1 P^{(1)}}{r^2} + \frac{a_2 P^{(2)}}{r^3} + \cdots \tag{31}$$

der Gleichung (25) Genüge leisten, da es ihre einzelnen Glieder thun. Die Konvergenz dieser Reihen kann als selbstverständlich betrachtet werden, wenn (29) convergiert; denn wenn eine Potenzreihe nach der positiven Gröſse r für $r = 1$ konvergiert, so konvergiert sie auch für $r < 1$.

Auf diesem Resultate beruht die Wichtigkeit der Kugelfunktionen für mechanische Probleme. Wir sahen bereits früher, daſs ein Potential V eindeutig bestimmt ist, wenn seine Werte V_0 für die Punkte einer geschlossenen Fläche und die Befriedigung der Gleichung (25) innerhalb eines gewissen Raumes vorgeschrieben sind. Sei nun die geschlossene Fläche die Oberfläche einer Kugel mit dem Radius 1; der Mittelpunkt sei der Nullpunkt des Koordinatensystems, während r, ϑ und φ als Polarkoordinaten benutzt werden. Die Punkte der Kugelfläche sind dann durch die verschiedenen Werte von ϑ und φ vollkommen bestimmt.

Wir wollen ferner annehmen, daſs das Potential V für alle Punkte der Kugelfläche, welche von einem bestimmten ϑ_1, φ_1 die gleiche sphärische Entfernung γ haben, denselben Wert besitzt. Dann ist, wie aus Vergleich mit dem Früheren hervorgeht, γ durch (5) bestimmt. Falls sich nun V_0 für die Kugeloberfläche nach (29) in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende, konvergierende Reihe entwickeln läſst, so ist der allgemeine Wert von V für einen beliebigen Punkt des Raumes, innerhalb dessen (25) gilt, durch die Reihen von (30) oder (31) gegeben, je nachdem der Punkt innerhalb oder auſserhalb der Kugel liegt; denn diese Ausdrücke gehen für $r = 1$ in (29) über und genügen (25), während auſserdem die zweite Reihe für $r = \infty$ derart verschwindet, daſs rW' endlich bleibt.

Die Kugelfunktionen dienen also dazu, ein Potential allgemein darzustellen, wenn seine Werte auf einer Kugelfläche bekannt sind, freilich unter der sehr beschränkenden Voraussetzung, daſs das Potential auf der Kugelfläche für alle Punkte gleich ist, welche von einem festen Punkte gleichen sphärischen Abstand haben (also auf der Erdoberfläche etwa die Orte gleicher Breite).

Durch eine Erweiterung der Untersuchung kann man sich von dieser Bedingung unabhängig machen und Entwicklungen für ein Potential

aufstellen, dessen sich stetig aneinander schliefsende Werte für die Punkte einer Kugelfläche beliebig gegeben sind.

Die Bedeutung des Wortes „Kugelfunktion" bedarf übrigens nach dem Gefundenen keiner weiteren Erklärung mehr.

Die Frage, wann (29) konvergiert, soll hier nicht erledigt werden; wir kommen jedoch auf den Gegenstand in § 47 zurück.

§ 47.

Die Kugelfunktionen zweier Variabeln.

1. Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

kann ohne Schwierigkeit direkt integriert werden. Denken wir uns*) zunächst V als Funktion lediglich von x und y, so dafs (1) in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

übergeht, so können wir analog wie bei einer etwas allgemeineren Gleichung, die wir später zu behandeln haben werden,

$$V = \varphi(x + ay)$$

setzen. Die Allgemeinheit wird nicht dadurch beeinträchtigt, dafs man x den Koeffizienten 1 erteilt, da φ eine ganz willkürliche Funktion ist, in die man den einen Koeffizienten eingehen lassen kann. Substituieren wir diesen Ausdruck für V in (2), so erhalten wir

$$\varphi'' + a^2\varphi'' = 0$$

oder

$$a^2 = -1,$$

also

$$a = \pm i.$$

Da ferner die Summe zweier Lösungen von (2) offenbar wieder eine Lösung ist, so finden wir die allgemeine**) Lösung von (2) in der Form

$$V = \varphi_1(x + iy) + \varphi_2(x - iy); \tag{3}$$

dieselbe enthält zwei willkürliche Funktionen.

Will man nur reelle Lösungen von (2) haben, so kann man für φ_1 und φ_2 dieselbe reelle Funktion φ nehmen; aus

---

*) Wir werden in § 48 diese Annahme in einem bestimmten Falle verwirklicht finden.

**) Eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung kann ein allgemeines Integral besitzen, welches zwei willkürliche Funktionen der unabhängigen Variabeln in sich schliefst. Doch werden wir sogleich ein Beispiel kennen lernen, wo — bei drei unabhängigen Variabeln — das allgemeine Integral unendlich viele willkürliche Funktionen enthält. Es ist nicht unsere Absicht, diesen Gegenstand hier weiter zu verfolgen.

$$V = \varphi(x + iy) + \varphi(x - iy) \tag{4}$$

hebt sich alsdann alles Imaginäre heraus. Auch

$$V = \frac{1}{i}\left[\varphi(x + iy) - \varphi(x - iy)\right] \tag{5}$$

liefert eine reelle Lösung der Differentialgleichung.

Aus den Elementen der Funktionentheorie ist bekannt, dafs der reelle und der imaginäre Teil einer analytischen Funktion einer Variabeln $z = x + iy$ der Gleichung (2) Genüge leisten. In (4) und (5) finden wir dieses Resultat, wenn auch etwas eingeschränkt, wieder. (4) stellt nämlich den reellen, (5) den durch i dividierten rein imaginären Teil der Funktion $\varphi(x + iy)$ dar. Wir werden auf diese bemerkenswerte Beziehung zwischen Potentiallehre und Funktionentheorie in der Hydromechanik zurückkommen, wo sie uns wichtige Dienste leisten wird.

2. Die allgemeine Gleichung (1) läfst sich ganz analog behandeln. Wir setzen

$$V = \varphi(ax + by + z)$$

und finden durch Einführung in (1) nach Wegheben des Faktors φ'' die Beziehung

$$a^2 + b^2 + 1 = 0.$$

Setzen wir

$$a = c\cos\alpha, \quad b = c\sin\alpha,$$

worin α für reelle a^2 und b^2 reell ist, so wird daraus

$$c^2 + 1 = 0,$$

also

$$c = \pm i.$$

Bilden wir wieder eine Summe von Lösungen der Gleichung (1), so ist dieselbe ebenfalls eine Lösung; daher erhalten wir

$$V = \sum^k \varphi_k[z + i(x\cos\alpha_k + y\sin\alpha_k)]. \tag{6}$$

Hierin sind die φ_k, deren Zahl unbeschränkt ist, ganz willkürliche Funktionen, während für α_k verschiedene Winkelwerte zu nehmen sind. Den zweiten Wert $c = -i$ brauchen wir wegen der Willkürlichkeit von α_k nicht zu berücksichtigen.

Will man reelle Lösungen von (1), so braucht man nur für reelle φ_k

$$V = \sum^k \{\varphi_k[z + i(x\cos\alpha_k + y\sin\alpha_k)] + \varphi_k[z - i(x\cos\alpha_k + y\sin\alpha_k)]\} \tag{7}$$

zu bilden.

3. Führen wir Polarkoordinaten durch die Gleichungen

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\varphi, \quad z = r\cos\vartheta \tag{8}$$

ein, so wird aus (6)

$$(9) \qquad V = \sum^k \varphi_k[r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos(\varphi - \alpha_k))].$$

Dieser Ausdruck soll die Grundlage der Theorie der allgemeineren Kugelfunktionen bilden.

4. Ist V das Potential von Massen, welche aufserhalb der Kugel liegen, die mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschrieben ist — bei der Willkürlichkeit des Nullpunktes und der Mafseinheit kann diese Kugel natürlich mit jeder beliebigen identifiziert werden —, so wird V innerhalb der Kugel eine durchaus stetige, als analytisch anzusehende Funktion von r sein, sich also in eine Reihe nach steigenden Potenzen von r entwickeln lassen, die von $r = 0$ bis $r = 1$ konvergiert. Es folgt dies aus einem elementaren funktionaltheoretischen Satze*).

Rührt V von Massen her, die innerhalb derselben Kugel liegen, so mufs sich V in eine für alle $r > 1$ konvergente Potenzreihe nach $\frac{1}{r}$ entwickeln lassen. Ist V das Potential von Massen, welche auf der Oberfläche der Kugel ausgebreitet sind, so gelten beide Entwicklungen und gehen für $r = 1$ ineinander über.

Wendet man dies auf ein Potential an, welches sich in der Form (9) darstellt, so erhält man die Entwicklungen

$$(10) \qquad V = \sum_0^{\infty} {}^n a_n r^n \sum^k b_k[\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos(\varphi - \alpha_k)]^n$$

und

$$(11) \qquad V = \sum_0^{\infty} {}^n a_{-n} r^{-n} \sum^k b_k[\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos(\varphi - \alpha_k)]^{-n},$$

worin die a_n konstante Koeffizienten bedeuten.

5. Wie in § 46, 8 schliefsen wir, dafs die einzelnen Glieder dieser Reihe die mit (1) äquivalente partielle Differentialgleichung (26) von § 46 befriedigen müssen. Hieraus folgt genau wie an der angeführten Stelle, dafs der Ausdruck

$$(12) \qquad X_n = \sum^k b_k[\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos(\varphi - \alpha_k)]^n$$

der Differentialgleichung

$$(13) \qquad n(n+1)X_n + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial X_n}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 X_n}{\partial\varphi^2} = 0$$

Genüge leistet.

Aus den weiteren Untersuchungen an der angeführten Stelle ist ferner ersichtlich, dafs (13) auch für negative n gilt; man vergleiche nur die

*) Siehe hierüber des Verfassers „Lehrbuch der Theorie der periodischen Funktionen", pag. 97.

an § 46, (28) angeknüpften Folgerungen unter Beachtung, dafs hier X_{-n-1} an Stelle von $P^{(n)}$ tritt und dafs

$$n(n+1) = (-n-1)(-n-1+1)$$

ist.

Da also die X_n dieselbe partielle Differentialgleichung wie die $P^{(n)}$ befriedigen, so bezeichnen wir sie als allgemeine Kugelfunktionen*).

Unsere weiteren Untersuchungen knüpfen an die Reihe (10) an. Es wird sich zunächst darum handeln, einen Ausdruck

$$[\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos(\varphi - \alpha_k)]^n$$

nach den Gröfsen $\cos m(\varphi - \alpha_k)$ zu entwickeln. Wir setzen

$$\cos\vartheta = x, \quad \varphi - \alpha_k = \psi,$$

so dafs der untersuchte Ausdruck in**)

$$(14) \qquad [x + i\cos\psi\sqrt{1-x^2}]^n$$

übergeht. Durch Ausführung dieses Ausdrucks gelangen wir zu den sogenannten abgeleiteten oder zugeordneten Kugelfunktionen, welche als Koeffizienten auftreten.

6. Die verlangte Entwicklung könnte mittels Benutzung des binomischen Satzes und nachheriger Ersetzung von $\cos^m\psi$ durch die Kosinus der Vielfachen von ψ geschehen; doch gelangen wir auf folgende Weise zu einem übersichtlicheren Resultate.

Nach Heine setzen wir

$$(15) \qquad z = ie^{i\psi}\sqrt{1-x^2},$$

also

$$e^{i\psi} = -\frac{iz}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \cos\psi = \frac{1}{2}(e^{i\psi} + e^{-i\psi}) = \frac{i(1-x^2-z^2)}{2z\sqrt{1-x^2}}$$

und daher

$$(16) \qquad x + i\cos\psi\sqrt{1-x^2} = \frac{(x+z)^2-1}{2z}.$$

Wir entwickeln nun

$$f(x+z) = [(x+z)^2 - 1]^n$$

gemäfs dem Taylor'schen Satze nach Potenzen von z, beachtend, dafs

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

ist und dafs wir mithin, anstatt nach z zu differentiieren und dann $z = 0$

---

*) Der Zusammenhang der Kugelfunktion einer Variabeln mit den allgemeineren geht aus § 46, (17) besonders deutlich hervor. $P^{(n)}(\cos\vartheta)$ ist als der Mittelwert von $[\cos\vartheta + i\sin\vartheta\cos\psi]^n$ für alle möglichen ψ anzusehen.

**) Es ist für die Folge immer festzuhalten, dafs $\sqrt{1-x^2} = \sin\vartheta$, $\sqrt{x^2-1} = i\sin\vartheta$ ist, so dafs über das Zeichen der Wurzel kein Zweifel entsteht.

zu setzen, auch von vornherein $z = 0$ setzen und dann nach x differentiieren dürfen. Es wird hiernach

$$(17)\quad [(x+z)^2-1]^n = (x^2-1)^n + \frac{z}{1}\frac{\partial (x^2-1)^n}{\partial x} + \frac{z^2}{1.2}\frac{\partial^2 (x^2-1)^n}{\partial x^2} + \cdots + \frac{z^{2n}}{1.2\ldots.(2n)}\frac{\partial^{2n}(x^2-1)^n}{\partial x^{2n}}.$$

Diesen Ausdruck führen wir mittels (16) in (14) ein und geben dann z wieder seinen durch (15) dargestellten Wert. Da die Entwicklung nur Glieder mit $\cos k\psi$, keine mit $\sin k\psi$ enthält, so müssen die Koeffizienten von $e^{ik\psi}$ und $e^{-ik\psi}$ gleich werden, was eine interessante Identität liefert. Wir erhalten schliefslich die Entwicklunng

$$(18)\quad \left[x + i\cos\psi\sqrt{1-x^2}\right]^n = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{0}^{n}{}_r' \frac{(x^2-1)^{\frac{r}{2}}}{(n+r)!}\frac{d^{n+r}(x^2-1)^n}{dx^{n+r}}\cos r\psi^{*)}$$

oder, wenn wir durch die Gleichung

$$(19)\quad P_r^{(n)}(x) = \frac{(n-r)!}{(2n)!}(x^2-1)^{\frac{r}{2}}\frac{d^{n+r}(x^2-1)^n}{dx^{n+r}},\quad r \leqq n,$$

die abgeleiteten oder zugeordneten Kugelfunktionen definieren,

$$(20)\quad \left[x + i\cos\psi\sqrt{1-x^2}\right]^n = \frac{(2n)!}{2n-1}\sum_{0}^{n}{}_r' \frac{P_r^{(n)}(x)}{(n+r)!(n-r)!}\cos r\psi.$$

Mit Berücksichtigung von (13) können wir statt (19) auch schreiben

$$(21)\quad P_r^{(n)}(x) = \frac{(n-r)!}{1.3.5\ldots(2n-1)}(x^2-1)^{\frac{r}{2}}\frac{d^r P^{(n)}(x)}{dx^r}.$$

Ehe wir die allgemeinere Untersuchung fortsetzen, wollen wir zunächst die früheren Kugelfunktionen einer Variabeln nach den Gröfsen $\cos m(\varphi - \varphi_1)$ entwickeln, wobei die neu eingeführten abgeleiteten Funktionen eine wesentliche Rolle spielen.

7. Der Ausdruck

$$P^{(n)}(z) = P^{(n)}[\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi-\varphi_1)]$$

kann als Funktion von $\cos(\varphi - \varphi_1)$ betrachtet und nach Potenzen dieser Gröfse entwickelt werden, und diese Potenzen lassen sich dann durch die Gröfsen $\cos k(\varphi - \varphi_1)$ ausdrücken. Da $P^{(n)}(x)$ in x vom n^{ten} Grade ist, steigt die Entwicklung bis zu einem Gliede mit $\cos n(\varphi - \varphi_1)$.

Um die fertige Form dieser Reihe herzuleiten, gehen wir von einer Erweiterung des Integrales (14) von § 46 aus. Es ist

---

*) Das Summationszeichen Σ' drückt aus, dafs der Koeffizient, welcher $r = 0$ entspricht, durch 2 zu dividieren ist.

$$(22)\quad \int \frac{d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}=\frac{2}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}\operatorname{arctg}\frac{C+(A-B)\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}},$$

also

$$(23)\quad \int_0^\pi \frac{d\psi}{A+B\cos\psi+C\sin\psi}=\frac{\pi}{\sqrt{A^2-B^2-C^2}}.$$

Setzen wir nun

$$\cos\vartheta=x,\quad \cos\vartheta_1=x_1,$$

also

$$(24)\quad z=xx_1+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_1^2}\cos(\varphi-\varphi_1),$$

so haben wir die Identität

$$(x-\alpha x_1)^2+\left[\sqrt{1-x^2}\cos\varphi-\alpha\sqrt{1-x_1^2}\cos\varphi_1\right]^2$$
$$+\left[\sqrt{1-x^2}\sin\varphi-\alpha\sqrt{1-x_1^2}\sin\varphi_1\right]^2=1-2\alpha z+\alpha^2.$$

Nehmen wir

$$A=x-\alpha x_1,\quad B=i\left[\sqrt{1-x^2}\cos\varphi-\alpha\sqrt{1-x_1^2}\cos\varphi_1\right],$$
$$C=i\left[\sqrt{1-x^2}\sin\varphi-\alpha\sqrt{1-x_1^2}\sin\varphi_1\right],$$

so folgt aus (23)

$$(25)\quad \frac{1}{\sqrt{1-2\alpha z+\alpha^2}}=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{d\psi}{x+i\sqrt{1-x^2}\cos(\varphi-\psi)-\alpha[x_1+i\sqrt{1-x_1^2}\cos(\varphi_1-\psi)]}.$$

Beide Seiten dieser Gleichung können wir bei hinreichend kleinem α nach Potenzen dieser Gröfse entwickeln; die Koeffizientenvergleichung liefert

$$(26)\quad P^{(n)}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{[x_1+i\sqrt{1-x_1^2}\cos(\varphi_1-\psi)]^n}{[x+i\sqrt{1-x^2}\cos(\varphi-\psi)]^{n+1}}\,d\psi.$$

Den Zähler des Bruches unter dem Integralzeichen können wir nach (20) in eine Reihe

$$(27)\quad [x_1+i\sqrt{1-x_1^2}\cos(\varphi_1-\psi)]^n=\frac{(2n)!}{2^{n-1}}\sum_0^n{}_r'\frac{P_r^{(n)}(x_1)}{(n+r)!\,(n-r)!}\cos r(\varphi_1-\psi)$$

entwickeln. Die Entwicklung von

$$\frac{1}{[x+i\sqrt{1-x^2}\cos(\varphi-\psi)]^{n+1}}$$

mag die Form*)

*) Die Entwicklung gilt allerdings nur für $\sqrt{1-x^2}<|x|$ oder $x^2>\frac{1}{2}$; allein infolge der sich ergebenden Symmetrie von (26) in x und x_1 können die weiteren Resultate unmittelbar auf beliebige x übertragen werden.

$$\sum_{r'} c_{r'} \cos r'(\varphi_1 - \psi)$$

annehmen, worin die $c_{r'}$ von x abhängig sind. Nun ist aber

$$\int_0^\pi \cos r(\varphi_1 - \psi) \cos r'(\varphi - \psi) d\psi$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos [r\varphi_1 + r'\varphi - (r + r')\psi] + \cos [r\varphi_1 - r'\varphi - (r - r')\psi] d\psi,$$

und die Ausführung der Integration nebst Einsetzung der Grenzwerte liefert den Wert Null, wenn nicht $r = r'$ ist. In diesem letzteren Falle wird der zweite Kosinus von ψ unabhängig und das Integral geht in

$$\frac{\pi}{2} \cos (\varphi_1 - \varphi)$$

über.

Da ferner $P^{(n)}(z)$ in x, φ und x_1, φ_1 symmetrisch ist, so folgt nach dem Gefundenen aus (26)

$$(28) \qquad P^{(n)}(z) = \sum_0^n{}_r' \, a_r^{(n)} P_r^{(n)}(x) P_r^{(n)}(x_1) \cos r(\varphi_1 - \varphi),$$

worin die $a_r^{(n)}$ noch zu bestimmende Konstanten bezeichnen.

Dividiert man (19), worin x_1 statt x geschrieben wird, durch x_1^n und setzt dann $x_1 = \infty$, so wird daraus, weil von den Potenzen der Binome immer nur das höchste Glied in Betracht kommt*),

$$(28\text{a}) \left[\frac{P_r^{(n)}(x_1)}{x_1^n}\right]_{x=\infty} = (-1)^r \frac{(n-r)!\,2n(2n-1)\ldots.(n-r+1)}{(2n)!} = (-1)^r.$$

Durch dasselbe Verfahren geht $P^{(n)}(z)$, worin z durch (24) dargestellt ist, mit Zuhilfenahme von § 46, (10) in*)

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} [x + i\sqrt{1 - x^2} \cos (\varphi_1 - \varphi)]^n$$

über, wofür nach (27)

$$(28\text{b}) \; [P^{(n)}(z)]_{x_1=\infty} = 2[1.3.5\ldots(2n-1)]^2 \sum_0^n{}_r' \frac{P_r^{(n)}(x)}{(n+r)!(n-r)!} \cos r(\varphi_1 - \varphi)$$

gesetzt werden kann.

---

*) Da

$$\cos \vartheta_1 = \frac{e^{i\vartheta_1} + e^{-i\vartheta_1}}{2}, \quad \sin \vartheta_1 = \frac{e^{i\vartheta_1} - e^{-i\vartheta_1}}{2i}$$

ist, so wird $x_1 = \cos \vartheta_1$ unendlich, wenn $\vartheta_1 = \pm i\infty$ genommen wird; dann ist aber $\sin \vartheta_1 = \pm i\infty$. Wir benutzen hier und in der Folge das untere Zeichen.

Dividiert man (28) durch x_1^n, setzt dann $x_1 = \infty$ und benutzt die Resultate (28a) und (28b), so erhält man durch Koeffizientenvergleichung

$$a_r^{(n)} = (-1)^r \cdot 2 \frac{[1 \cdot 3 \ldots (2n-1)]^2}{(n+r)!(n-r)!}.$$

Wir haben hierdurch die merkwürdige Reihenentwicklung

$$(29) \qquad P^{(n)}\left[xx_1 + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x_1^2}\cos(\varphi_1 - \varphi)\right]$$
$$= 2[1 \cdot 3 \ldots (2n-1)]^2 \sum_0^n{}' r (-1)^r \frac{P_r^{(n)}(x) P_r^{(n)}(x_1)}{(n+r)!(n-r)!} \cos r(\varphi_1 - \varphi).$$

Dieselbe wurde von Heine als das Additionstheorem der Kugelfunktionen bezeichnet; sie wurde zuerst von Laplace aufgestellt.

8. Wir kehren jetzt zu unserer Hauptuntersuchung, der Entwicklung von (9) in die Reihe (10) und dieser nach den Kosinus der Vielfachen von $\varphi - \alpha_k$ zurück. Anscheinend ist nach Ausführung dieser Entwicklung, d. h. nach Einsetzung der Reihen (18) in (10), jedes Glied mit beliebig vielen Konstanten behaftet; allein wir werden sofort sehen, dafs eine Fortsetzung der Entwicklung eine wesentliche Reduktion dieser Konstanten liefert.

Bezeichnet $f_r(\vartheta)$ eine Funktion, deren Bedeutung aus (18) erhellt (worin wieder $x = \cos\vartheta$ gesetzt wird), so ist nach (12) und (18)

$$(30) \qquad X_n = \sum^k b_k \sum_0^n{}' r f_r(\vartheta) \cos r(\varphi - \alpha_k),$$

wobei zu bemerken, dafs $f_r(\vartheta)$ für alle k das gleiche bleibt. Setzt man daher

$$\cos r(\varphi - \alpha_k) = \cos r\varphi \cos r\alpha_k + \sin r\varphi \sin r\alpha_k,$$

so reduziert sich (30) auf die Form

$$(31) \qquad X_n = \sum_0^n{}^r A_r f_r(\vartheta) \cos r\varphi + \sum_0^n{}^r B_r f_r(\vartheta) \sin r\varphi,$$

wo die $\cos r\alpha_k$ und $\sin r\alpha_k$ bereits in die Konstanten aufgenommen sind.

Die allgemeine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung enthält daher nur $(2n+1)$ voneinander unabhängige Konstanten.

9. Es sei nun V eine ganz beliebige Funktion von x, y, z, welche der Gleichung (1) innerhalb einer Kugel mit dem Radius 1 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt Genüge leistet, ohne dafs vorausgesetzt würde, dafs ihr die Form (6) zukommt, deren Allgemeinheit wir ja nicht erwiesen haben. Wir wollen weiter annehmen, dafs sich diese Funktion innerhalb der Kugel nach Potenzen von x, y, z entwickeln läfst*). Aus

*) Ist V ein Potential, so dürfen wir dies wegen seiner Stetigkeit wohl annehmen, wenn auch kein strenger Beweis der Entwickelbarkeit erbracht ist.

den Gliedern n^{ter} Ordnung kann dann nach (8) der Faktor r^n herausgesetzt werden, während eine Funktion von ϑ und φ in die Klammer tritt; wir erhalten so eine nach Potenzen von r fortschreitende Entwicklung. Die Glieder n^{ter} Ordnung bilden zusammen eine homogene ganze Funktion n^{ter} Ordnung der drei Variabeln x, y, z. Die Gliederzahl dieser homogenen Funktion ist gleich derjenigen einer nicht homogenen Funktion n^{ter} Ordnung von zwei Variabeln. Da letztere ein Glied nullter Ordnung, zwei Glieder erster Ordnung, drei Glieder zweiter Ordnung u. s. w., endlich $n+1$ Glieder n^{ter} Ordnung enthält, so beträgt die Gliederzahl

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dies ist also auch die Zahl der willkürlichen Konstanten, welche in der allgemeinsten homogenen Funktion $F_n(x, y, z)$ n^{ter} Ordnung von x, y, z auftreten.

Bildet man nun die Gleichung

$$\frac{\partial^2 F_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F_n}{\partial z^2} = 0,$$

so ist die linke Seite offenbar eine homogene, ganze Funktion $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Soll F_n diese Gleichung identisch befriedigen, so müssen die Koeffizienten ihrer einzelnen Glieder der Null gleich sein. Die Zahl dieser Koeffizienten ist aber

$$\frac{(n-1)n}{2},$$

und so viele Bedingungsgleichungen erhalten wir für die Koeffizienten von F_n. Demnach bleiben noch

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = 2n + 1$$

Koeffizienten von F_n willkürlich.

Die allgemeinste homogene, ganze Funktion n^{ter} Ordnung von x, y, z, welche die Gleichung (1) befriedigt, enthält also $(2n+1)$ willkürliche Konstanten.

Da nun die allgemeine n^{te} Kugelfunktion, multipliziert mit r^n, alle diese Eigenschaften zeigt*), so kann man sagen, dafs sie die allgemeinste homogene ganze Funktion n^{ter} Ordnung ist, welche der Gleichung (1) Genüge leistet.

Hierdurch gewinnen wir die Überzeugung, dafs uns unser Verfahren die vollständigste, für uns in Betracht kommende Lösung von (1) liefert.

10. Wir hielten uns bisher nur an die Entwicklung der Reihe (10), während wir diejenige von (11) noch bei Seite liefsen. Nunmehr ist leicht zu erkennen, dafs mit der Reihenentwicklung von (10) diejenige von (11) gegeben ist. Aus (13) geht hervor, dafs X_n und X_{-n-1} der-

---

*) Dafs dieser Ausdruck eine homogene Funktion n^{ter} Ordnung von x, y, z ist, zeigt der Vergleich von (7) und (9).

selben Differentialgleichung genügen. Setzt man daher in (11) n an Stelle von $-(n+1)$, so konvergiert die neue Reihe für $r \leq 1$ und ihre Koeffizienten zeigen dieselben Eigenschaften wie diejenigen von (10); man erhält also eine Entwicklung von der gleichen Art wie bei (10), in die man dann wieder $-(n+1)$ an Stelle von n einzufügen hat.

Das Gesammtresultat lautet:

Wenn eine Funktion V, welche das Potential irgend welcher Massen darstellt, die ganz innerhalb oder aufserhalb einer Kugel mit dem Radius 1 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt liegen, oder auf der Kugelfläche selbst ausgebreitet sind, so läfst sich die Funktion V für $r = 1$ als eine Reihe allgemeiner Kugelfunktionen darstellen, wofür hier der Beweis nicht erbracht werden soll; multipliziert man im ersten Falle jeweilig das n^{te} Glied mit r^{-n-1}, im zweiten mit r^n, im dritten mit einer dieser beiden Gröfsen, so hat man Reihen, welche V aufserhalb oder innerhalb der Kugel oder in beiden Räumen darstellen.

Die n^{te} allgemeine Kugelfunktion enthält $2n+1$ willkürliche Konstanten, welche den Oberflächenbedingungen entsprechend zu bestimmen sind.

11. Eine der Hauptfragen ist nun die: läfst sich jede Funktion von ϑ und φ, $f(\vartheta, \varphi)$, nach Kugelfunktionen entwickeln, so dafs es also möglich ist, ein Potential aufzustellen, welches für die Kugeloberfläche in $f(\vartheta, \varphi)$ übergeht? Gewisse Bedingungen, welchen $f(\vartheta, \varphi)$ zu unterwerfen ist, liegen auf der Hand. Da jedem Punkte der Kugelfläche nur ein $f(\vartheta, \varphi)$ entsprechen soll, so müssen ϑ und φ in f nur als periodische Funktionen auftreten; denn andernfalls würden den Argumenten $\vartheta + 2k\pi$, $\varphi + 2k_1\pi$ für verschiedene k und k_1 verschiedene Funktionalwerte entsprechen, während sie doch demselben Punkte zugehören.

Auch bei der Vertauschung von ϑ und φ mit $-\vartheta$ und $\varphi + \pi$ darf keine Änderung eintreten; für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ (Nordpol und Südpol, wenn ϑ und φ als geographische Polardistanz und Länge interpretiert werden) mufs die Funktion von φ unabhängig sein.

Dirichlet bemühte sich nun darzuthun, dafs jede Funktion der beschriebenen Art, welche aufserdem in keinem Punkte unendlich wird und nicht unendlich viele Maxima und Minima besitzt, stets in eine nach allgemeinen Kugelfunktionen fortschreitende, konvergente Reihe entwickelbar ist. Wir glauben auf eine Reproduktion dieses Beweises, dem immerhin noch manche Unsicherheiten anhaften, verzichten zu dürfen.

Der Dirichlet'sche Beweis findet sich in der Abhandlung: Sur les séries dont le terme général dépend des deux angles, et qui servent à exprimer des fonctions arbitraires entre des limites données, Crelle, B. 17; ferner in den „Vorlesungen über die im umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung wirkenden Kräfte" von S. G. Lejeune-Dirichlet, herausgegeben von Grube, p. 165 ff.

Fassen wir die Resultate der letzten Nummer zusammen, so wird

$$f(\vartheta, \varphi) = X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \cdots \tag{32}$$

zu setzen sein, wo sich X_n weiter in der Form*)

$$\begin{aligned} X_n = a_0 P_0^{(n)}(\cos\vartheta) &+ [a_1 \cos\varphi + b_1 \sin\varphi]\, P_1^{(n)}(\cos\vartheta) \\ &+ [a_2 \cos 2\varphi + b_2 \sin 2\varphi]\, P_2^{(n)}(\cos\vartheta) \\ &+ \cdots + [a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi]\, P_n^{(n)}(\cos\vartheta) \end{aligned} \tag{33}$$

darstellt.

Die Konstanten a und b, welche in den X_n vorkommen, können, falls man die Reihe bei irgend einem Gliede abbricht — Gauss thut dies bei seiner Berechnung des Erdmagnetismus nach dem vierten —, mittels einer hinreichenden Zahl von Beobachtungen an verschiedenen Punkten aus linearen Gleichungen berechnet werden. Obgleich dieses Verfahren schwerfällig, mühsam und unsicher ist, wird sich doch in solchen Fällen, wo $f(\vartheta, \varphi)$ nur für einzelne Punkte, nicht als analytischer Ausdruck bekannt ist, kaum eine wesentliche Vereinfachung anbringen lassen.

So läfst sich das Potential der Erdattraktion für äufsere Punkte aus einer genügenden Zahl von Pendelbeobachtungen bestimmen, deren Resultate man nur auf eine fiktive Kugelfläche, welche die Erde im Äquator berührt, zu reduzieren braucht.

12. Die Entwicklung eines Potentials, welches auf der Kugeloberfläche in $f(\vartheta, \varphi)$ übergeht, läfst sich übrigens auch in Gestalt einer Reihe von Integralen hinschreiben. Denken wir uns eine Masse auf der Kugelfläche selbst so verteilt, dafs die Dichtigkeit an jeder Stelle

$$\sigma = f(\vartheta, \varphi)$$

ist, wo wir also für den Augenblick mit f einen ganz anderen Begriff verbinden, wie vorher, so gilt das Potential

$$V = \int \frac{\sigma\, ds}{\varrho},$$

worin

$$\varrho = \sqrt{1 - 2r\cos\gamma + r^2}$$

ist und r und γ die frühere Bedeutung haben. Durch Entwicklung von $\frac{1}{\varrho}$ nach Kugelfunktionen einer Variabeln erhalten wir

$$V = \int \sigma \sum_0^\infty r^n P^{(n)}(\cos\gamma)\, ds \tag{34}$$

für innere Punkte und

$$V = \int \sigma \sum_0^\infty r^{-(n+1)} P^{(n)}(\cos\gamma)\, ds \tag{35}$$

für äufsere Punkte.

*) Dafs die zugeordneten Kugelfunktionen teilweise imaginär sind, hat nichts zu sagen, da durch passende Wahl der Koeffizienten die Entwicklung reell zu machen ist.

Nun ist aber nach § 41, (7)

$$(36) \quad \sigma = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial V}{\partial n_a} + \frac{\partial V}{\partial n_i}\right] = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_+ - \left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_-\right],$$

wo das angefügte + und — bedeutet, dafs der Differentialquotient das eine Mal aus der Reihe (35), das andere Mal aus (34) zu entnehmen und dafs dann $r = 1$ zu setzen ist. Die Differentialquotienten der konvergenten Reihen (34) und (35) sind für $r < 1$, resp. $r > 1$ wieder konvergent. Für $r = 1$ wird die Sache zweifelhaft; doch ist nach einem funktionaltheoretischen Satze sicher, dafs, wenn Konvergenz für $r = 1$ stattfindet, sich die Werte der Reihe in diesem Falle an diejenigen für $r < 1$, resp. $r > 1$ stetig anschliefsen. Den umständlichen Konvergenzbeweis für unsere Reihen, falls $r = 1$ wird, der von Dirichlet gegeben wurde, findet man in den schon angeführten Publikationen.

Es folgt aus (35) und (34)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_+ = -\int \sigma \sum_0^\infty (n+1) P^{(n)}(\cos\gamma)\, ds,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_- = \int \sigma \sum_1^\infty n P^{(n)}(\cos\gamma)\, ds,$$

also nach (36)

$$(37) \qquad \sigma = \frac{1}{4\pi}\int \sigma \sum_0^\infty (2n+1) P^{(n)}(\cos\gamma)\, ds.$$

Wir führen jetzt die Darstellung durch Polarkoordinaten vollständig aus, wobei wir die laufenden Koordinaten unter dem Integral mit ϑ_1 und φ_1, diejenigen des Punktes, für welche $\sigma = f(\vartheta, \varphi)$ gesucht wird, mit ϑ und φ bezeichnen. Es ist

$$ds = \sin\vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1,$$

$$\cos\gamma = \cos\vartheta\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta\sin\vartheta_1\cos(\varphi_1 - \varphi),$$

also

$$(38) \quad f(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta_1, \varphi_1)\sum_0^\infty (2n+1) P^{(n)}(\cos\gamma)\sin\vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1$$

$$= X_0 + X_1 + X_2 + \cdots,$$

wenn

$$(39) \qquad X_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} f(\vartheta_1, \varphi_1) P^{(n)}(\cos\gamma)\sin\vartheta_1 d\vartheta_1 d\varphi_1$$

gesetzt wird.

Um darzuthun, dafs X_n eine Kugelfunktion n^{ter} Ordnung mit zwei Variabeln ist, genüge hier die Bemerkung, dafs es die Gleichung (13) befriedigt. Um dies nachzuweisen, braucht man die Differentiationen nach ϑ und φ nur unter dem Integralzeichen, bei $P^{(n)}(\cos\gamma)$, auszuführen. Setzt man dann

Alles in (13) ein, so erhält man, weil $P^{(n)}(\cos\gamma)$ derselben Gleichung genügt, unter den Integralzeichen den Faktor Null.

Will man die Integration in (38) ausführen, so mufs man $P^{(n)}(\cos\gamma)$ mittels (28) nach den Kosinus der Vielfachen von $(\varphi_1 - \varphi)$, dann die $P_r^{(n)}(x_1)$ nach Potenzen von x_1 entwickeln und die Reihe durch Einführung der Kosinus der Vielfachen von ϑ_1 transformieren. Die einzelnen Posten, welche noch mit $f(\vartheta_1, \varphi_1)\sin\vartheta_1$ zu multiplizieren sind, lassen eine weitere Transformation der gleichen Art zu, da sich $f(\vartheta_1, \varphi_1)$ durch periodische Funktionen von ϑ_1 und φ_1 darstellen läfst. Schliefslich ist die Integration der einzelnen Glieder auszuführen.

Die Entwicklung (38) zeigt, wie man eine beliebige Funktion $f(\vartheta, \varphi)$, mit bereits erwähnten Einschränkungen, durch eine Reihe von Kugelfunktionen ausdrücken kann. Geben wir nun in dieser Entwicklung dem Gliede X_n den Faktor r^n oder r^{-n-1}, so erhalten wir eine Reihe, welche der Differentialgleichung (1) Genüge leistet. Legen wir daher jetzt $f(\vartheta, \varphi)$ wieder seine frühere Bedeutung bei, so dafs es die Werte eines Potentials V für die Kugeloberfläche darstellt, so liefern, nachdem die Entwicklung (38) vorgenommen worden ist, die Reihen

$$V = X_0 + rX_1 + r^2X_2 + \cdots \tag{40}$$

und

$$V = \frac{X_0}{r} + \frac{X_1}{r^2} + \frac{X_2}{r^3} + \cdots \tag{41}$$

die Werte von V für den inneren, resp. den äufseren Kugelraum.

Wir beschliefsen hiermit die Theorie der Kugelfunktionen.

13. Die Theorie der Kugelfunktionen löst die Aufgabe vollständig: Ein Potential für beliebige Punkte, welche keine Masse enthalten, zu bestimmen, wenn seine Werte für sämtliche Punkte einer Kugelfläche bekannt sind. Es liegt nahe, mit Hilfe anderer, analoger Funktionen die gleiche Aufgabe für andere einfache Flächen zu lösen.

Für die Kugel gelangten wir in der Weise zum Ziele, dafs wir in dem Integral (6) der Differentialgleichung (1) Polarkoordinaten einführten und dann nach einer derselben, r, die einer Konstanten gleichgesetzt eine Kugel bestimmt, entwickelten. Führt man in (6) elliptische Koordinaten ein, so gelangt man in analoger Weise zu den Laméschen Funktionen, welche in Bezug auf das Ellipsoid dieselbe Rolle spielen, wie die Kugelfunktionen in Bezug auf die Kugel.

Setzt man

$$z = z, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

so bestimmt

$$r = \text{Const.}$$

eine Kreiscylinderfläche, deren Achse die z-Achse ist. Die Funktionen,

zu welchen man hiervon ausgehend gelangt, heifsen Cylinderfunktionen oder Bessel'sche Funktionen.

In ähnlicher Weise gelangt man zu den von Mehler entwickelten Kegelfunktionen.

Alle diese Funktionengattungen sollen hier nicht untersucht werden, da dies einen unverhältnismäfsigen Raum erfordern würde.

Bemerkt möge noch werden, dafs für zwei Koordinaten die gewöhnlichen trigonometrischen Kreisfunktionen in Bezug auf den Kreis dieselbe Rolle spielen, wie die Kugelfunktionen in Bezug auf die Kugel. Die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Kreisfunktionen wird uns an späterer Stelle noch eingehend zu beschäftigen haben.

§ 48.

Das logarithmische Potential.

1. Wir denken uns eine Masse in gleichmäfsiger Dichtigkeit längs einer beiderseits ins Unendliche fortlaufenden Geraden, welche die z-Achse sein möge, verteilt, so dafs einem endlichen Stücke dieser Geraden eine endliche Masse zukommt. Es leuchtet ein, dafs von dieser linearen Masse aus auf jeden Punkt x, y, z die gleiche Attraktion ausgeübt wird wie auf den Punkt $x, y, 0$; es genügt daher, die Attraktion der Masse auf Punkte, welche in der xy-Ebene liegen, zu untersuchen. Eine Kraftwirkung in der Richtung der z-Achse findet nicht statt, sondern nur eine solche in der xy-Ebene nach dem Nullpunkte zu. Setzen wir

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1}$$

so ist die auf $x, y, 0$ in der Richtung des wachsenden r ausgeübte Kraft

$$R = -\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{r^2 + z^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} = -\sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r\,dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2}$$

worin σ die in der Längeneinheit enthaltene Masse (die Dichtigkeit) bezeichnet; $\sqrt{r^2 + z^2}$ ist wie r positiv. Da

$$\int \frac{dz}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z}{r^2 (r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ist, so folgt

$$R = -\frac{2\sigma}{r}. \tag{3}$$

Die Newton'sche Anziehung der mit Masse von der Dichtigkeit σ belegten z-Achse auf einen Punkt der xy-Ebene ist also einer von dem Nullpunkte, in dem man sich die Masse 2σ kon-

zentriert denkt, ausgehenden, proportional der ersten Potenz der Entfernung abnehmenden Anziehung gleich.

2. Ist ein unendlich langer Cylinder mit beliebigem Durchschnitte $f(x, y) = 0$ vorgelegt, dessen erzeugende Geraden der z-Achse parallel laufen und der so mit Masse angefüllt ist, dafs in Punkten, welche sich nur durch ihr z unterscheiden, die Dichtigkeit σ die gleiche ist, so läfst sich dessen Attraktion auf einen Punkt der xy-Ebene nach dem Newton'schen Gesetze durch eine Attraktion, welche mit der ersten Potenz der Entfernung abnimmt und von der in jedem Punkte mit der Masse 2σ belegten Fläche $f(x, y) = 0$ in der xy-Ebene ausgeht, ersetzen.

Hierdurch wird man veranlafst, die Kräftefunktion mit Masse belegter ebener Figuren zu untersuchen, welche nach dem letztgenannten Gesetze Punkte derselben Ebene (der xy-Ebene) anziehen. Bezeichnet jetzt σ die Dichtigkeit der Belegung in einem Punkte der Fläche S, r dessen Abstand von dem angezogenen Punkte x, y, so ist diese Kräftefunktion

$$\Omega = \int \sigma \log r \, ds, \tag{4}$$

wo die Integration über die Fläche S auszudehnen ist. Man nennt diese Kräftefunktion das logarithmische Potential*) der Fläche S. Die Untersuchung desselben verdankt man hauptsächlich C. Neumann. Ausführliches darüber findet man in dessen: Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential, Leipzig 1877.

Der gegebenen Herleitungsweise entsprechend untersucht man das logarithmische Potential nur für Punkte derselben Ebene.

3. Da

$$\frac{\partial \log r}{\partial x} = \frac{x}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - 2x^2}{r^4}$$

ist, so folgt, wenn $r = 0$ ausgeschlossen wird,

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \log r}{\partial y^2} = 0 \tag{5}$$

und allgemein für einen aufserhalb der Masse gelegenen Punkt

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0, \tag{6}$$

so dafs Ω hier derselben partiellen Differentialgleichung genügt, wie das Newton'sche Potential V.

Es verdient bemerkt zu werden, dafs bei Ausdehnung der Theorie auf drei Variable diese Analogie aufhören würde.

Auch die Poisson'sche Gleichung mufs für das logarithmische Potential ihre Gültigkeit behalten; nur ist zu beachten, dafs nach (3) der

*) Das gewöhnliche Potential wird im Gegensatze hierzu das Newton'sche genannt.

Dichtigkeit σ der räumlichen Masse bei der Flächenbelegung die Dichtigkeit 2σ entspricht. Daher haben wir für einen Punkt im Innern der anziehenden Masse

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = -2\sigma\pi. \tag{7}$$

Ein wichtiger Unterschied zwischen dem logarithmischen und Newton'schen Potential ist der, dafs ersteres im Unendlichen unendlich wird, während letzteres verschwindet.

In betreff weiterer Eigenschaften des logarithmischen Potentials möge auf das citierte Werk von Neumann verwiesen sein. Es sei nur darauf aufmerksam gemacht, dafs das logarithmische Potential eines Flächenstücks, resp. einer geschlossenen Linie nach der Einführung auch als das Newton'sche Potential eines Körpers, resp. einer geschlossenen Fläche betrachtet werden kann und dafs dem entsprechende Relationen statthaben.

Wegen der Gleichung (6) steht gerade das logarithmische Potential in enger Beziehung zu funktionaltheoretischen Untersuchungen, auf die jedoch hier noch nicht eingegangen werden soll.

§ 49.

Die Abbildung durch reciproke radii vectores.

1. Es sei eine Kugel mit dem Mittelpunkte O und dem Radius r vorgelegt. Von O aus sei irgend ein Halbstrahl gezogen und auf demselben seien zwei Punkte A und A_1 derart festgesetzt, dafs

$$OA \,.\, OA_1 = r^2 \tag{1}$$

wird; der eine dieser Punkte liegt innerhalb, der andere aufserhalb der Kugel, wenn nicht beide auf der Kugelfläche zusammenfallen.

Wir wollen nun zwei Punkte A und A_1 als korrespondierend oder zugeordnet (konjugiert) bezeichnen, wenn sie auf demselben durch O gehenden Halbstrahle liegen und der Relation (1) Genüge leisten. Auf diese Weise ist jedem Punkte des Raumes ein anderer eindeutig zugeordnet. Einem aufserhalb der Kugel gelegenen Punkte entspricht ein innerer, einem inneren ein äufserer; Punkte auf der Kugeloberfläche entsprechen sich selbst.

Man nennt diese Beziehung von je zwei Punkten des Raumes die Zuordnung durch reciproke radii vectores oder durch sphärische Spiegelung; dieselbe ist eine durchaus reciproke, so dafs A und A_1 vertauscht werden können*).

*) Diese Zuordnung wurde zuerst von W. Thomson in der Potentialtheorie zur Anwendung gebracht.

Irgend ein räumliches Gebilde kann durch sphärische Spiegelung in ein anderes transformiert werden, indem man jedem Punkte des einen nach dem angegebenen Gesetze einen korrespondierenden zuweist.

2. Korrespondieren die Punkte A und B mit A_1 und B_1, so folgt aus (1)

$$OA \,.\, OA_1 = OB \,.\, OB_1$$

oder

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OB_1}{OA_1}. \tag{2}$$

Da die beiden Dreiecke AOB und B_1OA_1 aufserdem den Winkel AOB gemeinsam haben, so folgt hieraus

$$\triangle AOB \sim B_1OA_1, \tag{3}$$

also

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OB_1} = \frac{OB}{OA_1} \tag{4}$$

oder auch

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \sqrt{\frac{OA \,.\, OB}{OA_1 \,.\, OB_1}}. \tag{5}$$

Nehmen wir drei korrespondierende Punktepaare A und A_1, B und B_1, C und C_1 an, so haben wir aufser (5) noch

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \sqrt{\frac{OA \,.\, OC}{OA_1 \,.\, OC_1}}, \quad \frac{BC}{B_1C_1} = \sqrt{\frac{OB \,.\, OC}{OB_1 \,.\, OC_1}}. \tag{6}$$

Lassen wir das Dreieck ABC unendlich klein werden, so ist das gleiche mit $A_1B_1C_1$ der Fall*); wir dürfen dann

$$OA = OB = OC, \quad OA_1 = OB_1 = OC_1$$

setzen und erhalten aus (5) und (6)

$$\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{OA}{OA_1}. \tag{7}$$

Korrespondierende unendlich kleine Dreiecke sind daher einander ähnlich; ihre Dimensionen verhalten sich wie ihre Abstände vom Nullpunkte.

Wir schliefsen hieraus, dafs korrespondierende Gebilde in den kleinsten Teilen ähnlich sind. Entsprechende Winkel sind gleich, entsprechende, von demselben Punkte ausgehende unendlich kleine Strecken sind proportional. Es dürfte unnötig sein, auf den Begriff der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen hier weiter einzugehen, da derselbe dem Leser

---

*) Wenn nicht gerade Punkt O im Dreieck ABC liegt.

aus der Theorie der konformen Abbildung mittels Funktionen einer komplexen Variabeln hinreichend bekannt ist. Wir brauchen kaum zu erwähnen, daſs die Abbildung durch reciproke radii vectores auf die Ebene beschränkt in die Abbildung mittels der Funktion

$$y = \frac{r^2}{x}$$

übergeht.

Aus der Ähnlichkeit in den kleinsten Teilen folgt weiter, daſs sich unendlich kleine Flächen und Körper beider Systeme wie die Quadrate und Kuben ihrer Abstände vom Nullpunkte verhalten.

3. Denkt man sich in (4) die Punkte A und A_1 fest, die Punkte B und B_1 aber variabel, so entspricht wegen

$$AB = OA \cdot \frac{A_1 B_1}{OB_1}$$

einem konstanten AB ein konstantes Verhältnis $\frac{A_1 B_1}{OB_1}$. Nun ist aber

$$AB = \text{Const.}$$

die Gleichung einer Kugel, während

$$\frac{A_1 B_1}{OB_1} = \text{Const.}$$

eine Fläche darstellt, deren Punkte B_1 von zwei festen Punkten A_1 und O Abstände haben, die in konstantem Verhältnis stehen; dies ist aber bekanntlich auch eine Kugel.

Durch sphärische Spiegelung wird also jede Kugel wieder in eine Kugel transformiert*).

Geht die eine Kugel durch den Nullpunkt, so geht ihr Abbild durch den unendlich fernen Punkt; es ist also eine Kugel mit unendlich groſsem Radius, d. h. eine Ebene. Im speziellen Falle werden also auch Kugeln als Ebenen, Ebenen aber immer als Kugeln oder wieder als Ebenen abgebildet.

4. Will man die sphärische Spiegelung analytisch verfolgen, so bemerke man, daſs den Koordinaten des Punktes A, wenn der Mittelpunkt der abbildenden Kugel zum Nullpunkte genommen wird:

$$x = \varrho \sin \vartheta \cos \varphi\,, \quad y = \varrho \sin \vartheta \sin \varphi\,, \quad z = \varrho \cos \vartheta$$

die Koordinaten

$$x_1 = \varrho_1 \sin \vartheta \cos \varphi\,, \quad y_1 = \varrho_1 \sin \vartheta \sin \varphi\,, \quad z_1 = \varrho_1 \cos \vartheta$$

---

*) Die Mittelpunkte zweier entsprechenden Kugeln entsprechen sich im allgemeinen nicht.

entsprechen, wo

$$\varrho\varrho_1 = r^2$$

ist. Hieraus folgt

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{r^2 \sin\vartheta \cos\varphi}{\varrho} = \dfrac{r^2 x}{\varrho^2} = \dfrac{r^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \\ y_1 = \dfrac{r^2 y}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad z_1 = \dfrac{r^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}. \end{cases}$$

5. Wir wollen zwei Massenelemente m und m_1 der korrespondierenden Systeme so einander zuordnen, dafs wir ihnen korrespondierende Punkte M und M_1 als Ort zuweisen und aufserdem zwischen ihren Massen die Beziehung

$$(9)\qquad \frac{m}{\sqrt{OM}} = c^2 \frac{m_1}{\sqrt{OM_1}}$$

festsetzen, in der c eine beliebige Konstante bedeutet.

Ist A und A_1 ein beliebiges entsprechendes Punktepaar, so folgt aus (6)

$$(10)\qquad \frac{MA}{\sqrt{OM\,.\,OA}} = \frac{M_1A_1}{\sqrt{OM_1\,.\,OA_1}}$$

und durch Division von (9) durch (10)

$$(11)\qquad \frac{m}{MA}\sqrt{OA} = c^2 \frac{m_1}{M_1A_1}\sqrt{OA_1}.$$

Da $\frac{m}{MA}$ und $\frac{m_1}{M_1A_1}$ die Newton'schen Potentiale der Massenelemente m und m_1 in Bezug auf die Punkte A und A_1 sind, so ist hierdurch für die Potentiale korrespondierender Massenelemente in Bezug auf korrespondierende Punkte eine einfache Beziehung festgesetzt.

Da wir die Potentiale V und V_1 entsprechender Massen von endlicher Ausdehnung durch Summation der Potentiale entsprechender Massenelemente erhalten, so folgt aus (11) unmittelbar, wenn V und V_1 auf entsprechende Punkte A bezogen werden,

$$(12)\qquad V\sqrt{OA} = c^2 V_1 \sqrt{OA_1}.$$

Dies giebt den Satz:

Ist zwischen entsprechenden Massen korrespondierender Systeme die Gleichung (9) festgesetzt, so sind entsprechende Potentiale, bezogen auf entsprechende Punkte, durch die Relation (12) verbunden.

Mittels dieses Satzes, der noch manchen Umgestaltungen zugänglich ist, läfst sich aus jedem gefundenen Potentiale ein weiteres herleiten.

Genaueres über diesen Gegenstand findet man in dem im vorigen Paragraphen citierten Werke von C. Neumann.

Wir schliefsen mit dieser Untersuchung die Theorie des Potentials vorläufig ab; doch werden wir dieselbe in der Folge wieder aufzunehmen haben.

Alphabetisches Namen- und Sachregister.

Berichtigungen und Zusätze.

Zusatz zu § 1, 2, p. 3. Die hier gegebene, oft benutzte Definition der Geschwindigkeit ist insofern nicht ganz korrekt, als sie die Geschwindigkeit als Längengröfse erscheinen läfst, während diese der Quotient einer Längengröfse und einer Zeitgröfse ist. Indessen dürften die Erörterungen in § 2, 12 alle Zweifel hierüber beseitigen.

P. 4, Z. 10 lies: $\frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{dt}$ statt $\sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt}}$.

P. 105 u. 107 lies in den Überschriften § 14 statt § 1.

Zusatz zu § 21, p. 132 ff.: Das d'Alembert'sche Prinzip kann auch auf den Fall ausgedehnt werden, dafs die Bedingungsgleichungen die Zeit explizite enthalten. Die virtuellen Verrückungen sind dann, p. 133 Anm. entsprechend, unter Festhaltung eines bestimmten t zu bilden; um die Beziehungen zwischen ihren Werten zu finden, sind die Bedingungsgleichungen nur nach den Koordinaten, nicht nach der Zeit zu differentiieren. Vgl. hiermit die Resultate in § 14. Auf eine weitere Behandlung des Gegenstandes, der noch gründlicher Untersuchung bedürftig ist, soll hier nicht eingegangen werden.

Zusatz zu § 43, p. 270 ff.: An die Resultate dieses und der vorhergehenden Paragraphen kann leicht eine Untersuchung des Verhaltens der zweiten Differentialquotienten eines Potentials V räumlicher Massen an der Grenzfläche der letzteren angeschlossen werden. Wir haben

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\sigma\, d\tau}{r} = \int \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\, d\tau$$

oder, da r eine Funktion von $x - \xi$ ist, während σ von x nicht abhängt,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int \sigma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi}\, d\tau = -\int \frac{\partial \frac{\sigma}{r}}{\partial \xi}\, d\tau + \int \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}\, d\tau.$$

Durch Anwendung von § 43, (4) wird hieraus

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int \frac{\sigma}{r}\cos(n, x)\, ds + \int \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}\, d\tau.$$

Der Differentialquotient von V nach x kann also als die Summe zweier Potentiale betrachtet werden, von denen das eine von einer Masse herrührt, welche die Oberfläche des bisher betrachteten mas-

senerfüllten Raumes mit der Dichtigkeit $\sigma \cos(n, x)$ bedeckt, während das zweite einer räumlichen Masse mit der Dichtigkeit $\frac{\partial \sigma}{\partial \xi}$ entspricht.

Da nun die ersten Differentialquotienten des Potentials räumlicher Massen an der Grenzfläche stetig sind, die eines Flächenpotentials aber nicht, so brauchen wir, um die Stetigkeitssprünge von

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$$

an der Grenzfläche zu ermitteln, nur diejenigen von

$$\int \frac{\sigma}{r} \cos(n, x)\, ds$$

ins Auge zu fassen. Nach § 41, 3 führt der nach der Richtung der inneren Normalen genommene Differentialquotient dieses Flächenpotentials beim Übergang von der inneren nach der äufseren Seite einen Sprung um

$$-4\pi\sigma \cos(n, x)$$

aus. Durch Projektion dieses Sprunges auf die Koordinatenachsen erhalten wir die Stetigkeitssprünge der zweiten Differentialquotienten von V. So haben wir als Stetigkeitssprung

$$\text{von } \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}: \quad -4\pi\sigma \cos^2(n, x),$$

$$\text{von } \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}: -4\pi\sigma \cos(n, x) \cos(n, y)$$

u. s. w.

Ebenso können wir die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n_a \partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial n_i \partial x} = -4\pi\sigma \cos(n_i, x)$$

u. s. w.

aufstellen.

Zusatz zu § 45, p. 280. Eingehende und strenge Untersuchungen über den vorliegenden Gegenstand giebt C. Neumann in dem Werke: Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential.

LEHRBUCH

DER

ANALYTISCHEN MECHANIK

VON

Dr. OTTO RAUSENBERGER.

ZWEITER BAND.

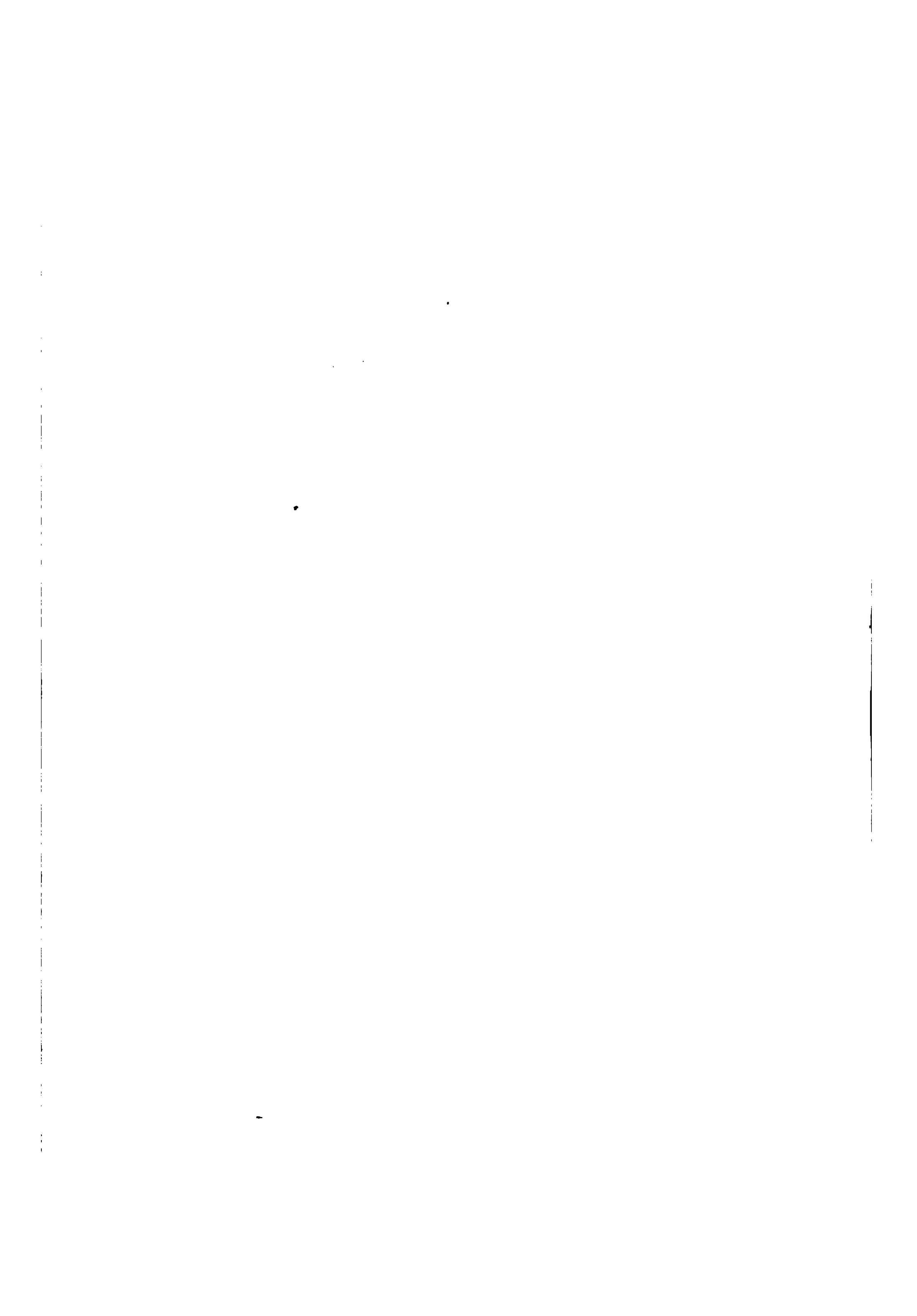
MECHANIK DER ZUSAMMENHÄNGENDEN KÖRPER.

MIT FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1888.

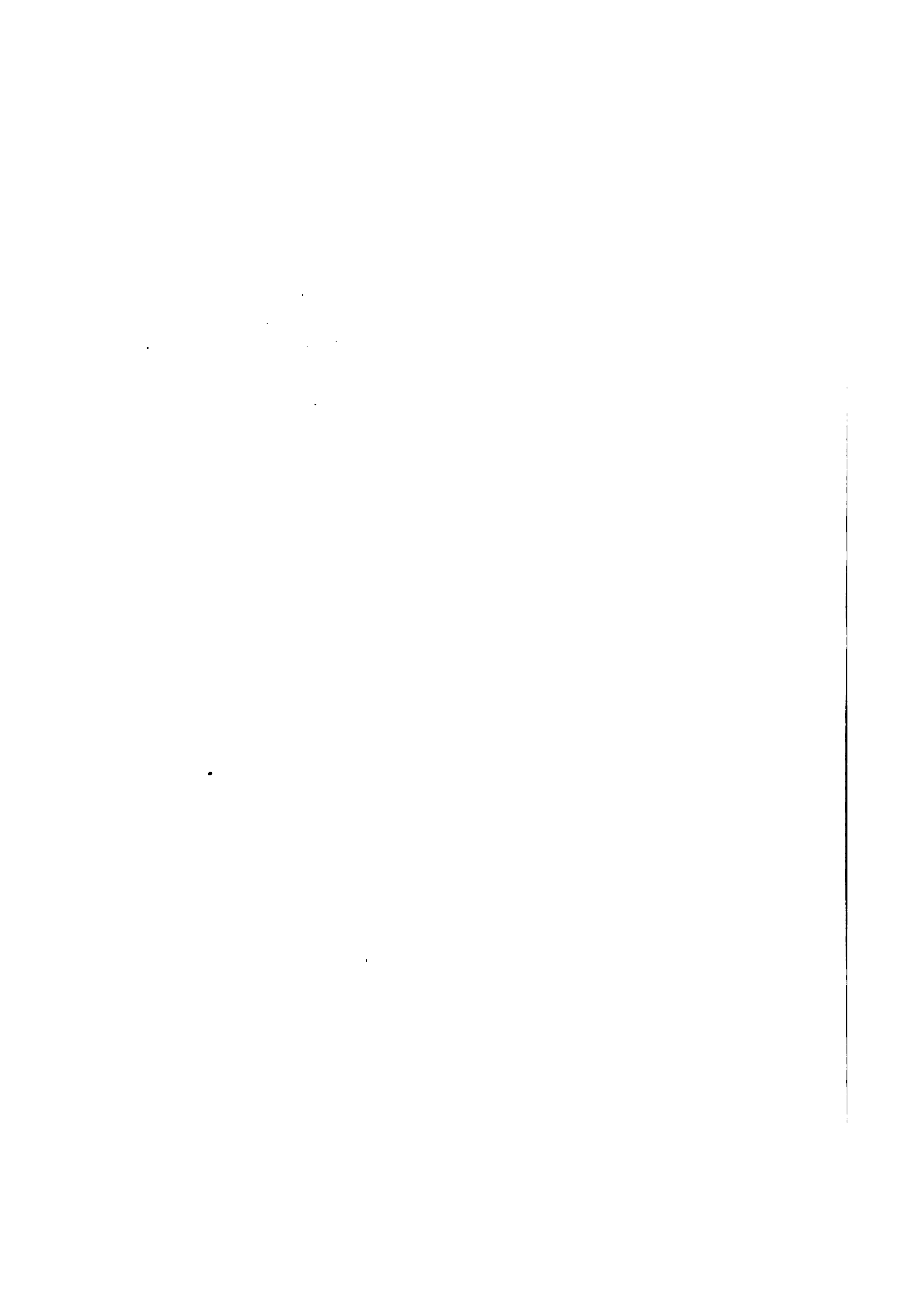


Vorwort.

Der zweite Band dieses Lehrbuchs behandelt Gebiete, die in neuester Zeit einen aufserordentlichen Umfang angenommen haben. Gerade hier erschien es notwendig, das Wichtigste und Charakteristischste auszuwählen, um dem Leser überhaupt ein erfolgreiches Studium zu ermöglichen und ihn nicht durch eine erdrückende Stoffmasse abzuschrecken. Es konnte fraglich erscheinen, ob die drei letzten Abschnitte, bei denen der physikalische Charakter mehr als bei den fünf ersten hervortritt, überhaupt in das Lehrbuch der analytischen Mechanik aufzunehmen seien. Allein der Zusammenhang der hier behandelten Gegenstände mit dem Inhalte der vorhergehenden Abschnitte ist doch ein sehr inniger. Andererseits fehlt es an einem Werke, welches die Gesamtheit dieser Gebiete in einer Form vorführt, die auch einem ersten Studium keine zu grofsen Schwierigkeiten entgegensetzt; Kirchhoff's Mechanik bietet hierfür ein zu ausgedehntes Material, während die Grundlagen nicht in einer für den Anfänger verständlichen Weise erörtert werden. Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper, Fr. Neumann, Vorlesungen über mathematische Physik und andere Werke behandeln nur einzelne Disziplinen. Selbstverständlich wurden die genannten Werke neben zahlreichen anderen und Originalabhandlungen vielfach benutzt. Litteraturangaben wurden nur in mäfsigem Umfange gemacht; Reichhaltigeres in dieser Beziehung findet man in den angeführten Werken, in Schell's Mechanik (besonders für den fünften Abschnitt), in Auerbach's: Die theoretische Hydrodynamik u. a. a. O. Des Verfassers Absicht ist erfüllt, wenn das Lehrbuch den Studierenden der Mathematik zur eingehenden Beschäftigung mit der Mechanik und theoretischen Physik den Weg ebnet.

Frankfurt a. M., im August 1888.

Dr. Otto Rausenberger,
Oberlehrer an der Adlerflychtschule zu Frankfurt a. M.



Inhaltsverzeichnis des zweiten Bandes.

Fünfter Abschnitt.

Mechanik der unelastisch festen (starren) Körper.

Sechster Abschnitt.

Mechanik der elastisch festen Körper.

Siebenter Abschnitt.

Hydromechanik.

Achter Abschnitt.

Aeromechanik.

Fünfter Abschnitt.

Mechanik der unelastisch festen (starren) Körper.

§ 50.

Einleitung.

1. Im Früheren beschäftigten wir uns lediglich mit der Ruhe und der Bewegung materieller Punkte. Freilich mufsten wir in der Potentialtheorie auf die Attraktion zusammenhängender Körper eingehen; doch handelte es sich auch hier nur um die Wirkung, welche dieselben auf einzelne Punkte ausüben. Von jetzt ab haben wir die Ruhe und Bewegung zusammenhängender Körper, wie sie uns die Anschauung überall darbietet, zu untersuchen. Eben weil die Anschauung uns immer nur zusammenhängende Körper, nirgends aber die durch Abstraktion gewonnenen materiellen Punkte zeigt, ist es ganz natürlich, dafs gerade die Mechanik — wenigstens die einfachere Statik — solcher Körper zuerst in Angriff genommen und dafs bereits im Altertum Untersuchungen von bleibendem Werte über sie geliefert wurden.

Die moderne Naturwissenschaft neigt der Hypothese zu — Gründe für und gegen dieselbe sollen hier nicht beigebracht werden —, dafs sämtliche Körper aus einer sehr grofsen Anzahl nicht weiter zu zerlegender Atome zusammengesetzt sind. Nach des Verfassers Ansicht ist diese Hypothese nur unter der Annahme, dafs die Atome wirkliche materielle Punkte, also ausdehnungslose Sitze der Kraft sind, logisch und widerspruchsfrei durchzuführen. Hiernach wären sämtliche Körper nur Aggregate materieller Punkte, könnten also einfach nach den Methoden des ersten Abschnittes untersucht werden. Indessen ist die Atomtheorie noch keineswegs zu der Ausbildung gelangt, dafs sie den folgenden Rechnungen zu Grunde gelegt werden könnte. Auch über die Kräfte, welche die Atome bewegen, ist man durchaus nicht im Klaren. Aber selbst wenn dies der Fall wäre, so würden doch unsere analytischen Hilfsmittel zu einer genauen Behandlung der hieraus resultierenden mechanischen Probleme nicht ausreichen. Unter diesen Umständen bleibt nichts Anderes übrig, als die Mechanik der zusammenhängenden Körper auf rein empirische, nur näherungsweise richtige Annahmen zu basieren. Um Mifsverständnissen, wie sie mitunter vorkommen,

vorzubeugen, sei also ausdrücklich betont, dafs in der Folge über die innere Natur der Körper gar nichts ausgesagt wird; die Betrachtung ist eine ganz äufserliche. Hiermit ist jedoch nicht ausgeschlossen, dafs die folgenden Untersuchungen auch für eine tiefergehende Naturbetrachtung wichtige Hilfsmittel liefern.

2. Wir behandeln zunächst die unelastisch festen oder starren Körper; dieselben sind durch die Unveränderlichkeit der gegenseitigen Lage ihrer Teile charakterisiert. Mathematisch kann man diese Eigenschaft dadurch fixieren, dafs man die Entfernung je zweier beliebigen Punkte des Körpers als konstant festsetzt. In der Natur tritt kein Körper auf, der diese Bedingung streng befriedigt, sehr viele jedoch, die ihr recht nahe kommen. Für die unbefangene Betrachtung liegt der Begriff des unelastisch festen Körpers so nahe, dafs die ersten mechanischen Untersuchungen an ihn anknüpfen und dafs ein fortgeschritteneres Abstraktionsvermögen dazu gehört, diesen Begriff als einen nichts weniger als einfachen zu erkennen. Dieselben Betrachtungen, wie wir sie zu Eingang des zweiten Abschnittes anstellten, überzeugen uns davon, dafs wir es in der Mechanik der unelastisch festen Körper nur mit Näherungsmethoden zu thun haben, denen äufserst komplizierte wirkliche Verhältnisse gegenüberstehen.

Wir behandeln zunächst die Bewegung des festen Körpers rein mathematisch. Diese kinematischen Untersuchungen bilden dann die Grundlage der späteren eigentlich mechanischen.

§ 51.

Synthetische Behandlung der Kinematik eines starren Systems.

1. Wir wollen bei den folgenden rein mathematischen Untersuchungen an Stelle des analytisch festen Körpers den allgemeineren geometrischen Begriff eines starren räumlichen Systems setzen. Es ist darunter der Inbegriff sämtlicher Punkte des Raumes, denen eine feste gegenseitige Lage zugeschrieben wird, zu verstehen; das System bleibt bei allen Ortsveränderungen sich selbst kongruent. Daneben betrachten wir Systeme, welche einen Teil der räumlichen ausmachen, insbesondere das starre ebene System, welches die fest verbundenen Punkte einer Ebene umfafst. Zunächst legen wir uns die Frage vor: in welcher Weise kann ein räumliches System oder ein ihm angehöriges Gebilde aus einer Lage in eine vorgeschriebene andere übergeführt werden? Die Zeit spielt hierbei keine Rolle, das Problem ist rein geometrisch. Dann werden wir die Bewegung der Systeme mit Rücksicht auf die Zeit zu untersuchen haben.

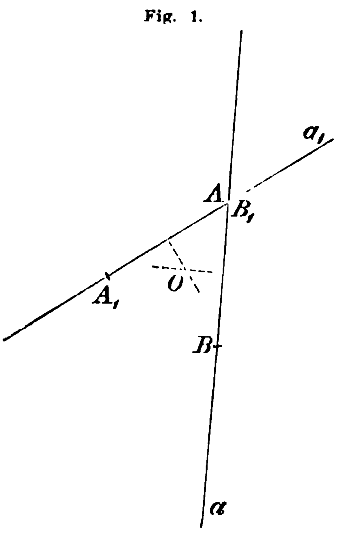
2. Es möge ein ebenes System in seiner Ebene aus einer vorgeschriebenen Anfangslage in eine vorgeschriebene Endlage übergeführt werden. Dabei ist zu bemerken, dafs es nicht immer möglich ist, ein ebenes System mit einem ihm kongruenten, in derselben Ebene gelegenen,

durch Verschieben zum Zusammenfallen zu bringen; die einfachste Überlegung zeigt, dafs dann vorher ein Umklappen des einen Systems vorgenommen werden mufs, um hierauf durch Verschieben zum Ziele zu gelangen. Wir schliefsen diesen Fall aus und nehmen an, dafs die Endlage dem entsprechend gewählt sei.

Bewegt sich ein ebenes System so, dafs seine sämtlichen Punkte parallele Geraden beschreiben (was offenbar möglich ist), so nennen wir diese Bewegung eine Translation oder Parallelverschiebung. Wird ein Punkt des Systems festgehalten, so heifst die noch mögliche Bewegung eine Drehung oder Rotation um diesen Punkt. Jedes ebene System kann mittels einer Translation und einer Drehung aus einer gegebenen Anfangslage in jede der angegebenen Bedingung entsprechende Endlage übergeführt werden. Man braucht nur mittels der Translation einen beliebigen Punkt des Systems an die ihm zugewiesene Stelle zu rücken und dann zu drehen, bis die richtige Lage erreicht ist. Zugleich erhellt, dafs die Lage eines ebenen Systems durch drei Angaben fixiert ist. Denn die Lage eines Punktes in der Ebene ist durch zwei Angaben bestimmt, während die Drehung durch eine weitere Angabe determiniert wird.

3. Die gegebene Zusammensetzung einer Verrückung des ebenen Systems in eine vorgeschriebene Lage ist nicht die einfachste; vielmehr kann das System immer durch eine Drehung oder eine Translation allein in jede Lage gebracht werden. Dabei kann die Translation als eine Drehung um den unendlich fernen Punkt, in welchen die zur Verschiebungsrichtung senkrechten Geraden zusammenlaufen, aufgefafst werden, so dafs jede Verrückung als eine *Drehung* um einen festbestimmten Punkt angesehen werden kann.

Fig. 1.



Um dies nachzuweisen, bezeichnen wir das ebene System in seiner Anfangslage mit Σ, in seiner Endlage mit Σ_1 und unterscheiden die entsprechenden Elemente in analoger Weise. Irgend einer Geraden a in Σ entspricht eine Gerade a_1 in Σ_1 (Fig. 1); beide Geraden haben einen Punkt gemeinsam, welcher als A und B_1 bezeichnet werden soll, insofern er als zu Σ oder Σ_1 gehörig betrachtet wird. Dem Punkte A von Σ mufs in Σ_1 ein auf a_1 gelegener Punkt A_1, dem Punkte B_1 von Σ_1 ein auf a gelegener Punkt B in Σ entsprechen, wobei infolge der Kongruenz von Σ und Σ_1, $AB = A_1B_1$ ist. Die Drehung, welche Σ in Σ_1 überführen soll, mufs um einen Punkt geschehen, welcher von A_1, A oder B_1 und B gleichweit entfernt ist. Es existiert, wenn nicht a und a_1 parallel sind, immer ein und nur ein solcher Punkt O;

man erhält ihn als Schnittpunkt der Senkrechten, welche in den Mitten von AB und A_1B_1 auf diesen Geraden errichtet sind. Dafs dann wirklich eine Drehung um O Σ in Σ_1 überführt, ist unmittelbar ersichtlich. Sind a und a_1 parallel, so rückt Punkt A ins Unendliche; eine Translation bringt dann die Punkte von a mit den entsprechenden von a_1 zur Deckung.

4. Auch bei einem räumlichen Systeme sprechen wir von einer Translation, wenn es derart verschoben wird, dafs seine Punkte parallele Geraden beschreiben; eine Drehung oder Rotation führt es aus, wenn bei seiner Bewegung die Punkte einer seiner Geraden, der Drehungs- oder Rotationsachse, ihre Lage nicht ändern. Will man das System in eine beliebige Lage bringen, so kann man zuerst einen seiner Punkte durch eine Translation an den vorgeschriebenen Ort versetzen. Eine beliebige durch diesen Punkt gehende Gerade gelangt in ihre Endlage durch eine Rotation um eine Achse, welche in dem festen Punkte auf der durch die Anfangs- und Endlage der Geraden bestimmten Ebene senkrecht steht. Um diese Gerade in ihrer Endlage ist noch eine weitere Rotation möglich, welche endlich das System in die vorgeschriebene Lage bringt. Es ergiebt sich hierbei, dafs die Lage eines räumlichen Systems durch sechs Angaben bestimmt ist. Drei Angaben genügen nämlich zur Festlegung eines Punktes, zwei weitere zur Festlegung einer durch diesen gehenden Geraden — die Lage derselben ist z. B. durch die Richtungswinkel, welche sie mit zwei festen Geraden bildet, vollkommen bestimmt —, eine letzte zur Bestimmung der Gröfse der letzten Drehung.

5. Die gegebene Zusammensetzung der Verschiebung kann dadurch vereinfacht werden, dafs man die beiden Rotationen durch eine einzige ersetzt, was immer auf eine einzige Art möglich ist. Wir gelangen zu diesem Resultate durch eine Betrachtung, welche der Darstellung einer Bewegung in einer Ebene als Drehung streng analog ist*). S und S_1 mögen das System in seiner Anfangs- und Endlage bezeichnen; der Punkt O sei beiden entsprechend gemein (was durch die Translation erzielt sein möge). Ist α eine Ebene von S, α_1 die entsprechende von S_1, so müssen sich α und α_1 in einer Geraden schneiden, welche als a oder b_1 bezeichnet werde, je nachdem sie zu S oder S_1 gerechnet wird; a entspreche in S_1 die Gerade a_1, b_1 in S die Gerade b. Nehmen wir nun an, dafs α und daher auch α_1 durch den Punkt O gelegt ist, so gehen auch a oder b_1, a_1 und b durch diesen Punkt. Die Winkel (ab) und (a_1b_1) müssen gleich sein.

*) Dem ebenen Systeme, dem Inbegriff aller Punkte und Geraden, welche in derselben Ebene gelegen sind, steht der Strahlenbündel, der Inbegriff aller Geraden und Ebenen, welche durch denselben Punkt (Mittelpunkt) gehen, dualistisch gegenüber. Der Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene entspricht also die Bewegung eines starren Strahlenbündels unter Festhaltung seines Mittelpunktes. Man kann übrigens auch den Strahlenbündel auf eine mit ihm konzentrische Kugelfläche projizieren und die Bewegung eines starren sphärischen Gebildes auf der Kugelfläche untersuchen.

Halbiert man diese Winkel und errichtet in den Halbierungslinien auf den Ebenen der Winkel senkrechte Ebenen, so schneiden sich diese in einer Geraden, welche offenbar als Drehungsachse benutzt werden kann.

Die Translation und die eine Rotation, auf welche sich hiernach jede Bewegung des räumlichen Systems zurückführen läfst, können im allgemeinen nicht durch eine einzige dieser Bewegungsarten ersetzt werden. Die Translation darf übrigens als eine Drehung um eine unendlich ferne Gerade betrachtet werden.

6. Die beiden kombinierten Bewegungen sind keineswegs vollständig bestimmt, wie schon daraus ersichtlich ist, dafs man einen beliebigen Punkt A an seinen bestimmten Ort A_1 durch Translation führen kann, um dann die Drehung vorzunehmen. Ersetzt man A durch einen andern Punkt, der nicht auf der früheren Drehungsachse liegt, so werden die Translation und die Rotation andere. Wir wollen nun zeigen, dafs jener Punkt so gewählt werden kann, dafs die Rotationsachse in die Richtung der translatorischen Bewegung fällt.

Zu diesem Zwecke gehen wir wieder davon aus, dafs der beliebige Punkt A durch eine Translation in die Lage A_1 versetzt worden sei und dafs alsdann eine Rotation um die Achse a_1 stattgefunden habe, welche durch A_1 geht. Wir denken uns nun eine Ebene α_1 senkrecht zu a_1 gelegt. Diese Ebene gelangte durch die Translation aus der Anfangslage α immer parallel mit sich selbst in die Lage α_1, worauf sie dann in sich selbst gedreht wurde. Dasselbe Resultat kann aber auch folgendermafsen erzielt werden. Man verschiebt die Ebene α in der Richtung ihrer Normalen, bis sie in die durch die Ebene α_1 markierte Lage gelangt, natürlich von der Lage ihrer einzelnen Elemente abgesehen. Dann kann nach dem Früheren das ebene System α_1 durch eine Drehung in jede ihm zugängliche Lage (in derselben Ebene), also auch in die Lage, in welche es bei dem vorigen Verfahren gelangte, versetzt werden. Möglicherweise geht diese Rotation in eine zweite Translation über, welche dann — wie unmittelbar zu sehen — mit der ersten zu einer einzigen Translation vereinigt werden kann.

Jede Ortsänderung eines räumlichen Systems kann also durch eine Translation, verbunden mit einer Rotation um eine Achse, welche in die Translationsrichtung fällt, erzielt werden. Im speziellen Falle kann die Translation oder die Rotation in Wegfall kommen.

Man bezeichnet eine translatorische Bewegung, verbunden mit einer dazu senkrechten Drehung, als Schraubenbewegung. Jede Ortsänderung eines räumlichen Systems kann also durch eine *Schraubenbewegung* hervorgebracht werden.

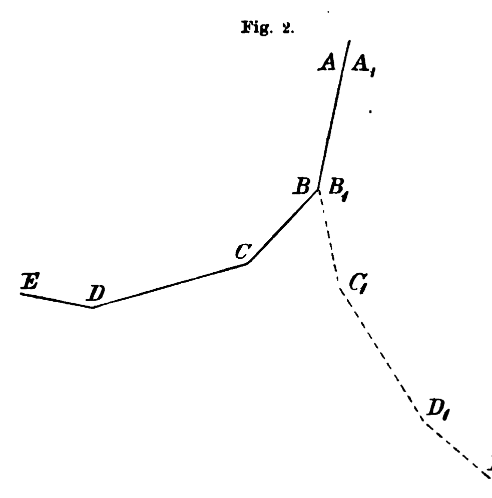
7. Während wir bisher unser Augenmerk nur darauf richteten, durch welche Translationen und Rotationen eine Endlage erreicht werden kann, ohne auf den Verlauf der Bewegung selbst weiter einzugehen, wollen wir jetzt die letztere ins Auge fassen. Zu diesem Zwecke zerlegen wir jede

Bewegung in unendlich kleine Teile. Jede unendlich kleine Bewegung eines Punktes kann als geradlinig angesehen werden; da dies auch für die Verschiebungen der Punkte gilt, welche durch eine Rotation oder Translation oder deren Vereinigung hervorgebracht werden, so kann man eine unendlich kleine Bewegung durch eine Schraubenbewegung ersetzt denken, welche das System aus einer Anfangslage in eine unendlich benachbarte Endlage überführt; im Falle eines ebenen Systems wird hieraus eine Rotation, welche auch in eine Translation übergehen kann.

8. Den Verlauf der gesamten Bewegung untersuchen wir zunächst für das ebene System, das sich in seiner Ebene bewegt, weiter. In jedem Zeitteilchen findet eine unendlich kleine Drehung, jedoch im allgemeinen jedesmal um einen anderen Mittelpunkt statt. Sämtliche momentanen Drehungszentren bilden, als Punkte der unbeweglichen Ebene aufgefafst, eine zusammenhängende Kurve.

Man sagt von einer Kurve, dafs sie auf einer anderen rolle, wenn sie in jedem Augenblicke die letztere berührt und die Kurvenbogen beider, welche zwischen irgend zweien der Berührungspunkte liegen, gleich sind. Wird die erste Bedingung (der jeweiligen Berührung) erfüllt, die zweite aber nicht, so wird die Bewegung als Gleiten bezeichnet.

Fig. 2.



Bei dem Rollen findet in jedem Momente eine Drehung der rollenden Kurve um den Berührungspunkt statt. Um dies einzusehen, braucht man sich nur die beiden Kurven durch gebrochene Linien ersetzt zu denken (Fig. 2), welche aus jeweilig gleichen geradlinigen Teilen bestehen. Das Rollen setzt sich dann aus einer Reihe von Drehungen um die Eckpunkte der gebrochenen Linien zusammen.

Dieses Ergebnis führt uns zu folgender Auffassung der allgemeinsten Bewegung eines starren ebenen Systems in seiner Ebene. Wir denken uns sowohl in der unbeweglichen Ebene als auch in dem beweglichen ebenen Systeme die Kurven konstruiert, welche von der Gesamtheit der momentanen Drehungszentren gebildet werden, indem wir letztere das eine Mal als Punkte der festen Ebene, das andere Mal als Punkte des bewegten Systems auffassen*). Lassen wir nun die zweite

*) Ein Teil der beiden Kurven kann ins Unendliche fallen; ein Teil der Bewegung ist dann eine Translation.

Kurve auf der ersten rollen, so wird eben die zu Grunde gelegte Bewegung erzeugt. Also:

Die allgemeinste Bewegung eines ebenen Systems in seiner Ebene kann dadurch erzeugt werden, dafs man eine beliebig vorgezeichnete Kurve des Systems auf einer ebenso beliebigen Kurve der unbeweglichen Ebene rollen läfst.

9. Die Bewegung eines räumlichen Systems, von dem ein Punkt festliegt, läfst eine ganz analoge Betrachtung zu. In jedem Momente findet eine Drehung um eine Momentanachse statt, die natürlich durch den festen Punkt geht. Die Gesamtheit der Momentanachsen bildet eine Kegelfläche. Sagt man, dafs eine Kegelfläche auf einer anderen rollt, wenn sie sie fortwährend in einer Geraden berührt und der Winkelabstand (gemessen auf der abgewickelten Kegelfläche) zwischen je zwei entsprechenden Berührungsgeraden bei beiden Kegelflächen derselbe ist, so läfst sich der Satz aussprechen: Die Bewegung eines starren Systems, von dem ein Punkt fest bleibt, kann durch das Rollen einer geeigneten Kegelfläche des Systems auf einer anderen, festen erzeugt werden; die Spitze beider Kegelflächen ist der feste Punkt des Systems.

10. Die allgemeinste Bewegung eines räumlichen Systems kann in jedem Zeitteilchen als eine Schraubenbewegung um eine Achse, welche fortwährend ihre Lage ändert, aufgefafst werden. Die Gesamtheit dieser Momentanachsen mufs eine geradlinige Fläche, also eine sogenannte Regelfläche bilden. Wir wollen von zwei Regelflächen sagen, dafs sie aufeinander rollen, wenn sie sich fortwährend längs einer Geraden berühren, während irgend welche Kurven beider, welche fortwährend miteinander in Berührung kommen, der zweiten Bedingung des Rollens genügen.

Wir können den Satz aussprechen, dafs die allgemeinste Bewegung eines räumlichen Systems durch Rollen einer demselben angehörigen Regelfläche auf einer festen Regelfläche, verbunden mit einem Gleiten längs der jeweilig berührenden Geraden, erzeugt werden kann.

Die weitere Untersuchung der Bewegung räumlicher Systeme giebt zur Aufstellung zahlreicher rein geometrischer Sätze Veranlassung, die hier übergangen werden müssen. Erwähnt möge als Beispiel werden, dafs die Tangenten an die Bahnen aller Punkte einer Geraden des Systems, genommen für denselben Moment der Bewegung, ein hyperbolisches Paraboloid bilden; denn offenbar schneiden diese Tangenten aus zwei unendlich benachbarten Lagen jener Geraden kongruente Punktreihen aus*). Überhaupt werden gerade auf diesem mechanisch-geometrischen Gebiete, das sich in neuerer Zeit umfassender Bearbeitungen zu er-

*) In dem speziellen Falle, dafs die beiden Nachbarlagen der Geraden einen Punkt gemeinsam haben, tritt an Stelle des Paraboloids eine Ebene; verschiebt sich die Gerade in sich selbst, so fallen die Tangenten mit ihr zusammen.

freuen hatte, die Methoden der synthetischen Geometrie mit Vorteil angewandt*).

11. Bisher haben wir die zu der Bewegung gebrauchte Zeit nicht in Betracht gezogen; dies soll nunmehr geschehen. Bei der Translation beschreiben beliebige Punkte des bewegten Systems, wie die einfachsten Betrachtungen zeigen, kongruente Bahnen, haben also in jedem Momente dieselbe Geschwindigkeit; wir können dieselbe daher auch als die Geschwindigkeit der Translation bezeichnen.

Bei der Rotation beschreiben offenbar alle die Rotationsachse senkrecht schneidenden Geraden in gleicher Zeit gleiche Winkel ϑ; die Gröfse $\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$, in der ϑ wie gewöhnlich als Bogen gemessen ist, heifst die Winkel- oder Rotationsgeschwindigkeit des Systems. Die lineare Geschwindigkeit eines Systempunktes, welcher von der Rotationsachse den senkrechten Abstand r hat, ist

$$(1) \qquad v = r\omega.$$

12. Während wir früher das Resultat irgend welcher Bewegungen eines starren Systems durch wenige einfache ersetzten, wollen wir jetzt untersuchen, in welcher Weise sich das Resultat mehrerer unendlich kleiner Bewegungen, auch in Bezug auf die gebrauchte Zeit, durch Elementarbewegungen ersetzen läfst. Unter Elementarbewegungen wollen wir unendlich kleine Translationen und Rotationen verstehen. Diese Zusammensetzung der Bewegungen des starren Systems steht nicht auf gleicher Linie mit der Zusammensetzung der Geschwindigkeiten und Kräfte, von welchen ein materieller Punkt gleichzeitig affiziert wird. Dort handelte es sich nämlich um ein nicht mathematisch zu begründendes, rein physikalisches Gesetz. Hier haben wir es mit lediglich mathematischen Betrachtungen zu thun; es soll untersucht werden, durch welche Elementarbewegung der Effekt mehrerer unendlich kleiner, gleichzeitiger Bewegungen ersetzt werden kann.

Beim ebenen und räumlichen Systeme müssen sich mehrere Translationen nach dem Parallelogramm der Geschwindigkeiten zusammensetzen; denn dieselben erteilen jedem einzelnen Punkte des Systems die gleichen Geschwindigkeiten, die einzeln nach dem genannten (hier im rein kinematischen Sinne gebrauchten) Satze zusammensetzbar sind.

13. Zwei Rotationen bei einem ebenen Systeme oder eine Rotation und eine Translation müssen sich, wie aus dem Vorhergehenden evident ist, durch eine Rotation (oder im speziellen Falle durch eine Translation) ersetzen lassen; es handelt sich nur darum, deren Zentrum und Rotationsgeschwindigkeit zu finden. Sind zwei Rotationen mit den

---

*) Eine eingehende Behandlung des Gegenstandes findet man bei Schell a. a. O., ferner in der Spezialarbeit von Schoenflies, Geometrie der Bewegung in synthetischer Darstellung; Leipzig 1886. Die Litteratur des Gebietes ist so umfangreich, dafs sie hier nicht zusammengestellt werden kann.

Mittelpunkten O_1 und O_2 und den Rotationsgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 gegeben, wobei die letzteren Gröfsen als positiv oder negativ gerechnet werden, je nachdem die Drehung dem Drehungssinne des Uhrzeigers gleichartig oder entgegengesetzt ist, so läfst sich auf der Geraden $O_1 O_2$ ein Punkt O ausfindig machen, welcher seine Lage in einem Zeitmoment dt nicht ändert. Setzen wir nämlich $O_1 O_2 = d$, $O_1 O = x$, so genügt O dieser Bedingung, wenn

$$x\omega_1 dt = -(x - d)\,\omega_2 dt,$$

also

$$x = \frac{d\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \tag{2}$$

ist. Dabei mufs auf das Vorzeichen von x Rücksicht genommen werden; liegt O von O_1 aus nach der Richtung von O_2 zu, so ist x positiv. Haben ω_1 und ω_2 gleiches Zeichen, so ist $0 < x < d$, d. h. x liegt zwischen O_1 und O_2. Andernfalls liegt O aufserhalb $O_1 O_2$ und zwar demjenigen Rotationszentrum näher, um welches die langsamere Drehung stattfindet. Um die resultierende Drehungsgeschwindigkeit ω zu bestimmen, bemerken wir, dafs O_1 nur eine Verschiebung erfährt, welche von der Rotation um O_2 herrührt. Daher mufs

$$x\omega dt = d\omega_2 dt,$$

also bei Benutzung von (2)

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 \tag{3}$$

sein. Die resultierende Rotationsgeschwindigkeit ist also die algebraische Summe der einzelnen Rotationsgeschwindigkeiten.

Falls die Rotationsgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 entgegengesetzt gleich sind, so wird $x = \infty$ und $\omega = 0$; es resultiert also eine verschwindend kleine Rotationsgeschwindigkeit um einen unendlich fernen Mittelpunkt, d. h. die Rotation geht in eine Translation über. Die Geschwindigkeit v derselben folgt aus der Bemerkung, dafs der in der Mitte zwischen O_1 und O_2 gelegene Punkt (und ebenso jeder andere) während der Zeit dt die Verschiebung $2\omega_1 \frac{d}{2} dt$ erleidet. Es ist also

$$v = d\omega_1, \tag{4}$$

wo der Sinn von v mit der Richtung zusammenfällt, in welcher beide Rotationen einen Punkt zwischen O_1 und O_2 zu verschieben suchen.

Durch Umkehrung dieser Betrachtung bestimmen wir die Resultierende einer Rotation (Mittelpunkt O_1, Geschwindigkeit ω_1) und einer Translation (Geschwindigkeit v) als eine Rotation, deren Geschwindigkeit $\omega = \omega_1$ ist; der Mittelpunkt O derselben liegt von O_1 aus in der zur Translation senkrechten Richtung um

$$d = \frac{v}{\omega_1} \tag{5}$$

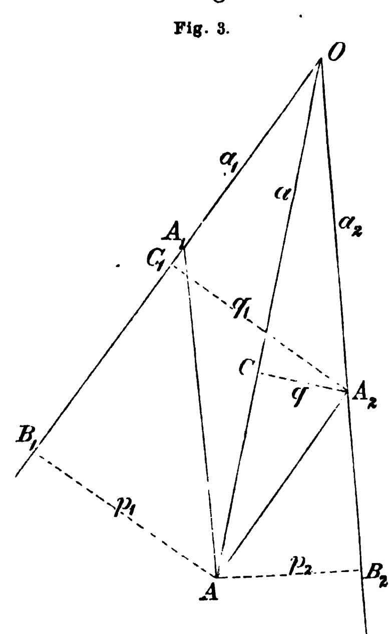
entfernt und zwar auf derjenigen Seite von O, auf der Rotation und Translation sich entgegenwirken. Die Richtigkeit hiervon, die auch leicht direkt zu begründen ist, geht daraus hervor, dafs bei Zufügung einer Rotation, welche der gegebenen entgegengesetzt ist, zu der Resultante die gegebene Translation resultieren mufs; dies ist nach dem Vorhergehenden wirklich der Fall.

Umgekehrt läfst sich jede Rotation durch eine andere von gleicher Geschwindigkeit, welche einen beliebigen Punkt zum Mittelpunkte hat, und eine Translation ersetzen.

14. Die Resultate der vorigen Nummer lassen sich auf ein räumliches System anwenden, welches nur Bewegungen erfährt, durch die ein System von Parallelebenen in sich selbst verschoben wird; man kann sagen, dafs alsdann ein unendlich ferner Punkt, welcher in der Richtung der Normalen jenes Ebenensystems liegt, seinen Ort nicht ändert.

Grofse Analogie hierzu bietet die Zusammensetzung zweier Rotationen (ω_1 und ω_2), deren Achsen a_1 und a_2 sich in einem Punkte im Endlichen O schneiden (Fig. 3). Das Resultat nimmt eine sehr einfache Gestalt an, wenn man Richtung und Gröfse der Rotationen in geeigneter Weise geometrisch versinnbildlicht. Wir tragen auf a_1 und a_2 von O aus Strecken OA_1 und OA_2 ab, welche den Rotationsgeschwindigkeiten ω_1 und ω_2 proportional sind, und zwar in solcher Richtung, dafs die Rotationen auf ihnen von O aus gesehen den Drehungssinn des Uhrzeigers zu haben scheinen. Konstruieren wir dann das Parallelogramm A_1OA_2A, so können wir behaupten, dafs die Diagonale OA die Drehungsachse der resultierenden Rotation ist und zugleich der Gröfse a und Richtung nach diese Rotation ω determiniert.

Fig. 3.



Um dies zu begründen, müssen wir zunächst zeigen, dafs aufser O noch ein Punkt von OA, z. B. A, bei Statthaben der beiden Rotationen in Ruhe bleibt. Fällt man von A auf OA_1 und OA_2 die Perpendikel $AB_1 = p_1$ und $AB_2 = p_2$, so suchen die beiden Rotationen den Punkt A in der Zeit dt um $p_1\omega_1 dt$ und $p_2\omega_2 dt$ in entgegengesetzter Richtung zu verschieben. Es ist aber

$$p_1 = a \sin AOA_1, \quad p_2 = a \sin AOA_2 = a \sin OAA_1;$$

ferner im Dreieck OAA_1 (wir setzen $OA_1 = a_1$, $OA_2 = a_2$)

$$\sin AOA_1 : \sin OAA_1 = A_1A : OA_1 = a_2 : a_1,$$

so dafs

$$p_1 : p_2 = a_2 : a_1 = \omega_2 : \omega_1$$

oder

$$(6) \qquad p_1\omega_1 = p_2\omega_2$$

folgt. A bleibt also thatsächlich in Ruhe.

Um die Geschwindigkeit der Drehung um AO zu berechnen, betrachten wir etwa die Bewegung des Punktes A_2, der nur durch die Rotation um OA_1, nicht durch die um OA_2 in Bewegung gesetzt wird. Fällt man von A_2 auf OA_1 und OA die Perpendikel $A_2C_1 = q_1$ und $A_2C = q$, so mufs

$$(7) \qquad q_1\omega_1 = q\omega$$

sein. Nun ist aber

$$q_1 = a_2 \sin A_2OA_1 = a_2 \sin OA_2A,$$
$$q = a_2 \sin A_2OA,$$

und im Dreieck OA_2A

$$\sin OA_2A : \sin A_2OA = a : a_1,$$

so dafs

$$q_1 : q = a : a_1$$

oder

$$(8) \qquad q_1a_1 = qa$$

wird. Aus (7) und (8) folgt

$$\omega_1 : \omega = a_1 : a,$$

so dafs wirklich durch die Länge a der Diagonale die resultierende Rotationsgeschwindigkeit im Verhältnis zu den gegebenen dargestellt wird. Aufserdem überzeugt man sich durch die Anschauung, dafs die Richtung dieser Diagonale in jedem Falle auch den Drehungssinn der Resultante richtig repräsentiert.

Somit haben wir den Satz vom Parallelogramm der Rotationen:

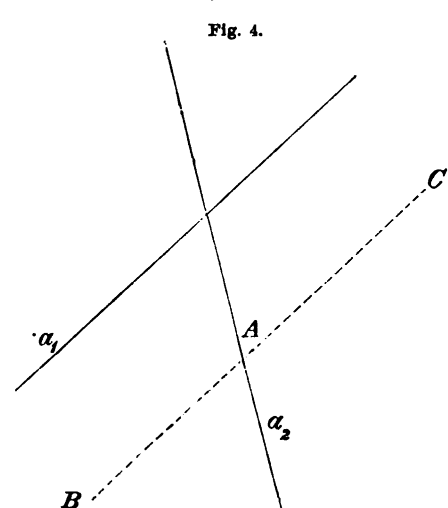
Schneiden sich die Achsen zweier Rotationen in einem Punkte und denkt man sich auf denselben vom Schnittpunkte aus Strecken abgetragen, welche den Rotationsgeschwindigkeiten proportional und so gerichtet sind, dafs vom Schnittpunkte aus gesehen die Rotationen um sie den Drehungssinn des Uhrzeigers besitzen, so stellt die durch den Schnittpunkt gehende Diagonale des durch die Strecken bestimmten Parallelogramms die resultierende Drehungsachse und durch ihre Gröfse und Richtung die Geschwindigkeit und den Drehungssinn der resultierenden Rotation dar.

Dafs insbesondere die Geschwindigkeiten von Rotationen um dieselbe Achse sich algebraisch summieren, ist selbstverständlich.

Finden mehrere Rotationen statt, deren Achsen sich in einem Punkte schneiden, so können sie nach und nach zu einer einzigen vereinigt werden; das graphische Verfahren ist analog dem bei der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten, welche demselben materiellen Punkte erteilt werden, angewandten. Ebenso braucht nicht weiter auseinandergesetzt zu werden, wie man eine Rotation in mehrere (um sich schneidende Achsen) zerlegt.

15. Wir sind jetzt in den Stand gesetzt, beliebige Elementarbewegungen dem Wege und der Geschwindigkeit nach zusammenzusetzen. Soll eine Rotation mit einer beliebig gerichteten Translation vereinigt werden, so zerlegt man die letztere in zwei Komponenten, von denen die eine in die Richtung der Rotationsachse fällt, während die andere auf dieser Richtung senkrecht steht. Die letztere Komponente und die Rotation, welche beide die zur Rotationsachse senkrechten Ebenen in sich selbst verschieben, können nach Nr. 13 zu einer Rotation vereinigt werden; die andere Komponente der Translation bewirkt eine Verschiebung längs der Rotationsachse, also mit der Rotation zusammen eine Schraubenbewegung.

Fig. 4.



Um zwei Rotationen, deren Achsen a_1 und a_2 sich nicht schneiden, zusammenzusetzen (Fig. 4), lege man durch einen beliebigen Punkt A auf a_2 eine Parallele BC zu a_1. Dann läfst sich die Rotation um a_1 durch eine gleiche um BC und eine Translation, welche zur Ebene von a_1 und BC senkrecht seht, ersetzen; die Gröfse der letzteren ist nach früheren Methoden zu bestimmen. Die Rotationen um die sich schneidenden Achsen a_2 und BC lassen sich in eine zusammenfassen, mit der dann die Translation zu einer Schraubenbewegung vereinigt werden kann.

Durch diese Untersuchungen ist dargethan, wie irgend welche Bewegungen des starren Systems, die eine unendlich kleine Dauer haben, sich der Wirkung und der Geschwindigkeit nach in eine Schraubenbewegung mit zu berechnender Translations- und Rotationsgeschwindigkeit umwandeln lassen.

16. Unter den mannigfachen Methoden, eine unendlich kleine Bewegung eines starren Systems durch andere zu ersetzen, ist noch besonders die folgende von Wichtigkeit. Wir behaupten, dafs jede solche Bewegung durch Translationen nach drei festen, aufeinander senkrechten Achsen und Rotationen um dieselben ersetzt werden kann. Man kann nämlich einen beliebigen Punkt O durch eine

Translation an die ihm zugewiesene Stelle bringen; diese Translation läſst sich aber in drei Translationen nach den Achsenrichtungen zerlegen. Die noch weiter nötige Bewegung läſst sich als eine Rotation um eine durch O gehende Achse betrachten. Denkt man sich nun in der vorhin besprochenen Weise die Rotationsgeschwindigkeit durch eine auf der Achse abgetragene Strecke dargestellt, so braucht man diese nur auf die drei Achsen zu projizieren, um die Rotationen der Gröſse und dem Sinne nach zu erhalten, welche um diese Achsen stattfindend die einzige zu ersetzen im stande sind. Der Satz vom Parallelogramm der Rotationen liefert hierfür die Begründung.

17. Mit der Kinematik des starren Systems steht die Theorie der relativen Bewegung im engsten Zusammenhange, weshalb wir einige kurze Betrachtungen über diesen Gegenstand beifügen wollen. Wir untersuchen die an sich willkürliche Bewegung eines Punktes, bezogen auf ein starres System, welches selbst eine willkürliche Bewegung ausführt.

Befindet sich der bewegliche Punkt zu einer bestimmten Zeit in A, um sich in dem Zeitteile dt nach B zu begeben, während der Punkt des starren Systems, welcher sich anfänglich in A befand, unterdessen nach C gelangt, so repräsentieren die drei Strecken AB, AC, CB dem Gröſsenverhältnisse nach die absolute Geschwindigkeit des bewegten Punktes, die absolute Geschwindigkeit des entsprechenden Systempunktes und die relative Geschwindigkeit des bewegten Punktes. Bezeichnet man die Zusammensetzung zweier Geschwindigkeitskomponenten nach dem Parallelogramme der Geschwindigkeiten als ihre Addition, die Addition einer negativ genommenen Geschwindigkeit als ihre Subtraktion, so ergiebt sich unmittelbar das Resultat:

Die relative Geschwindigkeit eines bewegten Punktes in Bezug auf ein bewegtes starres System ist gleich der Differenz der absoluten Geschwindigkeit des ersteren und des momentan mit ihm zusammenfallenden Systempunktes.

Weniger einfach ist die Herleitung der relativen Beschleunigung, der Zunahme der relativen Geschwindigkeit, dividiert durch das Zeitelement. Es scheint nahe zu liegen, daſs man von der Zunahme der absoluten Geschwindigkeit des bewegten Punktes die Zunahme der Geschwindigkeit des entsprechenden Systempunktes zu subtrahieren habe. Man muſs jedoch beachten, daſs der bewegte Punkt in dem starren Systeme fortwährend seinen Ort verändert, daſs also fortwährend neue Punkte des letzteren zum Vergleich herangezogen werden müssen. Freilich ist diese Beschleunigungsänderung innerhalb eines verschwindenden Zeitelementes eine verschwindend kleine, allein die Lagenänderung selbst bringt, wie wir sofort sehen werden, eine seitliche Beschleunigung, die sogenannte zusammengesetzte Zentrifugalbeschleunigung, zuwege. Die relative Beschleunigung setzt sich daher aus drei Komponenten zusammen: der absoluten Beschleunigung des bewegten Punktes, der negativ genommenen absoluten Beschleunigung des momentan

mit ihm zusammenfallenden Systempunktes und der zusammengesetzten Zentrifugalbeschleunigung.

Die Beschleunigung des Systempunktes kann nach dem Früheren in zwei Teile zerlegt werden. Da wir nämlich die Bewegung des starren Systems in eine Rotation um eine Momentanachse und eine Translation längs der letzteren zerlegen können, so zerfällt die Beschleunigung in die durch die Rotation indizierte Zentripetalbeschleunigung und die Beschleunigung der Translation.

Was nun die Berechnung der zusammengesetzten Zentrifugalbeschleunigung anlangt, so können wir auf die speziellere Untersuchung in § 20, 2 zurückgreifen. Wir berechneten dort die seitliche Beschleunigung, welche ein auf der Erdoberfläche bewegter Punkt durch die Rotation der Erde erfährt. Man braucht nur die Erdachse durch die Momentanachse, den Winkel φ in § 20, Fig. 13, durch den Winkel zu ersetzen, welchen die Momentanachse mit der durch die relative Bewegungsrichtung gelegten Ebene μ bildet, die zugleich auf der durch die Momentanachse und den bewegten Punkt gelegten Ebene ν senkrecht steht. So erhalten wir nach § 20, (6) für die zusammengesetzte Zentrifugalbeschleunigung den Wert

$$k = 2\omega v \sin\varphi. \tag{10}$$

Hierin bezeichnet ω die momentane Rotationsgeschwindigkeit um die Momentanachse, v die relative Geschwindigkeit des bewegten Punktes, φ den Winkel zwischen der oben definierten Ebene μ und der Momentanachse. Diese zusammengesetzte Zentrifugalbeschleunigung fällt in die Ebene μ und ist dem Drehungssinne (in Bezug auf eine normal zu μ durch den bewegten Punkt im Anfangsmomente gelegte Achse) nach der Rotationsgeschwindigkeit entgegengesetzt, wenn man sich zum Vergleiche die Ebene μ auf dem kürzesten Wege so gedreht denkt, daſs sie zur Momentanachse normal wird.

§ 52.

Analytische Behandlung desselben Gegenstandes.

1. Um die Kinematik des starren Systems auch einer analytischen Behandlung zu unterwerfen, führen wir zwei rechtwinklige Koordinatensysteme ein. Das eine, dessen Achsen im Raume festgelegt sind, möge durch x, y, z, das andere, dessen Achsen mit dem bewegten starren Systeme fest verbunden sind, durch ξ, η, ζ bezeichnet werden. Nach den Gesetzen der Koordinatentransformation (vgl. hierzu und zu dem Folgenden die Formeln von § 10, 6) ist

$$\begin{cases} x = a + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta, \\ y = b + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta, \\ z = c + \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta, \end{cases} \tag{1}$$

worin a, b, c lineare Konstanten, die Koeffizienten α_1 u. s. w. aber die Richtungskosinus

$$\alpha_1 = \cos(x, \xi), \quad \alpha_2 = \cos(x, \eta), \quad \alpha_3 = \cos(x, \zeta), \quad \beta_1 = \cos(y, \xi) \text{ u.s.w.}$$

sind. Die Umkehrungen der Gleichungen (1) sind

$$(2) \qquad \begin{cases} \xi = \alpha_1 (x - a) + \beta_1 (y - b) + \gamma_1 (z - c), \\ \eta = \alpha_2 (x - a) + \beta_2 (y - b) + \gamma_2 (z - c), \\ \zeta = \alpha_3 (x - a) + \beta_3 (y - b) + \gamma_3 (z - c). \end{cases}$$

Es gelten die Gleichungen [§ 10, (10), (11)]:

$$(3) \qquad \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad \text{u. s. w.,}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0 \\ \quad \text{u. s. w.,} \\ \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0 \\ \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Setzen wir die beiden Koordinatensysteme derart fest, dafs ihre entsprechenden, positiv gerichteten Achsen durch eine passende Verschiebung zum Zusammenfallen gebracht werden können, so ist

$$(5) \qquad \varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1$$

und daher

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2, & \alpha_2 = \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3, & \alpha_3 = \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1, \\ \beta_1 = \gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2, & \beta_2 = \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3, & \beta_3 = \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1, \\ \gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, & \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, & \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1. \end{cases}$$

Die drei Gröfsen a, b, c sind voneinander unabhängig, während die neun Gröfsen α, β, γ auf drei zurückgeführt werden können, da das bewegliche System, nachdem sein Nullpunkt festgelegt ist, durch drei Bestimmungen eindeutig festgelegt werden kann. Die aufgestellten, voneinander nicht unabhängigen Relationen sind mehr als ausreichend, um die sechs Gleichungen zwischen den α, β, γ zu liefern.

2. Erleidet das starre System eine unendlich kleine Ortsveränderung, durch welche ein Punkt desselben von x, y, z nach $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ versetzt wird, so ist

$$(7) \qquad \begin{cases} \delta x = \delta a + \xi\delta\alpha_1 + \eta\delta\alpha_2 + \zeta\delta\alpha_3, \\ \delta y = \delta b + \xi\delta\beta_1 + \eta\delta\beta_2 + \zeta\delta\beta_3, \\ \delta z = \delta c + \xi\delta\gamma_1 + \eta\delta\gamma_2 + \zeta\delta\gamma_3. \end{cases}$$

Hierin sind δa, δb, δc voneinander unabhängig, während die $\delta\alpha_1$, $\delta\beta_1$, $\delta\gamma_1$

u. s. w. durch sechs Relationen verbunden sind, welche aus den vorhergehenden Gleichungen leicht folgen.

Von Wichtigkeit ist es, in den Gleichungen (7) die Gröfsen ξ, η, ζ mittels (2) durch x, y, z zu ersetzen. Schreiben wir zur Abkürzung

$$(8)\qquad \begin{cases} \delta\alpha = \beta_1\delta\gamma_1 + \beta_2\delta\gamma_2 + \beta_3\delta\gamma_3, \\ \delta\beta = \gamma_1\delta\alpha_1 + \gamma_2\delta\alpha_2 + \gamma_3\delta\alpha_3, \\ \delta\gamma = \alpha_1\delta\beta_1 + \alpha_2\delta\beta_2 + \alpha_3\delta\beta_3 \end{cases}$$

und beachten, dafs aus (3) und (4) die Relationen

$$(9)\qquad \alpha_1\delta\alpha_1 + \alpha_2\delta\alpha_2 + \alpha_3\delta\alpha_3 = 0$$

u. s. w.,

$$(10)\qquad \gamma_1\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\beta_3 = -\delta\alpha$$

u. s. w.

folgen, so ergiebt jene Ersetzung das einfache Resultat

$$(11)\qquad \begin{cases} \delta x = \delta a + (z - c)\,\delta\beta - (y - b)\,\delta\gamma, \\ \delta y = \delta b + (x - a)\,\delta\gamma - (z - c)\,\delta\alpha, \\ \delta z = \delta c + (y - b)\,\delta\alpha - (x - a)\,\delta\beta, \end{cases}$$

worin jetzt nur noch sechs voneinander unabhängige Variationen der Konstanten vorkommen.

3. Die Verschiebungen δx, δy, δz, welche der ursprünglich in x, y, z befindliche Punkt des starren Systems erfährt, lassen sich aus zwei Teilen zusammensetzen, welche einer einfachen Interpretation zugänglich sind, nämlich aus

$$(12)\qquad \delta x = \delta a, \quad \delta y = \delta b, \quad \delta y = \delta c$$

und

$$(13)\qquad \begin{cases} \delta x = (z - c)\,\delta\beta - (y - b)\,\delta\gamma, \\ \delta y = (x - a)\,\delta\gamma - (z - c)\,\delta\alpha, \\ \delta z = (y - b)\,\delta\alpha - (x - a)\,\delta\beta. \end{cases}$$

Die Verschiebungen (12) stellen eine *Translation* dar, durch welche jeder Punkt des Systems um die Strecke

$$\sqrt{\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2}$$

in einer durch die Richtungskosinus

$$\frac{\delta a}{\sqrt{\delta a^2 + \delta b^2 + \delta c^2}} \text{ u. s. w.}$$

bestimmten Richtung verrückt wird.

Um auch die Gleichungen (13) zu integrieren, beachten wir, dafs die rechten Seiten derselben gleichzeitig verschwinden, wenn

$$(14)\qquad \frac{x-a}{\delta\alpha} = \frac{y-b}{\delta\beta} = \frac{z-c}{\delta\gamma}$$

ist; die unendlich kleinen Nenner in (14) können natürlich durch endliche Gröfsen ersetzt werden, welche $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ proportional sind. Da (14) die Gleichung einer Geraden ist, so folgt, dafs δx, δy, δz für alle Punkte verschwinden, welche auf einer Geraden liegen. Die Verschiebungen (13) stellen also zusammen eine Drehung um die Achse (14) dar, die durch den Punkt $x = a$, $y = b$, $z = c$ hindurch geht und deren Richtungskosinus den Gröfsen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ proportional sind.

Um den Drehungswinkel (d. h. den entsprechenden Bogen mit dem Radius 1) zu bestimmen, fassen wir die Bewegung eines Punktes x, y, z ins Auge, der auf einer im Punkte a, b, c auf (14) errichteten Senkrechten liegt und von a, b, c die Entfernung 1 hat. Die erste Bedingung wird durch die Gleichung*)

$$(15)\qquad (x-a)\,\delta\alpha + (y-b)\,\delta\beta + (z-c)\,\delta\gamma = 0,$$

die zweite durch

$$(16)\qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = 1$$

ausgedrückt.

Nun folgt aber aus (13) nach einer leicht zu verifizierenden Umformung

$$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = (\delta\alpha^2 + \delta\beta^2 + \delta\gamma^2)\,[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2] \\ - [(x-a)\,\delta\alpha + (y-b)\,\delta\beta + (z-c)\,\delta\gamma]^2$$

oder bei Benutzung von (15) und (16)

$$(17)\qquad \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 = \delta\alpha^2 + \delta\beta^2 + \delta\gamma^2.$$

Da nun der gesuchte unendlich kleine Drehungsbogen der Weg eines Punktes, dividiert durch seinen Abstand von der Drehungsachse, ist, so erhalten wir für ihn die Gröfse

$$(18)\qquad \sqrt{\delta\alpha^2 + \delta\beta^2 + \delta\gamma^2}.$$

Um auch den Sinn der Drehung klarzustellen, legen wir der Drehungsachse (14) einen bestimmten Richtungssinn bei. Derselbe möge dadurch definiert sein, dafs bei den Richtungskosinus der Achse

$$(18\text{a})\qquad \frac{\delta\alpha}{\sqrt{\delta\alpha^2 + \delta\beta^2 + \delta\gamma^2}},\quad \frac{\delta\beta}{\sqrt{\delta\alpha^2 + \delta\beta^2 + \delta\gamma^2}},\quad \frac{\delta\gamma}{\sqrt{\delta\alpha^2 + \delta\beta^2 + \delta\gamma^2}}$$

dem Nenner das positive Zeichen gegeben wird. Es ist leicht zu erkennen, bei welcher Anordnung des Koordinatensystems dann, den Festsetzungen von § 51, 14 entsprechend, die Drehung von der positiven Seite der Achse aus betrachtet im Sinne des Uhrzeigers vor sich zu gehen scheint. Wir können uns nämlich vorstellen, dafs die Drehungs-

*) Die Richtungskosinus der Verbindungslinie von x, y, z und a, b, c sind nämlich den Gröfsen $x-a$, $y-b$, $z-c$, diejenigen der Achse, wie eben angegeben, den Gröfsen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ proportional.

achse stetig geändert wird, wobei kein Umschlagen des Drehungssinnes statthaben kann. Lassen wir so $\delta\alpha = \delta\beta = 0$ werden, so fällt bei positivem $\delta\gamma$ die Drehungsachse mit der Richtung der positiv gerichteten z-Achse zusammen. Aus (13) wird dann

$$\delta x = -(y-b)\,\delta\gamma, \quad \delta y = (x-a)\,\delta\gamma, \tag{18b}$$

und man erkennt hieraus unmittelbar, dafs die Drehung von der Richtung der positiven x-Achse nach derjenigen der positiven y-Achse zu vor sich geht. Denkt man sich daher die positive z-Achse senkrecht nach oben, die positive x-Achse nach rechts, die positive y-Achse nach vorn gerichtet, so erfolgt die Bewegung wirklich gemäfs § 51, 14.

Durch die analytische Untersuchung gelangen wir also zu denselben Verhältnissen wie in § 51.

4. Die durch (13) dargestellte Drehung kann aus den drei Drehungen zusammengesetzt gedacht werden, welche man durch Nullsetzen je zweier der Gröfsen $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ erhält. Diese Drehungskomponenten haben Parallele zu den Koordinatenachsen, welche durch den Punkt a, b, c gehen, zu Rotationsachsen, während ihre Gröfsen durch die absoluten Werte von $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ dargestellt werden. Man gelangt daher zu dem im vorigen Paragraphen in etwas anderer Form ausgesprochenen Resultat, dafs jede unendlich kleine Bewegung des starren Systems durch drei Translationen nach den Richtungen der Koordinatenachsen und durch drei Drehungen um Parallele zu den Koordinatenachsen ersetzt werden kann.

5. Der Nullpunkt des Koordinatensystems x, y, z ist ein ganz willkürlicher, ebenso wie die Richtung der Koordinatenachsen. Wir wollen letztere so bestimmen, dafs die z-Achse der Achse der Drehung parallel wird, welche einen Bestandteil der betrachteten Ortsänderung bildet. Die Gleichungen (11) werden dann zu

$$\delta x = \delta a - (y-b)\,\delta\gamma, \quad \delta y = \delta b + (x-a)\,\delta\gamma, \quad \delta z = \delta c. \tag{19}$$

Nun können wir noch den Nullpunkt des Koordinatensystems beliebig verlegen, d. h. die Gröfsen a, b, c willkürlich ändern. Geben wir insbesondere a und b solche Werte, dafs

$$\delta a + b\,\delta\gamma = 0, \quad \delta b - a\,\delta\gamma = 0 \tag{20}$$

wird, so gehen die Gleichungen (19) in

$$\delta x = -y\,\delta\gamma, \quad \delta y = x\,\delta\gamma, \quad \delta z = \delta c \tag{21}$$

über. Diese Gleichungen stellen eine Rotation um die z-Achse, verbunden mit einer Translation längs derselben, dar. Wir gelangen daher wieder zu dem Ergebnis, dafs jede infinitesimale Bewegung eines starren Systems durch eine infinitesimale Schraubenbewegung ersetzt werden kann.

6. Wir bezogen bisher die Verschiebungen auf das feste Koordinatensystem der x, y, z; allein es ist auch möglich, sie durch das mit dem

Körper festverbundene System der ξ, η, ζ auszudrücken. Während wir z. B. bisher fragten, welche Lage im Raume die momentane Achse der Schraubenbewegung habe, könnten wir jetzt ihre Lage in dem Körper selbst aufsuchen.

Die Koordinaten des Punktes ξ, η, ζ mögen durch die unendlich kleine Verrückung des Körpers die auf das Koordinatensystem der ξ, η, ζ in seiner ursprünglichen Lage bezogenen Änderungen $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ erfahren haben. Dann ist nach (2)

$$(22)\qquad \begin{cases} \delta\xi = \alpha_1\delta x + \beta_1\delta y + \gamma_1\delta z, \\ \delta\eta = \alpha_2\delta x + \beta_2\delta y + \gamma_2\delta z, \\ \delta\zeta = \alpha_3\delta x + \beta_3\delta y + \gamma_3\delta z. \end{cases}$$

Sowie es uns gelang, die Verschiebungen δx, δy, δz durch die sechs Gröfsen δa, δb, δc, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ auszudrücken, so werden wir die $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ durch sechs neue Gröfsen darstellen, welche durch die Gleichungen

$$(23)\qquad \begin{cases} \delta a' = \alpha_1\delta a + \beta_1\delta b + \gamma_1\delta c, \\ \delta b' = \alpha_2\delta a + \beta_2\delta b + \gamma_2\delta c, \\ \delta c' = \alpha_3\delta a + \beta_3\delta b + \gamma_3\delta c; \\ \delta\alpha' = \alpha_3\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\gamma_2, \\ \delta\beta' = \alpha_1\delta\alpha_3 + \beta_1\delta\beta_3 + \gamma_1\delta\gamma_3, \\ \delta\gamma' = \alpha_2\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\gamma_1 \end{cases}$$

definiert sind. Bildet man nämlich die Ausdrücke (22) mit Hilfe der Gleichungen (7), so erhält man bei Beachtung der aus (3) und (4) folgenden Relationen

$$(24)\qquad \alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1 = 0$$

u. s. w.,

$$(25)\qquad \alpha_2\delta\alpha_3 + \beta_2\delta\beta_3 + \gamma_2\delta\gamma_3 = -\delta\alpha'$$

u. s. w.

die Gleichungen

$$(26)\qquad \begin{cases} \delta\xi = \delta a' + \zeta\delta\beta' - \eta\delta\gamma', \\ \delta\eta = \delta b' + \xi\delta\gamma' - \zeta\delta\alpha', \\ \delta\zeta = \delta c' + \eta\delta\alpha' - \xi\delta\beta', \end{cases}$$

welche (13) ganz analog sind. Sie zeigen, dafs man die Verschiebung im neuen Sinne durch eine Translation und eine Rotation um eine Achse, welche durch den Nullpunkt der ξ, η, ζ geht, ersetzen kann.

7. Da die neun Gröfsen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ durch sechs Relationen verbunden sind, so lassen sie sich durch drei geeignet gewählte Gröfsen ausdrücken. Hierdurch geht allerdings die Symmetrie der Rechnung verloren, doch gewinnt die Anschaulichkeit. Wir benutzen

die bereits von Euler eingeführten Winkel ϑ, φ, ψ, welche folgendermaſsen definiert werden.

Zur Festlegung des Körpers ist es nötig, seine ζ-Achse in eine bestimmte Lage zu bringen, wozu zwei Bestimmungsstücke, die Winkel ϑ und φ, erforderlich sind; dann genügt ein weiteres Bestimmungsstück, der Winkel ψ, zur völligen Festlegung. ϑ soll der Winkel sein, welchen die positive ζ-Achse mit der positiven z-Achse bildet, während φ den Winkel bezeichnet, welchen die durch diese beiden Achsen gelegte Ebene mit der positiv gerichteten x-Achse bildet, wobei die Bewegung von der letzteren Achse nach der positiv gerichteten y-Achse hin als die positive angesehen wird. Es ist hiernach

$$\alpha_3 = \cos\varphi \sin\vartheta,$$
$$\beta_3 = \sin\varphi \sin\vartheta,$$
$$\gamma_3 = \cos\vartheta.$$

Mit ψ wollen wir den Winkel bezeichnen, welchen die Ebene der z- und ζ-Achse mit der positiv gerichteten ξ-Achse bildet, bei analoger Festsetzung des Drehungssinnes. Es ist dann

$$\gamma_1 = \sin\vartheta \cos\psi,$$
$$\gamma_2 = \sin\vartheta \sin\psi.$$

Die noch fehlenden vier Gröſsen α_1, α_2, β_1, β_2 lassen sich entweder mittels sphärischer Trigonometrie oder mit Hilfe der Formeln (6) herleiten. So folgen z. B. durch Elimination aus

$$\alpha_1 = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2,$$
$$\beta_2 = \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3$$

für α_1 und β_2 die Gleichungen

$$\alpha_1(1-\gamma_3^2) = -\beta_3\gamma_2 - \gamma_1\gamma_3\alpha_3,$$
$$\beta_2(1-\gamma_3^2) = -\alpha_3\gamma_1 - \gamma_2\gamma_3\beta_3$$

u. s. w.

Man findet schlieſslich

$$(27)\quad \begin{cases} \alpha_1 = -\cos\varphi\cos\psi\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\psi, \\ \alpha_2 = -\cos\varphi\sin\psi\cos\vartheta + \sin\varphi\cos\psi, \\ \alpha_3 = \cos\varphi\sin\vartheta, \\ \beta_1 = -\sin\varphi\cos\psi\cos\vartheta + \cos\varphi\sin\psi, \\ \beta_2 = -\sin\varphi\sin\psi\cos\vartheta - \cos\varphi\cos\psi, \\ \beta_3 = \sin\varphi\sin\vartheta, \\ \gamma_1 = \cos\psi\sin\vartheta, \\ \gamma_2 = \sin\psi\sin\vartheta, \\ \gamma_3 = \cos\vartheta. \end{cases}$$

§ 53.

Die Bedingungen des Gleichgewichtes*) eines starren Systems.

1. Man kann sich ein endliches starres System aus unendlich vielen Punkten x_α, y_α, z_α zusammengesetzt denken. Der starre Zusammenhang der einzelnen Punkte des Systems wird durch eine Reihe von Gleichungen der Form

$$(1) \qquad (x_\alpha - x_\beta)^2 + (y_\alpha - y_\beta)^2 + (z_\alpha - z_\beta)^2 = c_{\alpha\beta}^2$$

mathematisch ausgedrückt; dieselben besagen, dafs je zwei Punkte des Systems immer dieselbe Entfernung voneinander haben. Die Zahl dieser Gleichungen, die bei n Punkten $\frac{n(n-1)}{2}$ beträgt, ist gröfser als notwendig; denn nachdem drei der Punkte durch Angabe ihrer Entfernungen voneinander in eine feste gegenseitige Lage gebracht sind, genügt für die Festlegung jedes weiteren Punktes die Angabe seiner Entfernungen von den drei ersten. Freilich ist diese Bestimmung nur eine zweideutige. Hiernach sind schon

$$3 + 3(n - 3) = 3n - 6$$

Gleichungen der Form (1) genügend.

2. Die Mechanik von Punktesystemen, welche starr verbunden sind, wurde bereits bei der Herleitung des d'Alembert'schen Prinzips erörtert. Wir sind daher — und zwar gerade hier mit sehr grofser Annäherung an die Wirklichkeit — berechtigt, das d'Alembert'sche Prinzip, oder soweit es sich nur um Gleichgewicht handelt, das Prinzip der virtuellen Verrückungen, in Anwendung zu bringen. Wir benutzen dasselbe in der Lagrange'schen Form (§ 22, (5)). Dabei hat es keinen Nachteil, die Gleichungen (1) sämtlich in Rechnung zu bringen, wenn sie auch voneinander nicht unabhängig sind. Wir erhalten, wenn $\lambda_{\alpha,\beta} = \lambda_{\beta,\alpha}$ angenommen wird, das Gleichungssystem

$$(2) \qquad \begin{cases} X_\alpha + \sum^\beta \lambda_{\alpha,\beta}(x_\alpha - x_\beta) = 0, \\ Y_\alpha + \sum^\beta \lambda_{\alpha,\beta}(y_\alpha - y_\beta) = 0, \\ Z_\alpha + \sum^\beta \lambda_{\alpha,\beta}(z_\alpha - z_\beta) = 0. \end{cases}$$

Summieren wir sämtliche X-, Y- und Z-Gleichungen für sich, so heben sich rechts die Glieder paarweise weg, da z. B.

*) Wir behandeln zuerst die Statik, dann die Dynamik des starren Systems. Bei der ersteren spielt die Masse des starren Körpers, wie überhaupt bei allen statischen Untersuchungen, keine Rolle.

$$\lambda_{\alpha,\beta}(x_\alpha - x_\beta) + \lambda_{\beta,\alpha}(x_\beta - x_\alpha) = 0$$

ist; wir finden

$$\sum X_\alpha = 0, \quad \sum Y_\alpha = 0, \quad \sum Z_\alpha = 0. \tag{3}$$

Multiplizieren wir dagegen die Gleichungen der zweiten Gruppe von (2) resp. mit z_α, diejenigen der dritten mit y_α, addieren die Gleichungen derselben Gruppe und subtrahieren das erste Aggregat von dem zweiten, so erhalten wir rechts Glieder von der Form

$$\lambda_{\alpha,\beta}[y_\alpha(z_\alpha - z_\beta) - z_\alpha(y_\alpha - y_\beta)] = \lambda_{\alpha,\beta}(y_\beta z_\alpha - y_\alpha z_\beta),$$

die sich beim Summieren über alle α und β wegheben. Wir finden daher, wenn wir sogleich noch zwei analoge Gleichungen zufügen,

$$\left\{\begin{array}{l} \sum(y_\alpha Z_\alpha - z_\alpha Y_\alpha) = 0, \\ \sum(z_\alpha X_\alpha - x_\alpha Z_\alpha) = 0, \\ \sum(x_\alpha Y_\alpha - y_\alpha X_\alpha) = 0. \end{array}\right. \tag{4}$$

Die sechs Gleichungen (3) und (4) sind die vollständigen Bedingungen des Gleichgewichtes eines starren Körpers; denn sie sind augenscheinlich*) voneinander unabhängig, und wir wissen, dafs sechs Gleichungen zur Fixierung der Lage eines starren Systems hinreichen. Die Summationen sind über alle Punkte des Systems auszudehnen, auf welche Kräfte einwirken. Erstreckt sich die Kraftwirkung auf sämtliche Teile des festen Körpers, so treten an Stelle der Summen Integrale.

Die Gleichungen (3) sagen aus, dafs die Kraftkomponenten, welche in derselben Richtung wirken (denn die Lage des Koordinatensystems ist willkürlich) die algebraische Summe 0 besitzen müssen, wobei es auf ihre Angriffspunkte nicht ankommt. Die Bedeutung der Gleichungen (4) wird aus den folgenden, mehr synthetisch aufbauenden Untersuchungen klar werden; dieselben rühren im wesentlichen von Poinsot her, soweit sie nicht schon von Archimedes durchgeführt wurden. Diese Betrachtungen werden uns von neuem die Gleichgewichtsbedingungen liefern und uns zugleich einen tieferen Einblick in das Wesen der Sache gestatten.

3. Die synthetische Behandlung des Gleichgewichts starrer Systeme beruht auf den einfachsten Voraussetzungen, ohne welche auch die Benutzung des Prinzips der virtuellen Geschwindigkeiten nicht möglich wäre. Wir nehmen selbstverständlich an, dafs Kräfte, welche in demselben Punkte des Systems angreifen, sich nach dem Gesetze

*) Die Gleichungen (3) enthalten voneinander vollständig unabhängige Gröfsen. Dafs sich keine der Gleichungen (4) aus den beiden andern und (3) ableiten läfst, kann durch irgend ein Beispiel dargethan werden; man kann auf unendlich viele Arten fünf der Gleichungen befriedigen, ohne dafs die sechste erfüllt ist.

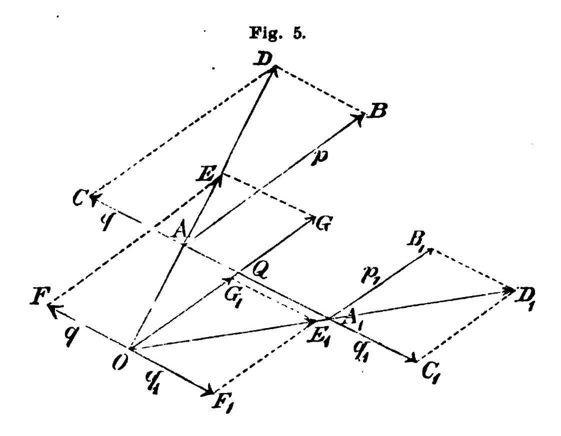
des Parallelogramms der Kräfte zusammensetzen; ferner dafs jede Kraft durch eine gleiche ersetzt werden kann, welche in irgend einem anderen Punkte des Systems, der in der Richtung ihrer Wirkung liegt, angreift. Wirkt also eine Kraft in der Richtung der Geraden AB, so ist es gleichgültig, ob sie in A oder B angreift. In § 21, 6 benutzten wir die letztere Voraussetzung in der Form, dafs wir von der Annahme ausgingen, dafs entgegengesetzt gleiche Kräfte, welche in A und B in der Richtung der Verbindungslinie angreifen, einander aufheben; die Identität beider Voraussetzungen ist leicht zu erkennen.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, beliebig viele Kräfte, welche in beliebigen Punkten des Systems angreifen, durch möglichst wenige andere zu ersetzen, welche in möglichst wenigen Punkten angreifen.

Laufen die Richtungen mehrerer Kräfte, welche an verschiedenen Punkten angreifen, in einem Punkte zusammen, so kann man sie sich alle nach diesem Punkte verlegt denken und sie dann nach dem Parallelogramm der Kräfte in eine einzige Kraft vereinigen*). Kräfte dieser Art lassen sich also durch eine einzige ersetzen und und daher auch durch eine einzige im Gleichgewicht halten, nämlich durch eine der Resultierenden gleiche und entgegengesetzte, in demselben Punkte angreifende Kraft. Hiernach lassen sich insbesondere zwei Kräfte einer Ebene, welche nicht parallel sind, vereinigen.

4. Sind zwei Kräfte parallel, so führt diese Methode nicht zum Ziele, wenn man nicht, was möglich ist, einen Grenzübergang anwenden will. Strenger erscheint das folgende Verfahren. Der Anschaulichkeit wegen wollen wir in der Gleichung die Kräfte durch Strecken darstellen, welche die Kraftrichtung besitzen und deren Längen den repräsentierten Kräften proportional sind; die Zusammensetzung nach dem Satze vom Parallelogramm der Kräfte läfst sich dann durch einfache Konstruktion ausführen.

Fig. 5.



In Fig. 5 mögen $p = AB$ und $p_1 = A_1B_1$ zwei parallele Kräfte darstellen, welche in den Punkten A und A_1 angreifen. Fügen wir in

*) Ist das starre System endlich begrenzt, so kann der Schnittpunkt der Kraftrichtungen aufserhalb desselben fallen; jedoch findet hierdurch keine Modifikation der Betrachtung statt. Man braucht sich eben nur jenen ideellen Punkt mit dem System fest verbunden zu denken.

A und A_1 die gleichen und entgegengesetzten, in der Richtung von AA_1 wirkenden Kräfte $q = AC$ und $q_1 = A_1C_1$ hinzu, so ändern sie an den bestehenden Verhältnissen nichts, da sie sich gegenseitig aufheben. Wir dürfen daher die beiden Parallelkräfte durch die nach dem Parallelogramm der Kräfte konstruierten Resultanten von AB und AC, A_1B_1 und A_1C_1, d. h. AD und A_1D_1 ersetzen. Die Geraden AD und A_1D_1 schneiden sich in einem Punkte O, in den man die Kräfte AD und A_1D_1 als OE und OE_1 verlegen kann. Hier kann man zwei neue sich gegenseitig zerstörende Kräfte OF und OF_1 hinzufügen oder wegnehmen, welche entgegengesetzt gleich sind, nämlich gleich q oder q_1, und parallel zu CC_1 wirken. Vereinigt man dieselben subtraktiv mit OE und OE_1, so erhält man die beiden Resultanten OG und OG_1. Es ist unmittelbar klar, daſs diese in dieselbe Gerade fallen und p und p_1 einzeln gleich sind. Summiert man beide, so erhält man eine zu p und p_1 parallele Kraft, welche der Summe dieser beiden Kräfte gleich ist. Natürlich kann man deren Angriffspunkt auch nach Q, dem Schnittpunkte ihrer Richtungsgeraden mit AA_1, verlegen.

Es handelt sich noch darum, das Verhältnis $AQ : A_1Q$ zu bestimmen. Es ist mit Rücksicht auf das Vorzeichen*)

$$EG \ : AQ = OG \ : OQ,$$

$$E_1G_1 : A_1Q = OG_1 : OQ,$$

ferner

$$EG = G_1E_1,$$

$$OG : OG_1 = p : p_1,$$

also nach Elimination von OQ

$$AQ \, . \, p = QA_1 \, . \, p_1. \tag{5}$$

Die Resultierende zweier parallelen Kräfte ist ihrer Summe gleich und zu ihnen parallel; die Entfernungen ihres Angriffspunktes auf der Geraden zwischen den beiden Angriffspunkten der Parallelkräfte von diesen letzteren verhalten sich umgekehrt wie die Kräfte selbst. Eine der Resultante gleiche und entgegengesetzte Kraft hält beiden Kräften das Gleichgewicht.

Wirken die beiden Parallelkräfte p und p_1 in demselben Sinne, wie dies in Fig. 5 dargestellt ist, so ist ihnen gleiches Zeichen beizulegen. Sind sie dagegen entgegengesetzt gerichtet, so muſs der einen das positive, der andern das negative Zeichen gegeben werden. Die Resultante ist daher hier der Differenz der absolut genommenen Parallelkräfte gleich. Der Punkt Q fällt im ersten Falle zwischen A und B, im zweiten auſserhalb dieser Strecke, und zwar demjenigen Punkte näher, in welchem die stärkere Kraft angreift. Die Resultante ist mit der stärkeren Kraft gleich-

*) Entgegengesetzt gerichteten Strecken derselben Geraden ist entgegengesetztes Zeichen beizulegen; es ist $AB = -BA$.

gerichtet. Sind beide Kräfte entgegengesetzt gleich, so wird die Resultante Null, während ihr Angriffspunkt in unendliche Ferne rückt, d. h. es ist nicht möglich, sie durch eine einzige Kraft zu ersetzen oder ihnen durch eine solche das Gleichgewicht zu halten. Man nennt ein solches Paar gleicher, entgegengesetzt gerichteter, paralleler Kräfte ein Kräftepaar. Die von Poinsot geschaffene Theorie der Kräftepaare wird uns noch weiter zu beschäftigen haben.

Die Wirkung eines Kräftepaares auf einen Körper kann als eine drehende bezeichnet werden.

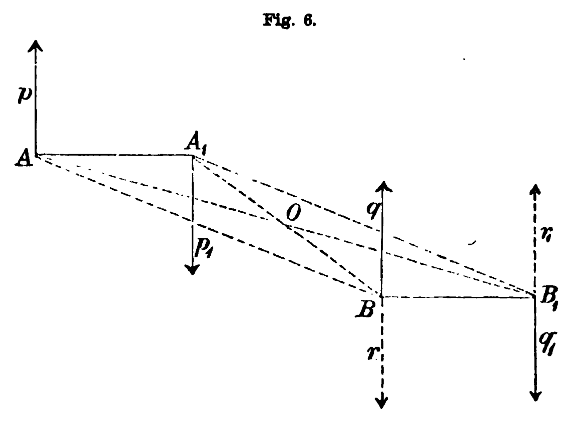
5. Hat ein Punkt O den senkrechten Abstand r von der Richtung einer Kraft p, so nennt man das Produkt pr das statische Moment oder Drehungsmoment der Kraft in Bezug auf den Punkt O. Da in Formel (5) die Strecken AQ und A_1Q auch durch die im gleichen Verhältnisse stehenden Perpendikel von Q auf die Kräfterichtungen ersetzt werden können, so kann man sagen, dafs die Momente zweier Parallelkräfte in Bezug auf den Angriffspunkt ihrer Resultante gleich sind.

Wir brauchen wohl nicht weiter darauf einzugehen, dafs die Gleichung (5) die elementare, schon von Archimedes in etwas umständlicher Weise begründete Theorie des Hebels umfafst.

Die Dimension des statischen Momentes ist

$$l^2 t^{-2} m.$$

6. Der senkrechte Abstand der beiden Kräfte eines Kräftepaares heifst der Hebelarm desselben. Man kann natürlich die Angriffspunkte so wählen, dafs ihre Verbindungslinie auf der Kraftrichtung senkrecht steht; wir wollen dies in Zukunft immer thun.



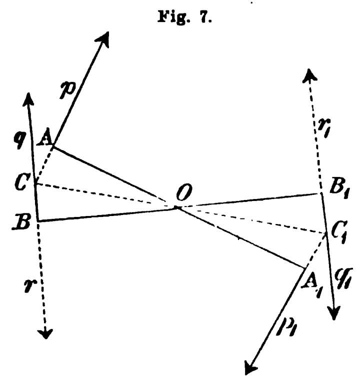
Kräftepaare derselben Ebene von gleichem Hebelarm und gleicher Kraft, welche denselben Sinn besitzen, d. h. durch Verschieben zur Deckung gebracht werden können, sind äquivalent. Das eine kann also durch das andere ersetzt werden.

Beweis. Wir zeigen zuerst, dafs die Äquivalenz statthat, wenn die Hebelarme AA_1 und BB_1 (Fig. 6) parallel sind*). AA_1B_1B ist als-

*) Selbstverständlich kann man die Angriffspunkte der Kräfte so verlegen, dafs die Hebelarme in dieselbe Gerade fallen; die Betrachtung bleibt dann wesentlich dieselbe.

dann ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich im Punkte O halbieren. Konstruiert man zu dem einen Paare qq_1 das entgegengesetzte rr_1, so halten sich beide das Gleichgewicht, so dafs allein pp_1 zur Wirkung kommt. Aber wir können auch p und r_1, p_1 und r zu Resultanten vereinigen, welche beide im Punkte O angreifen und entgegengesetzt gleich sind. Daher zerstören sich auch diese vier Kräfte gegenseitig und es bleibt nur die Wirkung von qq_1 übrig. Hieraus folgt die Äquivalenz von pp_1 und qq_1. Haben dagegen zwei gleiche Kräftepaare pp_1 und qq_1 (Fig. 7) den Mittelpunkt O ihrer Hebelarme (AA_1, BB_1) gemeinsam und ist qq_1 durch Drehung in pp_1 überführbar, so wollen wir auch hier die q und q_1 entgegengesetzt gleichen Kräfte r und r_1 in B und B_1 anbringen. Da sich r und q, r_1 und q_1 zerstören, so bleibt wieder nur das Kräftepaar pp_1 übrig. Andrerseits kann man die Kräfte p und r, p_1 und r_1 in die Schnittpunkte C und C_1 ihrer Richtungsgeraden verlegt und dort zu je einer Resultante vereinigt denken. Schon die Symmetrie zeigt, dafs beide Resultanten durch den Punkt O gehen und entgegengesetzt gleich sind, so dafs das Kräftepaar qq_1 übrig bleibt, das also mit pp_1 vertauscht werden kann.

Fig. 7.



Vereinigt man die Parallelverschiebung mit der Drehung um den Mittelpunkt des Hebelarms, so kann man jedes Kräftepaar in jede ihm durch Verschiebung zugängliche Lage in der Ebene bringen; hieraus folgt der behauptete Satz.

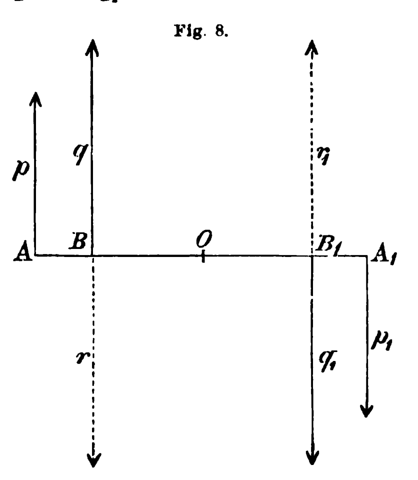
G l e i c h e K r ä f t e p a a r e d e r s e l b e n E b e n e, w e l c h e v e r s c h i e d e n e n S i n n b e s i t z e n (wie qq_1 und rr_1 in Fig. 6 und 7) h a l t e n s i c h e i n a n d e r b e i j e d e r L a g e d a s G l e i c h g e w i c h t.

Die Untersuchung über Parallelverschiebung behält auch noch ihre Gültigkeit, wenn beide Kräftepaare in P a r a l l e l e b e n e n liegen. Wir haben daher den allgemeineren Satz: G l e i c h s i n n i g e u n d g l e i c h e K r ä f t e p a a r e i n p a r a l l e l e n E b e n e n s i n d ä q u i v a l e n t.

7. Das Produkt der einen Kraft eines Kräftepaares in die Länge des Hebelarms heifst das M o m e n t des Paares. D a s s e l b e i s t g l e i c h d e r S u m m e d e r M o m e n t e d e r b e i d e n K r ä f t e i n B e z u g a u f e i n e n b e l i e b i g e n P u n k t d e r E b e n e d e s P a a r e s, wenn wir Drehungsmomenten, welche in gleichem Sinne zu drehen bestrebt sind, gleiches Zeichen beilegen und umgekehrt. Fällt man nämlich von einem solchen Punkte Perpendikel auf die beiden Kraftrichtungen, so ist deren Summe oder Differenz gleich dem Hebelarm, woraus leicht das Weitere folgt.

J e d e s K r ä f t e p a a r k a n n d u r c h e i n g l e i c h s i n n i g e s v o n g l e i c h e m M o m e n t e e r s e t z t w e r d e n, w e l c h e s i n d e r s e l b e n E b e n e o d e r e i n e r P a r a l l e l e b e n e w i r k s a m i s t.

Beweis. Es genügt nach dem Vorhergehenden, den Beweis für den Fall zu führen, dafs die Hebelarme beider Kräftepaare von gleichem Momente (Fig. 8) pp_1 und qq_1 in dieselbe Gerade und mit ihren Mittelpunkten (O) zusammenfallen. Es ist dann $AO = A_1O$, $BO = B_1O$, $AO \cdot p = BO \cdot q$. Die Wirkung von q und q_1 können wir durch das gleiche und entgegengesetzte Kräftepaar rr_1 aufheben, so dafs nur pp_1 wirksam bleibt. Auf der andern Seite können wir r und p_1, r_1 und p zu je einer Resultante vereinigen. Beide Resultanten greifen im Punkte O an; denn es folgt aus der letztgestellten Relation



$$BO \cdot r = A_1O \cdot p_1.$$

Da die Resultanten aufserdem entgegengesetzt gleich sind, so annullieren sie sich und es bleibt qq_1 übrig, dessen Äquivalenz mit pp_1 hieraus folgt.

8. Kräftepaare mit zusammenfallendem Hebelarm können durch Zusammenfügen ihrer Kräfte in ein einziges verwandelt werden. Ist eine Anzahl von Kräftepaaren vorhanden, welche alle in Parallelebenen wirken, so können sie zunächst alle durch solche mit gleichem Hebelarm ersetzt werden. Diese lassen sich so transponieren, dafs ihre Hebelarme zusammenfallen, worauf alle als ein einziges Kräftepaar angesehen werden können. Also: Beliebige Kräftepaare in Parallelebenen können durch ein einziges vertreten oder in Gleichgewicht gehalten werden.

Ferner kann man sagen: Die Summe der Momente mehrerer Parallelebenen angehörigen Kräftepaare ist gleich dem Momente des resultierenden Paares.

9. Zwei Kräftepaare, welche zwei verschiedenen, nicht parallelen Ebenen angehören, können in ihren Ebenen so verschoben werden, dafs die Mittelpunkte ihrer Hebelarme in die Schnittlinie der Ebenen fallen und ihre Hebelarme selbst zu dieser Schnittlinie senkrecht werden. Dann lassen sich je zwei gleichgerichtete Kräfte zu einer Resultante zusammenfassen, und es ist einleuchtend, dafs die beiden Resultanten ein neues Kräftepaar bilden*). Also:

Eine beliebige Zahl von Kräftepaaren kann immer in ein einziges zusammengefafst werden.

10. Ist eine beliebige Kraft p vorgelegt, so kann man in einem willkürlichen Punkte O zwei zu ihr parallele Kräfte p_1 und p_2 anbringen,

*) Der elementargeometrische Nachweis ist leicht zu erbringen.

welche p gleich und einander entgegengesetzt sind, so daſs p_1 die Richtung von p hat. Dann ist p ersetzt durch das Kräftepaar $p p_2$ und die einzelne in O angreifende Kraft p_1. In gleicher Weise kann man sämtliche Kräfte, welche ein starres System angreifen, durch je ein Kräftepaar und eine einzelne Kraft, welche in einem bestimmten Punkte O angreift, ersetzen. Die letzteren Kräfte lassen sich zu einer Resultante vereinigen, während sich die Kräftepaare zu einem einzigen zusammenfassen lassen. Also:

Sämtliche Kräfte, welche auf ein starres System einwirken, lassen sich durch ein Kräftepaar und eine einzelne Kraft ersetzen, welche letztere durch einen beliebig vorgelegten Punkt geht.

Da man das Kräftepaar, während sich seine Ebene immer selbst parallel bleibt, so verschieben kann, daſs der Angriffspunkt seiner einen Kraft in den Punkt O rückt, worauf man diese mit der Einzelkraft vereinigen kann, so hat man noch den Satz:

Sämtliche auf ein starres System einwirkenden Kräfte lassen sich durch zwei ersetzen, von denen die eine durch einen willkürlich vorgeschriebenen Punkt geht.

Liegen die Richtungen aller Kräfte in derselben Ebene, so kann man sie alle zu einer einzigen resultierenden Kraft oder zu einem Kräftepaar vereinigen. Dies folgt nach Nr. 3 und 4 unmittelbar, wenn man die Einzelkräfte nach und nach zu einer Resultierenden zusammenzusetzen sucht.

11. Bei der Untersuchung der Gleichgewichtsbedingungen gehen wir am besten von der Vereinigung der Kräfte in eine Einzelkraft und ein Kräftepaar aus. Soll Gleichgewicht stattfinden, so müssen offenbar die Einzelkraft und das Kräftepaar einzeln verschwinden. Diese Bedingungen wollen wir analytisch ausdrücken. Wirkt auf einen Punkt A oder x, y, z eine Kraft P ein, deren Komponenten nach den Koordinatenachsen X, Y, Z sind, so können wir für sie eine Kraft, welche den Nullpunkt angreift, und ein Kräftepaar substituieren. Die erstere hat gleichfalls die Komponenten X, Y, Z. Soll nun für beliebig viele Kräfte Gleichgewicht bestehen, so müssen die Resultanten aller dieser in den Nullpunkt verlegten Kräfte und daher auch die Komponenten derselben nach den Koordinatenachsen verschwinden; es müssen also die Relationen

$$\sum X_\alpha = 0, \quad \sum Y_\alpha = 0, \quad \sum Z_\alpha = 0,$$

d. h. die Gleichungen (3) befriedigt sein.

Projiziert man ein Kräftepaar orthogonal auf irgend eine Ebene, so erhält man in dieser wieder ein Kräftepaar, da sich die parallelen Richtungen der Kräfte als Parallele projizieren und die Projektionen der gleichen und parallelen Kräfte ebenfalls gleich werden. Soll nun die Vereinigung aller der Kräftepaare, deren einer Angriffspunkt der Nullpunkt ist, ver-

schwinden, so mufs dies auch mit der Vereinigung ihrer Projektionen auf irgend eine Ebene der Fall sein. In der That überzeugt man sich leicht davon, dafs das resultierende Paar der Projektionen zweier Kräftepaare auf eine Ebene mit der Projektion ihres resultierenden Paares identisch ist; dies geht nämlich aus der Art der Projektion der einzelnen Kräfte hervor. Da aber die Summe der Momente aller Kräftepaare einer Ebene dem Momente ihrer Summe gleich ist, so gelangen wir zu dem Resultate, dafs die Summe der Momente der Projektionen aller Kräftepaare, welche sich das Gleichgewicht halten sollen, auf irgend eine Ebene verschwinden mufs. Wir wollen nun die konstruierten Kräftepaare auf die drei Koordinatenebenen projizieren und die Summen ihrer Momente gleich Null setzen. Das Moment der Projektion eines Kräftepaares, dessen eine Kraft im Nullpunkte, dessen andere im Punkte x, y, z angreift, auf die xy-Ebene ist gleich der Projektion dieser letzteren Kraft auf die xy-Ebene, multipliziert mit dem senkrechten Abstande des Nullpunktes O von jener Projektion. Repräsentiert man die Projektion der Kraft durch eine Strecke AB, so ist das Moment dem doppelten Inhalte des Dreiecks OAB gleich. Die Koordinaten der Eckpunkte dieses Dreiecks sind aber (auf die Wahl der Einheit der Strecke AB kommt es hier nicht an):

$$0, 0; \quad x, y; \quad x + X, \quad y + Y.$$

Für den doppelten Inhalt findet man daher nach bekannter Regel*) und bei geeigneter Wahl des Zeichens

$$x(y + Y) - y(x + X) = xY - yX.$$

Setzt man daher die Summe der Momente der Projektionen der Kräftepaare auf die einzelnen Koordinatenebenen gleich Null, so erhält man die Gleichungen (4).

Unsere synthetischen Betrachtungen führen uns demnach zu denselben Gleichgewichtsbedingungen wie die analytischen; die wahre Bedeutung dieser Bedingungen wird uns jedoch hier erst vollkommen klar.

12. Die Gleichgewichtsbedingungen reduzieren sich auf eine geringere Zahl, wenn die Beweglichkeit des starren Systems eine beschränkte ist. Soll z. B. ein Punkt des Systems fest bleiben, so kann man diesen zum Punkte O wählen; die Gleichungen (3) werden dann überflüssig, während die Gleichungen (4) allein die Bedingungen des Gleichgewichtes dar-

---

*) Der doppelte Inhalt eines Dreiecks mit den Eckpunkten $0, 0$; x_1, y_1; x_2, y_2 ist

$$\pm (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Bei der oben getroffenen Wahl des Vorzeichens wird das Moment des Kräftepaares in der xy-Ebene positiv, wenn es in dem Drehungssinne von der positiven x-Achse nach der positiven y-Achse zu drehen sucht. Wir befinden uns daher, wenn wir die übrigen Momente durch cyklische Vertauschung ableiten, mit den Festsetzungen von § 52, 3 im Einklang.

stellen. Sollen die Punkte einer Geraden, die als die z-Achse betrachtet werden möge, ihren Ort nicht verlassen, so braucht nur die Gleichung

$$\sum (x_\alpha Y_\alpha - y_\alpha X_\alpha) = 0 \tag{6}$$

befriedigt zu sein. Besteht die Möglichkeit der Bewegung in einer Rotation um die z-Achse und einer Verschiebung längs derselben, so mufs zu (6) noch

$$\sum Z_\alpha = 0 \tag{7}$$

hinzutreten.

§ 54.

Astasie und Gleichgewichtsachsen; das Virial.

1. Wir behandeln an dieser Stelle folgendes Problem: Auf verschiedene Punkte eines starren Systems (Körpers) mögen Kräfte einwirken, welche sich gegenseitig das Gleichgewicht halten. Nachdem mit dem starren System irgend eine Ortsänderung vorgenommen wurde, mögen wieder dieselben Kräfte in denselben Punkten, parallel zu ihren früheren Richtungen, angebracht werden. Es fragt sich nun, unter welchen Umständen auch jetzt noch Gleichgewicht stattfindet. Ist dies bei jeder Ortsänderung der Fall, so nennen wir das Kräftesystem astatisch. Der Begriff der Astasie kann durch Vorschrift gewisser Bedingungen über die Beweglichkeit des Systems modifiziert werden; so kann z. B. gefragt werden, unter welchen Umständen das Gleichgewicht bewahrt wird, wenn das starre System nur Bewegungen ausführt, bei denen ein Punkt oder eine Gerade fest bleibt.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dafs die Astasie nicht sowohl eine Eigenschaft des fraglichen starren Körpers, sondern lediglich der wirkenden Kräfte und ihrer Gruppierung ist.

2. Wir wollen zunächst die Bedingungen der Astasie bei ganz freier Beweglichkeit aufstellen. Dafs eine Translation den Körper nicht aus seinem Gleichgewichtszustande bringt, wenn die Kräfte in der angegebenen Weise mitverschoben werden, ist einleuchtend; es kommt nur eine Drehung in Betracht. Wie in § 52 bringen wir im Körper ein mit ihm festverbundenes Koordinatensystem ξ, η, ζ, im unbewegten Raume dagegen das Koordinatensystem x, y, z an. Im Anfangszustande mögen beide zusammenfallen. Eine Drehung*) des Körpers um den Nullpunkt des Koordinatensystems ist dann durch die Gleichungen

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ y = \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ z = \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta \end{cases} \tag{1}$$

---

*) Indem wir das Wort Drehung, welches eigentlich eine Bewegung bezeichnet, bei der die Punkte einer Geraden ihre Stelle nicht verlassen, in etwas weiterem Sinne gebrauchen.

dargestellt, worin die Koeffizienten die in § 52 angegebene Bedeutung haben und den dort zusammengestellten Gleichungen (3), (4), (5), (6) genügen.

Soll der Körper im Anfangszustande sich im Gleichgewicht befinden, so müssen nach § 53, (3), (4) die Gleichungen*)

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0, \tag{2}$$

$$\sum (yZ - zY) = 0, \quad \sum (zX - xZ) = 0, \quad \sum (xY - yX) = 0 \tag{3}$$

bestehen. Das Vorhandensein der Astasie erfordert, dafs nach Einfügen der Werte x, y, z nach (1) die Gleichungen (2) und (3) bestehen bleiben, und zwar für alle zulässigen Werte der α, β, γ. Da die Gleichungen (2) die Koordinaten selbst nicht explizite enthalten, so bleiben sie durch diese Transformation ungeändert. Die Gleichungen (3) nehmen die Gestalt an

$$\left\{\begin{aligned} &\beta_1 \sum \xi Z + \beta_2 \sum \eta Z + \beta_3 \sum \zeta Z \\ &- \gamma_1 \sum \xi Y - \gamma_2 \sum \eta Y - \gamma_3 \sum \zeta Y = 0, \\ &\gamma_1 \sum \xi X + \gamma_2 \sum \eta X + \gamma_3 \sum \zeta X \\ &- \alpha_1 \sum \xi Z - \alpha_2 \sum \eta Z - \alpha_3 \sum \zeta Z = 0, \\ &\alpha_1 \sum \xi Y + \alpha_2 \sum \eta Y + \alpha_3 \sum \zeta Y \\ &- \beta_1 \sum \xi X - \beta_2 \sum \eta X - \beta_3 \sum \zeta X = 0. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Sollen die linkstehenden Ausdrücke für alle zulässigen Werte der α, β, γ identisch verschwinden, so müssen die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} &\sum \xi X = 0, \quad \sum \eta X = 0, \quad \sum \zeta X = 0, \\ &\sum \xi Y = 0, \quad \sum \eta Y = 0, \quad \sum \zeta Y = 0, \\ &\sum \xi Z = 0, \quad \sum \eta Z = 0, \quad \sum \zeta Z = 0 \end{aligned}\right. \tag{5}$$

bestehen.

Bezeichnet man das Produkt einer Kraft mit dem Abstande ihres Angriffspunktes von einer Ebene als ihr Moment in Bezug auf diese Ebene, so kann man sagen, dafs das Bestehen der Astasie erfordert, dafs die Summen der Momente sämtlicher Kraftkomponenten nach den Koordinatenachsen, genommen nach den drei Koordinatenebenen, einzeln verschwinden.

Es läfst sich nachweisen — worauf wir hier nicht eingehen wollen —, dafs sich der astatische Zustand immer durch Zufügung von höchstens drei Kräften erreichen läfst.

*) Die Summationsindices lassen wir in der Folge der Kürze halber weg.

3. Diese Untersuchungen modifizieren wir durch die Annahme, dafs ein oder zwei Punkte des Körpers festgelegt sind. Da das Festhalten eines Punktes nichts Neues liefert — dürfen wir doch den allgemeinen Fall auf diesen reduzieren —, so legen wir uns die Frage vor:

Welches sind die Bedingungen dafür, dafs ein starres System, welches unter Einwirkung gewisser Kräfte im Gleichgewichte ist, nach Drehung um eine bestimmte Gerade, welche *Gleichgewichtsachse* heifsen soll, und nach Wiederanbringen der gleichen und wie früher gerichteten Kräfte an denselben Punkten, noch im Gleichgewichte bleibt?

Ist eine Gerade Gleichgewichtsachse, so ist es auch jede zu ihr parallele Gerade; denn eine Drehung um letztere ändert die Lage der Kraftrichtungen zu den Punkten des Systems in der gleichen Weise. Wir dürfen daher annehmen, dafs die Gleichgewichtsachse durch den Nullpunkt beider Koordinatensysteme geht.

Die Gleichungen (1), welche bisher drei willkürliche Gröfsen enthielten, müssen jetzt derart beschränkt werden, dafs nur eine Gröfse darin willkürlich bleibt. Sind λ, μ, ν die Winkel der Gleichgewichtsachse mit den positiv gerichteten Koordinatenachsen, so dafs

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1 \tag{6}$$

ist, so mufs für ein beliebiges r der Punkt

$$r\cos\lambda,\quad r\cos\mu,\quad r\cos\nu$$

infolge der Drehung an seinem Platze bleiben, d. h. es müssen für diese Werte x, y, z und ξ, η, ζ übereinstimmen. Demnach erhalten wir aus (1)

$$\left\{\begin{aligned}\cos\lambda &= \alpha_1\cos\lambda + \alpha_2\cos\mu + \alpha_3\cos\nu,\\ \cos\mu &= \beta_1\cos\lambda + \beta_2\cos\mu + \beta_3\cos\nu,\\ \cos\nu &= \gamma_1\cos\lambda + \gamma_2\cos\mu + \gamma_3\cos\nu.\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Multiplizieren wir diese Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und addieren sie jedesmal, so folgt mit Rücksicht auf § 52, (3) und (4)

$$\left\{\begin{aligned}\cos\lambda &= \alpha_1\cos\lambda + \beta_1\cos\mu + \gamma_1\cos\nu,\\ \cos\mu &= \alpha_2\cos\lambda + \beta_2\cos\mu + \gamma_2\cos\nu,\\ \cos\nu &= \alpha_3\cos\lambda + \beta_3\cos\mu + \gamma_3\cos\nu.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

Die Zusammenstellung der entsprechenden Gleichungen von (7) und (8) liefert

$$\left\{\begin{aligned}(\alpha_2 - \beta_1)\cos\mu &= (\gamma_1 - \alpha_3)\cos\nu,\\ (\beta_3 - \gamma_2)\cos\nu &= (\alpha_2 - \beta_1)\cos\lambda,\\ (\gamma_1 - \alpha_3)\cos\lambda &= (\beta_3 - \gamma_2)\cos\mu\end{aligned}\right. \tag{8a}$$

oder

$$\cos\lambda : \cos\mu : \cos\nu = (\beta_3 - \gamma_2) : (\gamma_1 - \alpha_3) : (\alpha_2 - \beta_1) \tag{9}$$

und mit Rücksicht auf (6)

$$(10)\quad \begin{cases} k\cos\lambda = \beta_3 - \gamma_2, \quad k\cos\mu = \gamma_1 - \alpha_3, \quad k\cos\nu = \alpha_2 - \beta_1, \\ k^2 = (\beta_3 - \gamma_2)^2 + (\gamma_1 - \alpha_3)^2 + (\alpha_2 - \beta_1)^2. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen (3), in denen die x, y, z durch die ξ, η, ζ ersetzt werden dürfen*), setzen wir

$$(11)\quad \begin{cases} A = \sum \xi X, \quad B = \sum \eta Y, \quad C = \sum \zeta Z, \\ D = \sum \eta Z = \sum \zeta Y, \quad E = \sum \zeta X = \sum \xi Z, \quad F = \sum \xi Y = \sum \eta X, \end{cases}$$

wodurch die Gleichungen (4) in

$$(12)\quad \begin{cases} (\gamma_3 - \beta_2)\, D + \gamma_1 F - \beta_1 E + \gamma_2 B - \beta_3 C = 0, \\ (\alpha_1 - \gamma_3)\, E + \alpha_2 D - \gamma_2 F + \alpha_3 C - \gamma_1 A = 0, \\ (\beta_2 - \alpha_1)\, F + \beta_3 E - \alpha_3 D + \beta_1 A - \alpha_2 B = 0 \end{cases}$$

übergehen. Durch Multiplikation mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ und Addition folgt aus (12)

$$D\,(\alpha_1\gamma_3 - \alpha_3\gamma_1 + \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2) + E\,(\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3) + F\,(\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2)$$
$$+ B\,(\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1) + C\,(\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3) = 0$$

oder unter Berücksichtigung von § 52, (6)

$$D\,(\beta_2 - \gamma_3) + E\alpha_2 - F\alpha_3 - B\beta_3 + C\gamma_2 = 0.$$

Hierzu addieren wir die erste Gleichung (12) und erhalten eine einfachere Relation, zu der wir sogleich zwei analog gebildete hinzufügen:

$$E\,(\alpha_2 - \beta_1) + F\,(\gamma_1 - \alpha_3) - (B + C)\,(\beta_3 - \gamma_2) = 0,$$
$$F\,(\beta_3 - \gamma_2) + D\,(\alpha_2 - \beta_1) - (C + A)\,(\gamma_1 - \alpha_3) = 0,$$
$$D\,(\gamma_1 - \alpha_3) + E\,(\beta_3 - \gamma_2) - (A + B)\,(\alpha_2 - \beta_1) = 0.$$

Durch Benutzung von (10) wird hieraus, wenn wir weiter

$$(13)\quad B + C = a, \quad C + A = b, \quad A + B = c$$

setzen,

$$(14)\quad \begin{cases} -\,a\cos\lambda + F\cos\mu + E\cos\nu = 0, \\ F\cos\lambda - b\cos\mu + D\cos\nu = 0, \\ E\cos\lambda + D\cos\mu - c\cos\nu = 0. \end{cases}$$

Sollen diese Gleichungen befriedigt sein, ohne dafs $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ gleichzeitig verschwinden, was nach (6) ausgeschlossen ist, so mufs

$$(15)\quad \begin{vmatrix} -a & F & E \\ F & -b & D \\ E & D & -c \end{vmatrix} = 0$$

*) Da im Anfangszustande, auf den sich jene Gleichungen beziehen, beide Koordinatensysteme zusammenfallen.

sein. Dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein einer Gleichgewichtsachse.

4. Die Gleichungen (14) und (6) liefern im allgemeinen nur eine Gleichgewichtsachse. Infolge von (15) können nämlich die Gleichungen (14) durch zwei von ihnen ersetzt werden, aus denen sich die Verhältnisse $\frac{\cos\lambda}{\cos\nu}$ und $\frac{\cos\mu}{\cos\nu}$ berechnen lassen. Drückt man hiernach $\cos\lambda$ und $\cos\mu$ durch $\cos\nu$ aus und setzt diese Werte in (6) ein, so erhält man nur zwei durch das Vorzeichen verschiedene Werte für $\cos\nu$ und ebenso für $\cos\lambda$ und $\cos\mu$, die derselben Gleichgewichtsachse entsprechen. Sind zwei durch den Nullpunkt gehende Gleichgewichtsachsen vorhanden, so müssen sich die Gleichungen (14) durch eine von ihnen ersetzen lassen, was durch das Verschwinden der Unterdeterminanten von (15) ausgedrückt wird. Multiplizieren wir z. B. die erste Gleichung (14) mit einer beliebigen Gröfse r, so dafs

$$x = r\cos\lambda, \quad y = r\cos\mu, \quad z = r\cos\nu$$

die Koordinaten eines Punktes der Gleichgewichtsachse sind, so folgt die Bedingung

$$-ax + Fy + Ez = 0. \tag{16}$$

Alle Geraden, welche (16) genügen, d. h. in der durch (16) dargestellten Ebene liegen, sind Gleichgewichtsachsen und umgekehrt. Sind daher zwei durch den Nullpunkt gehende Gleichgewichtsachsen vorhanden, so sind auch alle in der durch sie bestimmten Ebene gelegenen Geraden Gleichgewichtsachsen*).

Existieren drei durch den Nullpunkt gehende, nicht in dieselbe Ebene fallende Gleichgewichtsachsen, so ist jede beliebige Gerade eine solche. Legt man nämlich durch eine beliebige durch den Nullpunkt gehende Gerade und eine der Gleichgewichtsachsen eine Ebene, so schneidet diese die Ebene der beiden andern Gleichgewichtsachsen wieder in einer solchen; da jetzt zwei Gleichgewichtsachsen in ihr liegen, so ist jede weitere in sie fallende Gerade, also auch die angenommene und damit jede beliebige, eine Gleichgewichtsachse.

Wir gehen hier nicht weiter auf die Theorie der Astasie ein; Umfassenderes nebst Litteraturangaben findet man bei Schell, B. 2, p. 236 ff.

5. Besitzt ein System eine Gleichgewichtsachse, so befindet es sich in Bezug auf diese in indifferentem Gleichgewicht, d. h. eine Drehung um diese Achse alteriert das Gleichgewicht nicht. Andrerseits sagt man von einem Gleichgewichtszustande, dafs er in Bezug auf eine Achse stabil oder labil sei, wenn nach einer kleinen Drehung um diese Achse die Kräfte das Bestreben haben, das System in die ursprüngliche Gleichgewichtslage zurückzuführen oder aus ihr zu entfernen. Welche Art von

*) Allgemeiner kann dann jede Gerade, welche dieser Ebene parallel ist, als Gleichgewichtsachse angesehen werden.

Gleichgewicht statthat, hängt bei einem Kräftesystem von den in Nr. 3 angegebenen Eigenschaften von einer Funktion ab, die (mit einer von Schell gewählten Änderung) nach dem Vorgange von Clausius als Virial der Kräfte in Bezug auf die betreffende Achse bezeichnet wird*).

Um das Virial einer Kraft P, welche in einem Punkte A des festen Systems angreift, in Bezug auf eine Achse zu bestimmen, fällen wir von A auf die Achse ein Perpendikel AB, dessen absolute Länge wir mit r bezeichnen. Die Projektion der Kraft P auf AB (als positiv gerechnet, wenn sie in der Richtung von A nach B wirkt), multpliziert mit r, heifst das Virial von P in Bezug auf die Achse. Sind mehrere Kräfte vorhanden, welche in verschiedenen Punkten angreifen, so wird die Summe ihrer Viriale als das Virial des Systems bezeichnet.

Nehmen wir als Achse die z-Achse und sind X, Y, Z die Komponenten von P nach den Koordinatenachsen, x, y, z die Koordinaten des Punktes A, so erhält man für das Virial V den Ausdruck

$$V = -r\left(X\frac{x}{r} + Y\frac{y}{r}\right) = -(xX + yY) \tag{17}$$

und für das Virial des ganzen Systems

$$V = -\sum(xX + yY). \tag{18}$$

Es hat keine Schwierigkeit, den Ausdruck auch für andere Achsen aufzustellen.

Unter dem Virial einer im Punkte A angreifenden Kraft P in Bezug auf einen Punkt O verstehen wir die Projektion von P auf AO, multipliziert mit dem absoluten Werte r von AO, unter dem Virial eines Systems in Bezug auf O die Summe der Viriale der einzelnen Punkte. Wir erhalten im letzteren Falle, wenn O der Nullpunkt des Koordinatensystems ist,

$$V = -\sum r\left(X\frac{x}{r} + Y\frac{y}{r} + Z\frac{z}{r}\right)$$

oder

$$V = -\sum(xX + yY + zZ). \tag{19}$$

In Bezug auf einen beliebigen Punkt x_0, y_0, z_0 erhalten wir

$$V = -\sum[(x - x_0)X + (y - y_0)Y + (z - z_0)Z]$$

oder

$$V = -\sum(xX + yY + zZ) + x_0\Sigma X + y_0\Sigma Y + z_0\Sigma Z; \tag{20}$$

der Ausdruck $x_0\Sigma X + y_0\Sigma Y + z_0\Sigma Z$ ist von der augenblicklichen Lage des Systems ganz unabhängig und kann daher als Konstante betrachtet werden.

---

*) Diese Funktion wurde bereits von Möbius und Schweins (von letzterem unter dem Namen Fliehmoment) eingeführt.

Wir wollen sogleich hervorheben, dafs das negativ genommene Virial in Bezug auf einen Punkt mit der eventuell vorhandenen Kräftefunktion U der auf einen Punkt x, y, z wirkenden Kraft P bis auf einen numerischen Faktor übereinstimmt, falls diese Kräftefunktion — was häufig vorkommt*) —, von einer additiven Konstanten abgesehen, eine homogene Funktion der Koordinaten x, y, z ist. Ist nämlich diese homogene Funktion vom $n$ten Grade, so haben wir nach einem bekannten Satze über homogene Funktionen, der in B. I, p. 199 Anm. für $n = 2$ bewiesen wurde und in analoger Weise allgemein bewiesen werden kann,

$$xX + yY + zZ = x\frac{\partial U}{\partial x} + y\frac{\partial U}{\partial y} + z\frac{\partial U}{\partial z} = nU. \tag{21}$$

6. Um nun zu entscheiden, welche Art von Gleichgewicht bei festgehaltener z-Achse stattfindet, genügt die folgende einfache Betrachtung. Solange das System sich in der Gleichgewichtslage befindet, ist kein Drehungsmoment um die z-Achse vorhanden, da dieses das Gleichgewicht aufheben würde. Dagegen kann eine Kraftkomponente in der Richtung von r vorhanden sein, die mit r multipliziert das Virial liefert. Drehen wir nun das System aus seiner Gleichgewichtslage um einen sehr kleinen Winkel φ, so fällt jene Komponente, wenn die Kräfte in der vorgeschriebenen Weise angreifen, nicht mehr in die Richtung von r und erzeugt daher ein Drehungsmoment. Dasselbe ist offenbar, als positiv gerechnet, wenn es von der Ausgangslage wegzuführen strebt,

$$V \sin \varphi. \tag{22}$$

Auch unmittelbar ist ersichtlich, dafs bei positivem Virial die Kräfte den aus der Gleichgewichtslage entfernten Körper von derselben weg, bei negativem Virial in dieselbe zurückzuführen streben. Wir gelangen zu zu dem allgemeinen Resultate:

Das Gleichgewicht in Bezug auf eine Achse ist stabil, indifferent oder labil, wenn das Virial in Bezug auf dieselbe negativ, Null oder positiv ist.

Dafs die Bedingung für das indifferente Gleichgewicht mit (15) (teilweise) zusammenfällt, ist leicht durch Spezialisierung der letzteren Gleichung nachzuweisen.

Falls nur ein Punkt festgehalten wird, so lassen sich die Untersuchungen von § 24, 12 auf das Virial übertragen. Weiteres über Astasie, Gleichgewichtsachsen und Virial findet man bei Schell, a. a. O. B. 2, p. 239 ff. Begründet wurde die Theorie der Astasie durch Minding und Möbius, weiter entwickelt in neuerer Zeit namentlich durch Darboux.

*) Bei einer Attraktion oder Repulsion nach dem Nullpunkte des Koordinatensystems von der in § 6 behandelten Art trifft dies z. B. zu.

§ 55.

Der Schwerpunkt eines starren Systems.

1. Bei den bisherigen Untersuchungen über das Gleichgewicht räumlicher Systeme spielte die Masse keine Rolle, wie dies bei allen Gleichgewichtsproblemen der Fall ist, in denen die Kräfte fertig gegeben sind. Anders gestaltet sich die Sache, wenn die Kräfte selbst als Funktionen der Masse des materiellen Punktes, auf den sie einwirken, erscheinen, wenn sie z. B. (wie dies gewöhnlich der Fall ist) der Masse desselben proportional sind. Wir wollen hier den einfachsten und wichtigsten Fall dieser Art ins Auge fassen. Es sollen auf alle Punkte eines festen Körpers parallele Kräfte einwirken, deren Einfluſs lediglich der Masse des angegriffenen materiellen Punktes proportional ist. Denken wir uns zunächst den Körper aus getrennten, starr verbundenen materiellen Punkten x_α, y_α, z_α mit der jeweiligen Masse m_α bestehend, so können wir leicht nach dem Vorigen eine gewisse in der umgekehrten Richtung wirkende, an einem zu bestimmenden Punkte angreifende Kraft mit den Komponenten Ξ, H, Z konstruieren, welche den übrigen Kräften mit den Komponenten X_α, Y_α, Z_α das Gleichgewicht hält. Bildet nämlich die Kraftrichtung mit den Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν, so wirken auf m_α die Kraftkomponenten

$$X_\alpha = Pm_\alpha \cos\lambda, \quad Y_\alpha = Pm_\alpha \cos\mu, \quad Z_\alpha = Pm_\alpha \cos\nu$$

ein, worin P eine für alle Punkte konstante Gröſse bedeutet. Die Gleichungen (3) von § 53 werden hier, wenn

$$M = \sum m_\alpha$$

die Gesamtmasse des Körpers bezeichnet,

$$\Xi + P\cos\lambda \sum m_\alpha = 0 \quad \text{u. s. w.}$$

oder

$$(1) \quad \Xi = -PM\cos\lambda, \quad H = -PM\cos\mu, \quad Z = -PM\cos\nu;$$

durch sie ist die Stärke der einzuführenden Kraft als gleich mit der Summe der Einzelkräfte bestimmt. Soll aber wirklich Gleichgewicht herrschen, so müssen auch die Gleichungen (4) von § 53 befriedigt werden. Dies kann in sehr einfacher Weise durch geeignete Wahl des Nullpunktes und Verlegung des Angriffspunktes von Ξ, H, Z in denselben erzielt werden. Bei diesen Annahmen wird nämlich aus jenen Gleichungen

$$(2) \quad \begin{cases} P\sum m_\alpha (y_\alpha \cos\nu - z_\alpha \cos\mu) = 0, \\ P\sum m_\alpha (z_\alpha \cos\lambda - x_\alpha \cos\nu) = 0, \\ P\sum m_\alpha (x_\alpha \cos\mu - y_\alpha \cos\lambda) = 0. \end{cases}$$

Dieselben sind befriedigt, wenn der Nullpunkt so festgesetzt wird, dafs

$$\sum m_\alpha x_\alpha = 0, \quad \sum m_\alpha y_\alpha = 0, \quad \sum m_\alpha z_\alpha = 0 \tag{3}$$

wird.

Will man die Allgemeinheit des Koordinatensystems wahren, so möge der fragliche Punkt mit ξ, η, ζ bezeichnet werden, worauf an Stelle von x_α, y_α, z_α die Werte $x_\alpha - \xi$, $y_\alpha - \eta$, $z_\alpha - \zeta$ in (3) einzuführen sind Hierdurch erhält man zur Bestimmung von ξ, η, ζ die Gleichungen

$$M\xi = \sum m_\alpha x_\alpha, \quad M\eta = \sum m_\alpha y_\alpha, \quad M\zeta = \sum m_\alpha z_\alpha. \tag{4}$$

Der Punkt ξ, η, ζ ist nichts Anderes als der bereits in § 10, 2 definierte **Schwerpunkt** des Systems. Derselbe ist immer ein gewisser mittlerer Punkt, für den daher auch der Name **Massenzentrum** sehr zutreffend gebraucht wird.

Dafs die Lage des Schwerpunktes von der Wahl des Koordinatensystems ganz unabhängig ist, zeigt schon unsere Herleitung; durch eine einfache Koordinatentransformation liefse sich diese Thatsache jedoch auch rein analytisch nachweisen.

2. Betrachten wir jetzt das starre System als eine zusammenhängende Masse, so treten in (4) an Stelle der Summen Integrale. Wir erhalten

$$\begin{cases} M\xi = \iiint \mu x \, dx \, dy \, dz, \quad M\eta = \iiint \mu y \, dx \, dy \, dz, \\ M\zeta = \iiint \mu z \, dx \, dy \, dz, \end{cases} \tag{5}$$

$$M = \iiint \mu \, dx \, dy \, dz, \tag{6}$$

worin die Dichtigkeit μ als Funktion der Koordinaten x, y, z eines Punktes aufzufassen ist und die Integrationen über den ganzen Körper auszudehnen sind. Ist der Körper **homogen**, so wird μ zu einer Konstanten, die vor die Integralzeichen gesetzt werden kann; wir haben dann

$$\begin{cases} M\xi = \mu \iiint x \, dx \, dy \, dz, \quad M\eta = \mu \iiint y \, dx \, dy \, dz, \\ M\zeta = \mu \iiint z \, dx \, dy \, dz, \end{cases} \tag{7}$$

$$M = \mu \iiint dx \, dy \, dz, \tag{8}$$

so dafs sich schliefslich μ heraushebt. Das letzte dreifache Integral drückt das **Volumen** des Körpers aus. Da gerade der Fall gleichmäfsiger Massenverteilung der wichtigste ist, so werden wir weiter unten den Schwerpunkt für eine Anzahl der einfachsten, homogenen Körper bestimmen. Da man sich ferner, wie schon früher geschah, auch Masse auf einer Fläche oder Linie konzentriert denken kann — in Praxis kann es sich

nur um einen sehr dünnen und eventuell auch sehr schmalen Körper handeln —, so werden wir auch Schwerpunkte von Flächen und Linien zu bestimmen haben. Die Gleichungen (7) und (8) vereinfachen sich dann entsprechend. Aufserdem kann auch von dem Schwerpunkte eines endlichen Systems fest verbundener Punkte die Rede sein.

3. Wenn auf die Punkte eines Körpers parallele und gleiche Kräfte einwirken, so kann man dieselben nach dem Obigen durch eine einzige, im Schwerpunkte konzentrierte Kraft im Gleichgewichte halten. Ein Beispiel bietet hierfür die gewöhnliche Schwerkraft, die auch dem Schwerpunkte seinen Namen verschafft hat, soweit sie als konstant angesehen werden kann. An Stelle der Gegenkraft kann auch eine geeignete, die Bewegung hindernde Bedingung treten. Denkt man sich z. B. den Körper in dem Schwerpunkte festgehalten, etwa durch einen Faden, an dem der Körper aufgehängt ist, so ist er im Gleichgewichte.

Hierbei ist noch folgende wichtige Bemerkung zu machen. Der Angriffspunkt einer jeden Kraft kann bei einem starren Systeme beliebig in der Richtungsgeraden der Kraft verschoben werden. Befestigt man daher statt des Schwerpunktes eines der Schwere ausgesetzten Körpers einen Punkt, der mit ihm in derselben Vertikalen liegt, so mufs ebenfalls Gleichgewicht stattfinden. Dieses Gleichgewicht ist aber von dreifacher Art. Ist der Körper oberhalb seines Schwerpunktes befestigt, so erhebt jede Bewegung den Schwerpunkt über seinen Anfangspunkt, und da man sich die Gesamtwirkung der Schwere in ihm konzentriert denken kann, so wird ihn dieselbe wieder in seine Anfangslage — wenigstens bei nicht zu grofser Entfernung von derselben — zurückzuführen streben. Das Gleichgewicht ist bei dieser Befestigung ein stabiles. Ist der Körper unterhalb seines Schwerpunktes befestigt, so ist das Gleichgewicht ein labiles. Die Befestigung im Schwerpunkte selbst hat das Besondere, dafs sie bei jeder Lagenänderung Gleichgewicht des Körpers bewirkt; das Gleichgewicht ist alsdann ein indifferentes. Diese Betrachtung kann leicht auf die in § 54, 5, 6 gegebenen Untersuchungen zurückgeführt werden.

4. Denkt man sich einen Körper in n beliebige Teile zerlegt, so ist der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte der Schwerpunkte der einzelnen Teile identisch, wenn man sich in den letztgenannten Punkten die Massen der einzelnen Teile konzentriert denkt.

Beweis. Sind $M_1, M_2, \ldots M_n$ die Massen der einzelnen Teile, ξ_1, η_1, ζ_1 u. s. w. die Koordinaten ihrer Schwerpunkte, während M und ξ, η, ζ dieselben Gröfsen für den ganzen Körper bezeichnen, so haben wir

$$M_1 \xi_1 = \sum m_\alpha x_\alpha, \quad M_1 \eta_1 = \sum m_\alpha y_\alpha, \quad M_1 \zeta_1 = \sum m_\alpha z_\alpha,$$

$$M_2 \xi_2 = \sum m_\beta x_\beta, \quad M_2 \eta_2 = \sum m_\beta y_\beta, \quad M_2 \zeta_2 = \sum m_\beta z_\beta$$

u. s. w.,

worin die Summationen über die Elemente der einzelnen Teile auszudehnen sind. Andrerseits ist

$$M\xi = (M_1 + M_2 + \cdots + M_n)\,\xi = \sum m_\alpha x_\alpha + \sum m_\beta x_\beta + \cdots$$

u. s. w.

oder

$$(9)\qquad (M_1 + M_2 + \cdots + M_n)\,\xi = M_1\xi_1 + M_2\xi_2 + \cdots M_n\xi_n$$

u. s. w.,

worin der ausgesprochene Satz enthalten ist.

Wird insbesondere der Körper in zwei Teile mit den Massen M_1 und M_2 und den Schwerpunkten O_1 und O_2 zerlegt, so liegt der Gesamtschwerpunkt O in der Geraden O_1O_2 und zwar so, dafs

$$(10)\qquad O_1O\,.\,M_1 = OO_2\,.\,M_2$$

ist.

Liegen die Schwerpunkte einer Reihe von Massenteilen in derselben Geraden oder auf derselben Ebene, so fällt auch der Schwerpunkt des ganzen Systems in diese Gerade oder Ebene.

5. Ist ein homogener Körper (eine Fläche, eine Linie, ein System von Punkten) *symmetrisch* in Bezug auf eine Ebene, eine Gerade oder einen Punkt, so fällt sein Schwerpunkt in dieses Gebilde. Denn das System läfst sich dann in einzelne Teile zerlegen (der Körper zunächst in Parallelschichten, diese in Streifen), welche ihre Schwerpunkte in diesem Gebilde haben, weshalb auch der Gesamtschwerpunkt in dasselbe fallen mufs.

Hat der homogene Körper eine *Diametralebene*, d. h. eine Ebene, durch welche alle in einer bestimmten Richtung laufenden Strahlen, soweit sie innerhalb des Körpers fallen, halbiert werden, so fällt aus ähnlichen Gründen der Schwerpunkt in sie. Ähnliches gilt für ebene Figuren mit einem Durchmesser u. s. w.

Nach diesen Sätzen kann bei vielen der einfachsten homogenen Körper über die Lage des Schwerpunktes kein Zweifel herrschen. Für die Gerade, die Kreislinie und Kreisfläche, die Ellipse und ihre Fläche, die Kugel und Kugelfläche, das Ellipsoid und seine Oberfläche, das Parallelogramm und seinen Umfang, das Parallelepipedon, den geraden Cylinder u. s. w. ist, falls Homogenität vorausgesetzt wird, der Mittelpunkt der Schwerpunkt. Wir wollen jetzt den Schwerpunkt für spezielle Systeme von materiellen Punkten, für materielle Linien, Flächen und Körper bestimmen, soweit seine Lage nicht unmittelbar klar ist. — Die einfachsten Schwerpunktsbestimmungen wurden bereits von Archimedes gegeben.

6. Sind die Massen m_1 und m_2 in zwei Punkten A_1 und A_2 konzentriert, so findet man als Schwerpunkt x einen Punkt O der Geraden A_1A_2, für den

$$A_1 O \,.\, m_1 = O A_2 \,.\, m_2$$

oder

$$A_1 O \,.\, m_1 = (A_1 A_2 - A_1 O) \,.\, m_2,$$

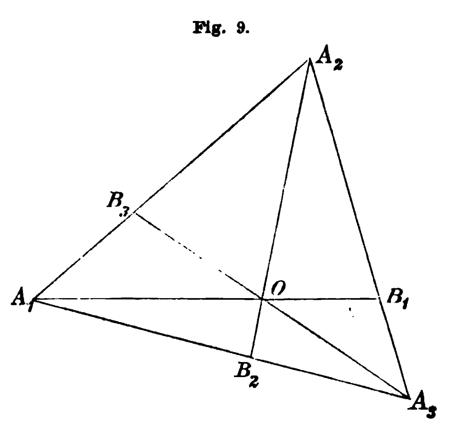
also

(11) $$A_1 O = \frac{A_1 A_2 \,.\, m_2}{m_1 + m_2}$$

ist (vgl. die vorige Nummer).

Sind drei materielle Punkte A_1, A_2, A_3 mit den Massen m_1, m_2, m_3 vorgelegt (Fig. 9), so bestimmen wir nach dem Vorhergehenden den Schwerpunkt B_1 von A_2 und A_3; der Schwerpunkt O des ganzen Systems mufs dann auf der Geraden $A_1 B_1$ liegen. Bestimmen wir ebenso die Schwerpunkte B_2 und B_3 von A_3 und A_1, A_1 und A_2, so gehen auch $A_2 B_2$ und $A_3 B_3$ durch O. Die Konstruktion zweier dieser Geraden genügt also, um den Schwerpunkt zu finden.

Fig. 9.



Die Punkte B_1, B_2, B_3 sind nach dem Vorhergehenden so gelegen, dafs

(12) $$\begin{cases} A_1 B_3 : B_3 A_2 = m_2 : m_1, \\ A_2 B_1 : B_1 A_3 = m_3 : m_2, \\ A_3 B_2 : B_2 A_1 = m_1 : m_3, \end{cases}$$

also

(13) $$\frac{A_1 B_3 \,.\, A_2 B_1 \,.\, A_3 B_2}{B_3 A_2 \,.\, B_1 A_3 \,.\, B_2 A_1} = 1$$

ist. Nach einem bekannten Satze der Elementargeometrie (dem Satze des Ceva) ist dies die Bedingung dafür, dafs die drei auf $A_2 A_3$, $A_3 A_1$, $A_1 A_2$ gelegenen Punkte B_1, B_2, B_3 mit A_1, A_2, A_3 Gerade bestimmen, welche durch denselben Punkt gehen.

Giebt man den drei Punkten A_1, A_2, A_3 bestimmte Massen, so ist der Schwerpunkt O eindeutig bestimmt; umgekehrt folgt aber auch aus der Lage von O das Verhältnis der in A_1, A_2, A_3 anzubringenden Massen (nach (12)). So lange m_1, m_2, m_3 alle positive Gröfsen sind, fällt der Schwerpunkt ins Innere des Dreiecks A_1, A_2, A_3; läfst man jedoch auch negative Massen zu, so kann derselbe jede Lage in der Ebene annehmen. Dieser Umstand giebt die Möglichkeit der Aufstellung eines Koordinatensystems, welches Möbius seinem „Baryzentrischen Kalkül" zu Grunde legt. Man kann nämlich die Lage eines Punktes O in der Ebene dadurch fixieren, dafs man ihn als Schwerpunkt der mit Massen von bestimmtem Verhältnis zu belegenden Punkte A_1, A_2, A_3 ansieht. Die Massenverhält-

nisse $m_1 : m_2 : m_3$ bestimmen die Lage von O eindeutig, und umgekehrt. Übrigens kann man dieses Koordinatensystem von seiner mechanischen Beimengung frei machen, wenn man nach (12) die Massenverhältnisse durch die Verhältnisse der auf den Dreiecksseiten von $A_1 A_2 A_3$ durch die Geraden $A_1 O$, $A_2 O$, $A_3 O$ ausgeschnittenen Strecken ersetzt.

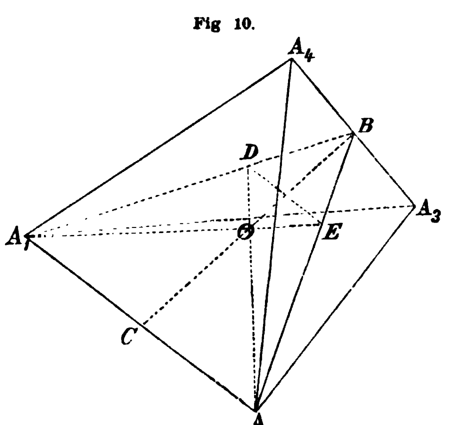
Sind die Massen der drei Punkte gleich, so rücken B_1, B_2, B_3 in die Mitten der Dreiecksseiten; der Schwerpunkt ist also der Schnittpunkt der Mitteltransversalen. Die letzteren schneiden sich bekanntlich so, dafs die unteren (den Seiten anliegenden) Abschnitte sich zu den oberen wie 1 : 2 verhalten.

7. Ähnliche Betrachtungen lassen sich über den Schwerpunkt von vier im Raume gelegenen Massenpunkten A_1, A_2, A_3, A_4, den Eckpunkten eines Tetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ anstellen. Nach der vorigen Nummer bestimmt man zuerst die Schwerpunkte von je drei in einer Ebene gelegenen Punkten; die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten schneiden sich alle in dem Schwerpunkte O.

Hieran läfst sich wieder die Aufstellung eines Koordinatensystems für Punkte des Raumes anknüpfen, das dem für die Ebene vollkommen analog ist.

Haben A_1, A_2, A_3, A_4 gleiche Massen, so ist der Schwerpunkt O der Schnittpunkt der vier Geraden, welche von einem Eckpunkte nach dem Schnittpunkte der Mitteltransversalen der gegenüberliegenden Dreiecksflächen gezogen ist. Dafs diese Geraden wirklich durch denselben Punkt gehen, wird ebenfalls schon in der Elementargeometrie erwiesen. Es ist auch leicht zu zeigen, dafs sich die unteren (den Flächen anliegenden) Abschnitte derselben zu den oberen wie 1 : 3 verhalten. Um dies letztere zu beweisen, legen wir (Fig. 10) durch $A_1 A_2$ und den Mittelpunkt B der gegenüberliegenden Seite eine Ebene. Halbieren wir dann $A_1 A_2$ in C und

Fig 10.



machen auf $A_1 B$ $A_1 D = 2 DB$, auf $A_2 B$ $A_2 E = 2 ED$, so schneiden sich, wie man leicht sieht, BC, $A_1 E$ und $A_2 D$ im Schwerpunkte O, und $A_1 E$ und $A_2 D$ sind zwei der zu untersuchenden Geraden. Nun ist aber $DE \mathbin{\#} A_1 A_2$ und daher $\triangle DEO \sim A_2 A_1 O$, also $OE : OA_1 = DE : A_1 A_2 = 1 : 3$, womit das Behauptete bewiesen ist.

8. Der Schwerpunkt einer homogenen geraden Strecke liegt in ihrer Mitte. Sind zwei solche Strecken gegeben, so mufs der Schwerpunkt auf der Verbindungslinie ihrer Mitten liegen und diese umgekehrt proportional zu den Längen (Massen) der Strecken teilen.

Der Schwerpunkt des Umfangs eines Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ liegt auf der Verbindungslinie des Schwerpunktes C_1 der beiden Seiten $A_1 A_2$ und $A_1 A_3$ mit dem Schwerpunkte, d. h. dem Mittelpunkte B_1 der dritten Seite. C_1 wird erhalten, indem man die Verbindungslinie $B_2 B_3$ der Mitten von $A_1 A_3$ und $A_1 A_2$ (im Innern) so teilt, dafs

$$C_1 B_2 : C_1 B_3 = A_1 A_3 : A_1 A_2 = B_1 B_3 : B_1 B_2$$

wird. Bekanntlich teilt aber die Halbierungslinie eines Winkels im Dreieck die gegenüberliegende Seite proportional zu den beiden anliegenden Seiten. $B_1 C_1$ ist daher die Halbierungslinie des Winkels $B_2 B_1 B_3$ im gleichnamigen Dreieck. In gleicher Weise mufs der Schwerpunkt auch auf den analog konstruierten Geraden $B_2 C_2$ und $B_3 C_3$ liegen. Wir haben daher den Satz:

Der Schwerpunkt des homogenen Dreiecksumfangs ist der Mittelpunkt des Kreises, welcher dem Mittendreieck des gegebenen Dreiecks einbeschrieben ist.

Der Schwerpunkt einer gebrochenen Linie ist ebenfalls leicht zu bestimmen.

9. Ist $y = f(x)$ die Gleichung einer ebenen, homogenen Kurve, ds ein Element der Kurve und begrenzen $x = x_0$ und $x = x_1$ ein endliches Stück derselben, so hat man für den Schwerpunkt desselben die Gleichungen

$$(14)\qquad \left\{\begin{aligned} M\xi &= \mu\int_{x_0}^{x_1} x\,ds = \mu\int_{x_0}^{x_1} x\sqrt{1+y'^2}\,dx,\\ M\eta &= \mu\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}\,dx,\\ M &= \mu\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx. \end{aligned}\right.$$

Als Beispiel nehmen wir einen homogenen Kreisbogen mit dem Radius r, der symmetrisch auf beiden Seiten der x-Achse liegt, so dafs der Schwerpunkt in diese Achse fällt; der Mittelpunkt möge der Nullpunkt sein. Dann haben wir, wenn wir $\mu = 1$ setzen und beachten, dafs zu demselben x zwei Punkte des Bogens gehören,

$$M\xi = 2\int_{x_0}^{r} x\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2\int_{x_0}^{r}\frac{x\,dx}{\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}}$$

$$= \left[-r^2\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}\right]_{x_0}^{r} = 2r\sqrt{r^2-x_0^2} = 2ry_0.$$

Dies ist der Wert der zugehörigen Sehne, multipliziert mit dem Radius. Für M finden wir die Länge s des Bogens. Es ist also

$$\xi = \frac{2ry_0}{s}$$

oder

$$\xi : r = 2y_0 : s, \tag{15}$$

d. h. der Abstand des Schwerpunktes des Kreisbogens vom Mittelpunkte verhält sich zum Radius wie die zugehörige Sehne zum Bogen.

10. Um den Schwerpunkt eines homogenen Dreiecks zu finden, zerlege man dasselbe in unendlich viele, unendlich schmale Streifen, welche einer Seite parallel sind. Die Schwerpunkte dieser Streifen, die als materielle Geraden behandelt werden können, liegen in ihren Mittelpunkten; die Verbindungslinie dieser ist eine Mitteltransversale des Dreiecks und auf dieser, wie auf den beiden anderen Mitteltransversalen mufs der Schwerpunkt des Dreiecks liegen. Also:

Der Schwerpunkt eines homogenen Dreiecks ist der Schnittpunkt seiner Mitteltransversalen; er ist identisch mit dem Schwerpunkte seiner drei gleichmäfsig belasteten Ecken.

Der Schwerpunkt eines homogenen Vierecks kann folgendermafsen gefunden werden. Man teile das Viereck durch eine Diagonale in zwei Dreiecke (von denen eventuell, nämlich bei einem einspringenden Winkel, das eine als negativ anzusehen ist) und bestimme deren Schwerpunkte; auf der Verbindungslinie derselben liegt der Schwerpunkt des Vierecks. Zerlegt man das Viereck hierauf durch die zweite Diagonale und macht dieselbe Konstruktion, so erhält man den Schwerpunkt des Vierecks als Schnittpunkt zweier Geraden.

Das Fünfeck kann auf doppelte Art in ein Dreieck und Viereck zerlegt werden, worauf man analog verfährt. Überhaupt sieht man, dafs der Schwerpunkt eines homogenen ebenen Polygons immer durch elementare Konstruktion aufgefunden werden kann.

11. Die Formeln für den Schwerpunkt ebener Flächenstücke, deren Umgrenzung bekannt ist, sind denen für Körper ganz analog. Als Beispiel wollen wir ein homogenes Kreissegment behandeln, welches wie der Bogen in 9. placiert sei. Der Schwerpunkt liegt wieder auf der x-Achse und wir haben, wenn wir schon eine Integration ausgeführt denken,

$$M\xi = 2\int_{x_0}^{r} x\sqrt{r^2 - x^2}\, dx,$$

$$M = 2\int_{x_0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx.$$

Die Ausführung der Integrationen liefert

$$(16)\qquad \begin{cases} M\xi = -\frac{2}{3}\left[(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{x_0}^{r} = \frac{2}{3}(r^2 - x_0^2)^{\frac{3}{2}}, \\ M = \left[x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin\frac{x}{r}\right]_{x_0}^{r} \\ \quad = \frac{r^2\pi}{2} - x_0\sqrt{r^2 - x_0^2} - r^2 \arcsin\frac{x_0}{r}. \end{cases}$$

Für den Halbkreis wird $x_0 = 0$, also

$$(17)\qquad M\xi = \frac{2}{3}r^3, \quad M = \frac{r^2\pi}{2}, \quad \xi = \frac{4r}{3\pi}.$$

Übrigens ist die Rechnung für einen Parallelstreifen wesentlich dieselbe.

12. Auch die Schwerpunktsgleichung für eine gekrümmte Fläche ist leicht allgemein hinzuschreiben. Wir wollen sogleich eine Rotationsfläche betrachten, deren Achse die x-Achse ist und deren Dichtigkeit auf einem Parallelkreise konstant ist. Ist ds ein Element der Kurve, deren Rotation die Fläche erzeugt, so ist ein Flächenring, welcher durch zwei unendlich benachbarte Parallelkreise ausgeschnitten wird, gleich $2\pi y\,ds$. Zur Bestimmung der Lage des Schwerpunktes auf der x-Achse haben wir daher die Gleichungen

$$(18)\qquad M\xi = 2\pi\int_{x_0}^{x_1} \mu\, x y\, ds, \qquad M = 2\pi\int_{x_0}^{x_1} \mu\, y\, ds.$$

Für eine homogene Kugelzone oder Kalotte (Kugelradius $= r$, $\mu = 1$) haben wir demnach

$$M\xi = 2\pi\int_{x_0}^{x_1} x\sqrt{r^2 - x^2}\,\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\,dx = 2\pi r\int_{x_0}^{x_1} x\,dx$$
$$= \pi r\,(x_1^2 - x_0^2),$$
$$M = 2\pi r\int_{x_0}^{x_1} dx = 2\pi r\,(x_1 - x_0),$$

woraus

$$(19)\qquad \xi = \frac{x_0 + x_1}{2}$$

folgt. Der Schwerpunkt liegt also in der Mitte der Achse der Zone oder Kalotte.

Dieses Resultat folgt auch schon aus dem elementaren Satze, daſs Zonen derselben Kugel von gleicher Höhe flächengleich sind.

13. Von homogenen Körpern wollen wir zuerst das Tetraeder untersuchen. Wir zerlegen dasselbe durch Parallelebenen zu einer Fläche in unendlich dünne Schichten, die als massenbelegte Dreiecke angesehen werden können. Die Schwerpunkte derselben liegen alle auf der Geraden,

welche den Schwerpunkt der Grundfläche mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte verbindet. Wir haben den Satz:

Die Verbindungslinien der Eckpunkte eines Tetraeders mit den Schwerpunkten der gegenüberliegenden Flächen schneiden sich im Schwerpunkte des Tetraeders. Dieser Schwerpunkt ist mit demjenigen der Ecken des Tetraeders, die mit gleicher Masse belegt zu denken sind, identisch. Derselbe liegt (vgl. Nr. 7) in $\frac{1}{4}$ der Höhe des Tetraeders, von irgend einer Fläche aus gerechnet, da sich die genannten Transversalen im Verhältnisse von 1 : 3 teilen.

In ähnlicher Weise bestimmen wir den Schwerpunkt einer beliebigen Pyramide oder eines Kegels. Durch Parallelebenen zur Grundfläche wird der Körper in Schichten geteilt, deren Schwerpunkte auf der Geraden liegen, welche die Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet. Da ferner der Körper in unendlich kleine dreiseitige Pyramiden mit der gleichen Spitze zerlegt werden kann, deren Schwerpunkte alle in $\frac{1}{4}$ der Höhe liegen, so schliefsen wir, dafs der Schwerpunkt einer Pyramide oder eines Kegels auf der Verbindungslinie der Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche in $\frac{1}{4}$ der Höhe liegt.

Der Schwerpunkt eines homogenen Polyeders kann durch geeignete Zerlegungen bestimmt werden.

14. Für einen Rotationskörper, der zwischen den Ebenen zweier Parallelkreise homogen und dessen Achse die x-Achse ist, erhalten wir leicht als Bestimmungsgleichungen des Schwerpunktes

$$M\xi = \pi\int_{x_0}^{x_1} \mu x y^2 dx, \quad M = \pi\int_{x_0}^{x_1} \mu y^2 dx. \tag{20}$$

Für eine homogene Kugelschicht (Kugelradius $= r$, $\mu = 1$) finden wir

$$\left\{\begin{aligned} M\xi &= \pi\int_{x_0}^{x_1} x\,(r^2 - x^2)\,dx = \frac{r^2\,(x_1^2 - x_0^2)}{2}\,\pi - \frac{x_1^4 - x_0^4}{4}\,\pi, \\ M &= \pi\int_{x_0}^{x_1} (r^2 - x^2)\,dx = r^2\,(x_1 - x_0)\,\pi - \frac{x_1^3 - x_0^3}{3}\,\pi. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Für die Halbkugel wird hieraus

$$M\xi = \frac{r^4\pi}{4}, \qquad M = \frac{2r^3\pi}{3},$$

also

$$\xi = \frac{3r}{8}. \tag{22}$$

15. Zum Schlusse mögen noch die beiden (rein geometrischen) Sätze angefügt werden, welche unter dem Namen der „Guldin'schen Regeln" bekannt sind. Eine Rotationsfläche möge durch Rotation

einer ebenen Kurve um die x-Achse, welche in derselben Ebene liegt, entstehen; ihre Oberfläche ist dann

$$O = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\,ds.$$

Die eine Gleichung zur Bestimmung des Schwerpunktes jener als homogen betrachteten ebenen Kurve lautet, wenn l die Länge derselben bezeichnet,

$$l\eta = \int_{x_0}^{x_1} y\,ds.$$

Demnach ist

(23) $$O = l \,.\, 2\pi\eta.$$

Der Inhalt einer Fläche, welche durch Rotation einer Kurve um eine Achse entsteht, ist gleich dem Mantel eines geraden Cylinders, welcher die Länge jener Kurve zur Seitenlinie und den Abstand des Schwerpunktes der (homogenen) Kurve von der Achse zum Radius hat; oder gleich einem Rechteck, welches die Länge der Kurve zur einen, den Umfang des von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Kreises zur andern Seite hat.

Entsteht ein Körper durch Rotation einer geschlossenen ebenen Figur um eine aufserhalb gelegene Gerade derselben Ebene, so hat man bei der gleichen Bezeichnung für seinen Inhalt

$$J = 2\pi \int\int y\,dx\,dy,$$

wo die Integration über das ebene Flächenstück zu erstrecken ist, und für den Schwerpunkt des als homogen angenommenen Flächenstücks, wenn F der Flächeninhalt desselben ist,

$$F\eta = \int\int y\,dx\,dy.$$

Daher ist

(24) $$J = F \,.\, 2\pi\eta.$$

Wird ein ringförmiger Körper durch Rotation einer ebenen Figur um eine aufserhalb von ihr gelegene Gerade derselben Ebene erzeugt, so ist ihr Rauminhalt demjenigen eines Cylinders gleich, welcher die ebene Figur zur Grundfläche und die Länge des von ihrem Schwerpunkte beschriebenen Kreisumfangs zur Höhe hat.

§ 56.

Die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines starren Systems (erster Teil).

1. Ebenso wie man aus dem allgemeinen Prinzipe der virtuellen Geschwindigkeiten zu dem d'Alembert'schen Prinzipe gelangt, indem man die Gröfsen

$$X_\alpha,\ Y_\alpha,\ Z_\alpha$$

durch

$$X_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2},\quad Y_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2},\quad Z_\alpha - m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2}$$

ersetzt, gelangt man auch im speziellen Falle von den Gleichgewichtsbedingungen eines starren Systems durch die gleiche Substitution zu den Bewegungsgleichungen. Aus den Gleichungen (3) und (4) in § 53 werden die Bewegungsgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum m_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = \sum X_\alpha, \\ \sum m_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} = \sum Y_\alpha, \\ \sum m_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} = \sum Z_\alpha \end{cases}$$

und

$$(2)\qquad \begin{cases} \sum m_\alpha \left(y_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2} - z_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2}\right) = \sum (y_\alpha Z_\alpha - z_\alpha Y_\alpha), \\ \sum m_\alpha \left(z_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} - x_\alpha \frac{d^2 z_\alpha}{dt^2}\right) = \sum (z_\alpha X_\alpha - x_\alpha Z_\alpha), \\ \sum m_\alpha \left(x_\alpha \frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} - y_\alpha \frac{d^2 x_\alpha}{dt^2}\right) = \sum (x_\alpha Y_\alpha - y_\alpha X_\alpha). \end{cases}$$

2. Führt man durch die Gleichungen (4) von § 55 die Koordinaten ξ, η, ζ des Schwerpunktes ein, so wird aus (1)

$$(3)\qquad M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X_\alpha,\quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y_\alpha,\quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum Z_\alpha.$$

Diese Gleichungen sagen aus, dafs sich der Schwerpunkt des starren Systems so bewegt, als wenn in ihm die Gesamtmasse des Systems vereinigt wäre und als wenn auf ihn sämtliche Kräfte, welche die einzelnen Punkte des Systems angreifen, parallel zu ihrer ursprünglichen Richtung einwirkten. Es ist dies derselbe Satz, der bereits § 24, 3 in gröfserer Allgemeinheit ausgesprochen wurde.

Wir können uns die Bewegung des starren Systems als eine Bewegung seines Schwerpunktes nach den Gleichungen (3), verbunden mit einer

Drehung um denselben — wenn wir diesen Ausdruck hier auf eine Bewegung ausdehnen, bei welcher nur ein Punkt fest bleibt — vorstellen. Diese Drehung hängt von den Gleichungen (2) ab, deren Diskussion uns jetzt beschäftigen soll.

3. In § 53, 5 bezeichneten wir den senkrechten Abstand eines Punktes O von der Richtung einer Kraft, multipliziert mit dieser Kraft, als das statische Moment der Kraft in Bezug auf den Punkt O. Man kann auch in analoger Weise von dem statischen Momente einer Kraft in Bezug auf eine Achse sprechen, indem man darunter das Produkt dieser Kraft in den kürzesten Abstand der Kraftrichtung von der Achse versteht.

Sind die Komponenten einer Kraft, welche im Punkte x, y, z angreift, X, Y, Z, so sind die statischen Momente oder Drehungsmomente in Bezug auf die z-Achse

$$0, \pm xY, \pm yX$$

und analog in Bezug auf die übrigen Achsen. Es ist unmittelbar einleuchtend und wird in der Folge noch deutlicher hervortreten, dafs die Drehung, welche eine Kraft hervorbringt, falls eine Achse festbleibt, von dem Drehungsmomente abhängt. Dem Sinne dieser Drehung gemäfs bestimmen wir das noch fragliche Zeichen des Drehungsmomentes. Wir gehen zu diesem Zwecke von den Festsetzungen in § 52, 13 aus. Denken wir uns z. B. die positiv gerichtete z-Achse als Rotationsachse, so wird die positive Drehung von der positiv gerichteten x-Achse zur positiv gerichteten y-Achse gehen. Da aber die Komponente Y, falls sie nebst x positiv ist, in diesem Sinne, die Komponente X aber, falls sie nebst y positiv ist, im umgekehrten Sinne zu drehen strebt, so werden wir

$$+xY \quad \text{und} \quad -yX$$

als die Drehungsmomente von Y und X in Bezug auf die z-Achse ansehen. Analoges gilt für die anderen Achsen (vgl. § 53, 11, Anm.).

Bei dieser Festsetzung erkennen wir in den rechten Seiten der Gleichungen (2) die Summen der Drehungsmomente der einzelnen Kraftkomponenten in Bezug auf die x-, y- und z-Achse. Dies stimmt mit den Betrachtungen von § 53, 11 überein (wo nur, was gleichgültig ist, an Stelle einer Kraft ein Kräftepaar gesetzt wurde), falls das Drehungsmoment einer Kraft der Summe der Drehungsmomente seiner Komponenten gleich ist. Dies ist aber eben nach § 53, 11 wirklich der Fall, da wir die dort gegebenen Betrachtungen auch hier anwenden können. Wir schreiben

$$(6) \qquad \begin{cases} M_x = \sum (y_\alpha Z_\alpha - z_\alpha Y_\alpha), \\ M_y = \sum (z_\alpha X_\alpha - x_\alpha Z_\alpha), \\ M_z = \sum (x_\alpha Y_\alpha - y_\alpha X_\alpha). \end{cases}$$

4. Sind die Drehungsmomente M_x, M_y, M_z für drei aufeinander senkrechte Achsen (x, y, z) bekannt, so ist es leicht, diejenigen für drei andere aufeinander senkrechte Achsen, welche denselben Schnittpunkt besitzen, herzuleiten. Wir nehmen die neuen Achsen als Koordinatenachsen eines Systems ξ, η, ζ; es mag sein

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ \eta = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ \zeta = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{cases}$$

wo die α_1 u. s. w. den bekannten Relationen § 52, (3), (4), (5), (6) genügen. Bezeichnen Ξ, H, Z die Komponenten derjenigen Kraft, welche in Bezug auf das ursprüngliche Koordinatensystem die Komponenten X, Y, Z hat, in Bezug auf das neue System, so ist

$$(6)\qquad \begin{cases} \Xi = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \\ H = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z, \\ Z = \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z. \end{cases}$$

Ferner haben wir

$$(7)\qquad M_\xi = \sum (\eta_\alpha Z_\alpha - \zeta_\alpha H_\alpha)$$

oder bei Benutzung von (5) und (6)

$$M_\xi = \sum (\beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2)(y_\alpha Z_\alpha - z_\alpha Y_\alpha) + (\beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3)(z_\alpha X_\alpha - x_\alpha Z_\alpha) + (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)(x_\alpha Y_\alpha - y_\alpha X_\alpha),$$

somit nach § 52, (6)

$$(8)\qquad \begin{cases} M_\xi = \alpha_1 M_x + \alpha_2 M_y + \alpha_3 M_z, \\ M_\eta = \beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z, \\ M_\zeta = \gamma_1 M_x + \gamma_2 M_y + \gamma_3 M_z. \end{cases}$$

5. Durch geeignete Transformation ist es nun möglich, die drei Drehungsmomente auf ein einziges, das Hauptdrehungsmoment M_0 zurückzuführen. Wir behaupten, dafs dieses Hauptdrehungsmoment der Gröfse und dem Sinne nach nebst seiner Achse erhalten wird, wenn man die Drehungsmomente in derselben Weise, wie in § 51, 14 die Rotationen, zusammensetzt. Wir denken uns die Gröfsen M_x, M_y, M_z auf den entsprechenden Achsen unter den gleichen Bestimmungen über den Drehungssinn wie in § 51, 14 abgetragen und erhalten dann die Achse des Hauptdrehungsmomentes in der Diagonale des hierdurch bestimmten Parallelepipedons, die zugleich durch ihre Gröfse und Richtung die Gröfse und Richtung des Hauptdrehungsmomentes bestimmt. Dafs dem wirklich so ist, geht aus den Gleichungen (8) hervor. Die Gröfse der so definierten Diagonale, die in die ξ-Achse fallen möge, ist nämlich

$$(9) \qquad M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

während ihre Richtungkosinus

$$(10) \qquad \alpha_1 = \frac{M_x}{M_o}, \quad \alpha_2 = \frac{M_y}{M_o}, \quad \alpha_3 = \frac{M_z}{M_o}$$

sind. Setzen wir diese Werte in (8) ein, so wird in der That

$$M_\xi = M_o,$$

ferner bei Berücksichtigung von § 52, (4)

$$M_\eta = M_o(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3) = 0$$

und ebenso

$$M_\zeta = 0.$$

Wählen wir die Achse des Hauptdrehungsmomentes zur x-Achse, so nehmen die Gleichungen (2) die vereinfachte Form an:

$$(11) \qquad \begin{cases} \sum m\left(y\dfrac{d^2z}{dt^2} - z\dfrac{d^2y}{dt^2}\right) = M_o, \\ \sum m\left(z\dfrac{d^2x}{dt^2} - x\dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = 0, \\ \sum m\left(x\dfrac{d^2y}{dt^2} - y\dfrac{d^2x}{dt^2}\right) = 0. \end{cases}$$

6. Wenn die Bewegungsgleichungen (2) zur Anwendung brauchbar sein sollen, so müssen die linken Seiten so transformiert werden, daſs in ihnen als Unbekannte nur die noch fehlenden Bestimmungsstücke der Bewegung, resp. deren Differentialquotienten, auftreten. Die Zahl derselben ist drei, da drei andere durch die Beschreibung des Weges des Schwerpunktes gegeben sind. Nach den Untersuchungen von § 51 und § 52 kann die Gesamtbewegung in jedem Zeitteilchen als eine Translation eines beliebigen Punktes, als den wir den Schwerpunkt nehmen wollen, und eine Rotation um eine durch diesen gehende Achse angesehen werden; diese Achse ändert im allgemeinen fortwährend ihre Lage im Raume sowohl wie im Körper.

Die Verhältnisse werden am Klarsten werden, wenn wir zunächst annehmen, daſs eine Gerade des Körpers festbleibe, daſs er also um eine Achse zu rotieren gezwungen sei, die übrigens nicht durch den Schwerpunkt zu gehen braucht. Die x-Achse möge die Rotationsachse sein. Die Bewegung besitzt dann nur einen Grad der Freiheit und die erste der Gleichungen (2) wird sie bis auf Konstanten bestimmen. Es ist in diesem Falle

$$y^2 + z^2 = r^2$$

für jeden Punkt des Körpers eine von der Zeit unabhängige Gröſse, so wie auch x dieses Punktes keine Veränderung erleidet. Wir können

$$y = r\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta$$

setzen und haben infolge der Konstanz von r

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -r\cos\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - r\sin\vartheta\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -r\sin\vartheta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + r\cos\vartheta\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2},$$

so dafs die erste Gleichung (2) bei Vereinfachung der Bezeichnung zu

$$\sum mr^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \sum(yZ - zY)$$

oder, da der Drehungswinkel ϑ für jedes r der gleiche ist, zu

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}\sum mr^2 = \sum(yZ - zY) = M_x \tag{12}$$

wird. $\frac{d\vartheta}{dt}$ ist die Winkelgeschwindigkeit, also $\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$ die Winkelbeschleunigung. Die Gröfse Σmr^2, welche sowohl von der Massenverteilung im Körper als auch von der speziellen Lage der Drehungsachse in ihm abhängt, heifst nach Euler's Vorgang das Trägheitsmoment für diese Achse. Wir können sagen:

Bei der Drehung um eine Achse ist die Winkelbeschleunigung gleich dem Drehungsmomente für diese Achse, dividiert durch das Trägheitsmoment für dieselbe.

Die Dimension des Trägheitsmomentes ist

$$l^2m.$$

7. Das Drehungsmoment und das Trägheitsmoment spielen bei der Drehung eines festen Körpers um eine Achse eine ganz analoge Rolle, wie die Kraft und die Masse bei der Bewegung eines materiellen Punktes. Statt sämtlicher auf den Körper einwirkender Kräfte kann man eine einzige einführen, welche dem Drehungsmomente gleich ist und in der Einheit der Entfernung von der Achse in der Richtung der Drehung wirkt. Ebenso kann man die sämtlichen Massenelemente des Körpers durch eine dem Trägheitsmomente gleiche Masse ersetzen, welche in der Einheit der Entfernung von der Achse angebracht ist. — Die Wirkung einer an dem festen Körper angreifenden, in die Drehungsrichtung fallenden Kraft, ist der ersten Potenz ihres Abstandes von der Drehungsachse proportional, wie wir dies schon früher erkannt haben. Der Widerstand, welchen ein Massenteil der Winkelbeschleunigung entgegensetzt, ist dem Quadrate jenes Abstandes proportional. Diese Thatsache ist auch auf ganz elementarem Wege zu erkennen. Möge an einem im übrigen massenlosen starren Systeme die Masse m einmal in der Entfernung 1, einmal in der Entfernung r von der Drehungsachse angebracht sein, während beide Male die Kraft P in der Drehungsrichtung in der Entfernung 1 von der Achse wirkt. Im ersten Falle können wir den Angriffspunkt der Kraft mit dem Sitze der Masse identifizieren; die Beschleunigung wird dieselbe sein, wie wenn die Kraft auf einen Punkt mit der Masse m einwirkte, da die feste Achse der Bewegung kein Hindernis entgegenstellt. Im zweiten Falle können wir die Kraft P in der Entfernung 1 durch

die Kraft $\frac{P}{r}$ in dem Sitze der Masse ersetzen; die Beschleunigung der Masse ist daher nur der $r$te Teil der früheren. Zugleich ist ersichtlich, dafs die Verschiebung in der Entfernung r von der Achse nur den $r$ten Teil der Winkeldrehung bewirkt, wie die gleiche Verschiebung in der Entfernung 1. Demnach reduziert sich die Winkelbeschleunigung im zweiten Falle auf den r^2ten Teil derjenigen im ersten.

Bevor wir in der Behandlung der allgemeinen Bewegungsgleichungen des starren Systems fortfahren, wollen wir uns mit der Theorie der Trägheitsmomente eingehender beschäftigen.

§ 57.

Das Trägheitsmoment.

1. Der Ausdruck für das Trägheitsmoment

$$\sum mr^2, \tag{1}$$

in dem r die Entfernung der Masse m von der Drehungsachse bedeutet, geht für einen kontinuierlichen Körper in das Integral*)

$$\int r^2 dm = \iiint \mu r^2 dx\, dy\, dz \tag{2}$$

über, in welchem μ wieder die Dichtigkeit im Punkte x, y, z bezeichnet. Übrigens werden wir in der Folge meistens die Form (1) als die allgemeinere anwenden. Die Trägheitsmomente für die drei Koordinatenachsen als Drehungsachsen werden durch die Ausdrücke

$$\sum m(y^2+z^2), \quad \sum m(z^2+x^2), \quad \sum m(x^2+y^2) \tag{3}$$

oder die entsprechenden Integrale dargestellt.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin zu untersuchen, in welcher Beziehung die Trägheitsmomente desselben Körpers für verschiedene Drehungsachsen zueinander stehen. Die sehr eleganten und übersichtlichen Resultate, zu welchen diese Untersuchung führt, verdankt man Cauchy und Poinsot.

2. Zuerst vergleichen wir die Trägheitsmomente eines Körpers für Achsen, welche durch denselben Punkt gehen, der als Nullpunkt des Koordinatensystems angenommen werden mag. Eine beliebige, durch den Nullpunkt gehende Drehungsachse möge mit den Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν einschliefsen; es handelt sich darum, die Entfernung r eines Punktes x, y, z von der Achse zu bestimmen. Zu diesem Zwecke verbinden wir den Punkt x, y, z mit dem Nullpunkte durch eine Gerade, deren Richtungskosinus

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

*) Bei der folgenden Untersuchung, in der es sich um keine Bewegung des Körpers handelt, denken wir uns das Koordinatensystem im Körper festgelegt.

sind. Bezeichnet Θ den Winkel zwischen dieser Geraden und der Drehungsachse, so ist bekanntermaſsen

$$\cos\Theta = \frac{x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Ferner haben wir

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.\,\sin\Theta,$$

also

$$r^2 = x^2+y^2+z^2 - (x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu)^2, \tag{4}$$

eine Gleichung, die auch infolge der Relation

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1 \tag{5}$$

in die Form

$$\begin{cases} r^2 = (y^2+z^2)\cos^2\lambda + (z^2+x^2)\cos^2\mu + (x^2+y^2)\cos^2\nu \\ \quad - 2yz\cos\mu\cos\nu - 2zx\cos\nu\cos\lambda - 2\,xy\cos\lambda\cos\mu \end{cases} \tag{6}$$

gesetzt werden kann.

Das Trägheitsmoment für unsere Drehungsachse lautet daher

$$\begin{cases} \sum mr^2 = \cos^2\lambda\sum m(y^2+z^2) + \cos^2\mu\sum m(z^2+x^2) \\ \qquad + \cos^2\nu\sum m(x^2+y^2) - 2\cos\mu\cos\nu\sum myz \\ \qquad - 2\cos\nu\cos\lambda\sum mzx - 2\cos\lambda\cos\mu\sum mxy. \end{cases} \tag{7}$$

Die sechs Summen, welche auf der rechten Seite auftreten, sind für jede beliebige Lage der durch den Nullpunkt gehenden Achse konstante Gröſsen; die drei ersten insbesondere, die Trägheitsmomente in Bezug auf die Koordinatenachsen, sind ihrer Form nach stets positiv. Sind diese sechs Gröſsen, die wir durch

$$\begin{cases} a_{11} = \sum m(y^2+z^2), & a_{22} = \sum m(z^2+x^2), & a_{33} = \sum m(x^2+y^2), \\ a_{23} = \sum myz, & a_{31} = \sum mzx, & a_{12} = \sum mxy \end{cases} \tag{8}$$

bezeichnen*) wollen, bekannt, so läſst sich mittels (7) das Trägheitsmoment für jede Neigung der Drehungsachse berechnen. Doch werden wir sofort die sechs Konstanten auf drei zurückführen.

3. Zu diesem Zwecke gehen wir von einer einfachen geometrischen Interpretation aus. Wir setzen bei beliebiger Wahl der Maſseinheit

$$\xi = \frac{\cos\lambda}{\sqrt{\Sigma mr^2}}, \quad \eta = \frac{\cos\mu}{\sqrt{\Sigma mr^2}}, \quad \zeta = \frac{\cos\nu}{\sqrt{\Sigma mr^2}}, \tag{9}$$

wodurch ξ, η, ζ als die Koordinaten eines Punktes der Drehungsachse, der die Entfernung $1:\sqrt{\Sigma mr^2}$ vom Nullpunkte hat, definiert sind. Die

*) Die drei Gröſsen a_{23}, a_{31}, a_{12} werden nach dem Vorgange von Rankine Deviationsmomente genannt.

Wurzel im Nenner wollen wir stets als positiv betrachten, während wir unter den beiden Richtungen der Drehungsachse diejenige auswählen, welche den Festsetzungen von § 51, 14 entspricht; die Vorzeichen von $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ sind hierdurch eindeutig bestimmt. Dann geht (7) über in

$$(10)\quad a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 - 2a_{23}\eta\zeta - 2a_{31}\zeta\xi - 2a_{12}\xi\eta = 1.$$

Dies ist, wenn ξ, η, ζ als variable Punktkoordinaten aufgefafst werden, die Gleichung einer Fläche zweiter Ordnung. Die Gröfsen ξ, η, ζ können nach (9) nur dann unendlich werden, wenn $\Sigma m r^2 = 0$ wird. Da aber sämtliche Glieder der Summe positiv sind, so kann dies nur eintreffen, wenn für sämtliche Punkte des Systems $r = 0$ wird, d. h. wenn sich das starre System auf eine Gerade reduziert, welche hier die Drehungsachse ist. Diesen Fall können wir von der Untersuchung ausschliefsen. In jedem andern Falle bleiben ξ, η, ζ überall endlich, die Gleichung (10) stellt also ein Ellipsoid dar. Dasselbe heifst das Trägheitsellipsoid für den gewählten Nullpunkt; die Achsen desselben heifsen die Hauptträgheitsachsen und die Trägheitsmomente für letztere die Hauptträgheitsmomente.

Nehmen wir die Achsen des Ellipsoids zu Koordinatenachsen, so nimmt (10) bekanntermafsen die vereinfachte Form

$$(10\text{a})\qquad a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 = 1$$

oder (7) die Form

$$(11)\qquad \sum m r^2 = a_{11}\cos^2\lambda + a_{22}\cos^2\mu + a_{33}\cos^2\nu$$

an, worin

$$(12)\quad a_{11} = \sum m(y^2+z^2),\quad a_{22} = \sum m(z^2+x^2),\quad a_{33} = \sum m(x^2+y^2)$$

die drei Hauptträgheitsmomente bedeuten. Die Achsen des Ellipsoids sind

$$\frac{1}{\sqrt{a_{11}}},\quad \frac{1}{\sqrt{a_{22}}},\quad \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}.$$

So erhalten wir den wichtigen Satz:

Die Trägheitsmomente für alle durch denselben Punkt gehenden Drehungsachsen sind durch die Lage der letzteren vollkommen bestimmt, wenn die drei Hauptträgheitsmomente, welche sich auf drei zueinander senkrechte Achsen, die Hauptträgheitsachsen beziehen, bekannt sind. Für eine dieser Achsen (falls alle drei Hauptträgheitsmomente verschieden sind) wird das Trägheitsmoment ein Maximum, für eine andere ein Minimum, für die dritte weder ein Maximum noch ein Minimum. Denkt man sich auf diesen drei Achsen vom Schnittpunkte aus Strecken abgetragen, welche den reciproken Werten der Quadratwurzeln aus den entsprechenden Trägheitsmomenten gleich*) sind und

*) Natürlich nur numerisch gleich bei passend gewählten Einheiten.

macht sie zu den Halbachsen eines Ellipsoids, so giebt der vom Mittelpunkte nach einem Punkte der Oberfläche gezogene Strahl den reciproken Wert aus der Quadratwurzel des Trägheitsmomentes für diesen Strahl als Achse an.

Werden zwei Achsen des Ellipsoids gleich, so hat das Trägheitsmoment für alle in deren Ebene gelegenen Achsen den gleichen Wert; die auf dieser Ebene senkrechte Achse mufs dann als Hauptträgheitsachse im engeren Sinne bezeichnet werden. Wird das Ellipsoid zur Kugel, d. h. werden seine drei Achsen gleich, so hat das Trägheitsmoment für jede Richtung seiner Achse denselben Wert.

4. Sehr einfach erledigt sich die Frage nach dem Einflusse einer Parallelverschiebung der Drehungsachse auf den Wert des Trägheitsmomentes. Identifizieren wir die Drehungsachse mit der x-Achse, so können wir durch die Substitution

$$y = \eta + b, \quad z = \zeta + c$$

ein neues Koordinatensystem einführen, dessen ξ-Achse durch Parallelverschiebung der x-Achse erhalten wird. Nun ist das Trägheitsmoment für die x-Achse

$$(13) \quad \begin{cases} \sum m(y^2 + z^2) = \sum m[(\eta + b)^2 + (\zeta + c)^2] \\ = \sum m(\eta^2 + \zeta^2) + 2b\sum m\eta + 2c\sum m\zeta + (b^2 + c^2)\sum m. \end{cases}$$

Diese Gleichung vereinfacht sich wesentlich, wenn der Schwerpunkt des Körpers der Nullpunkt des Systems ξ, η, ζ ist; denn nach § 55, (3) ist alsdann

$$\sum m\eta = 0, \quad \sum m\zeta = 0.$$

Setzen wir wieder

$$\sum m = M,$$

so wird

$$(14) \quad \sum m(y^2 + z^2) = \sum m(\eta^2 + \zeta^2) + (b^2 + c^2) M.$$

Auf der linken Seite von (14) steht das Trägheitsmoment für eine beliebige Achse, die willkürlich zur x-Achse gemacht wurde, auf der rechten das Trägheitsmoment für eine hierzu parallele Achse, welche durch den Schwerpunkt geht, und das Trägheitsmoment in Bezug auf die letztere Achse für die Gesamtmasse des Körpers, welche in der Entfernung $\sqrt{b^2 + c^2}$ von dieser Achse, d. h. in einem Punkte der früheren Achse anzubringen ist. Wir haben den Satz:

Das Trägheitsmoment eines Körpers für eine beliebige Achse wird erhalten, indem man das Trägheitsmoment für eine zu ihr parallele Achse, welche durch den Schwerpunkt geht, bestimmt und es um das Trägheitsmoment eines materiellen Punktes, welcher die Gesamtmasse des ganzen Körpers enthält

und um die Entfernung der beiden Achsen von der letzteren Achse absteht, in Bezug auf diese, vermehrt.

Da die Glieder von (14) wesentlich positiv sind, so ist das Trägheitsmoment für irgend eine Achsenrichtung ein Minimum, wenn die Achse durch den Schwerpunkt geht; es ist desto gröfser, je weiter die Achse vom Schwerpunkte entfernt ist.

Das Trägheitsellipsoid, welches den Schwerpunkt zum Mittelpunkte hat, heifst das Zentralträgheitsellipsoid; die Hauptachsen desselben heifsen die Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes, die auf sie bezogenen Trägheitsmomente die Hauptträgheitsmomente des Schwerpunktes. Die Zusammenfassung aller gefundenen Sätze liefert das wichtige Resultat, dafs die Kenntnis der Hauptträgheitsmomente des Schwerpunktes und der Masse des Körpers genügt, um sein Trägheitsmoment für eine beliebige Achse von bekannter Richtung und bekanntem Abstande vom Schwerpunkte zu bestimmen. Wir sind hierdurch in den Stand gesetzt, die Bewegung eines Körpers in wichtigen Fällen ohne jede Rücksichtnahme auf seine Gestalt zu verfolgen, wenn nur die angegebenen Gröfsen bekannt sind.

In der Folge wollen wir die Hauptträgheitsmomente des Schwerpunktes für einige homogene Körper von einfacher Gestalt bestimmen. Bemerkt möge hierbei noch werden, dafs das Trägheitsmoment eines festen Komplexes von Körpern in Bezug auf irgend eine Achse der Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Körper gleich ist, was aus der Definitionsgleichung unmittelbar hervorgeht.

5. Bei der Berechnung der Trägheitsmomente handelt es sich vor allem um die Bestimmung der Lage der Hauptträgheitsachsen, insbesondere der durch den Schwerpunkt gehenden. In vielen Fällen brauchen dieselben nicht durch ausführliche Rechnung gefunden zu werden, was die analytische Reduktion der Gleichung (10) erfordert, deren Koeffizienten direkt zu berechnen sind; vielmehr genügen oft einfache Schlüsse zu ihrer Bestimmung.

Ist die Massenverteilung in Bezug auf verschiedene Geraden des Systems gleich oder symmetrisch gleich, so kommen ihnen gleiche Trägheitsmomente zu. Stehen zwei solche durch denselben Punkt gehende Achsen aufeinander senkrecht, so müssen sie notwendigerweise Hauptträgheitsachsen sein, da ein Ellipsoid keine gleichen und aufeinander senkrechten Durchmesser besitzt, welche nicht zugleich Hauptachsen sind. Die dritte Hauptträgheitsachse ist durch die beiden gefundenen, wie immer, mitbestimmt, da sie auf ihnen senkrecht steht. Besitzen mehr als zwei durch denselben Punkt gehende Geraden in einer Ebene gleiche Trägheitsmomente, so müssen alle durch den Punkt gehenden, in derselben Ebene gelegenen Achsen gleiche Trägheitsmomente aufweisen, d. h. die Ebene mufs die Äquatorebene des Trägheitsellipsoids sein, das hier in ein Rotationsellipsoid übergeht. Eine Ellipse kann nämlich nicht mehr als zwei gleiche Durchmesser haben, wenn sie nicht ein Kreis ist. Die dritte Hauptträg-

heitsachse steht wieder auf dieser Ebene senkrecht. So ist die Achse eines homogenen Rotationskörpers für jeden ihrer Punkte die einzelne Hauptträgheitsachse; die Trägheitsachsen in einer Parallelkreisebene sind alle gleich.

Sind die Massenteile eines Körpers zu einer Ebene symmetrisch gelegen, so dafs in einem auf der Ebene errichteten Perpendikel beiderseits in gleicher Entfernung von der Ebene gleiche Massenteile liegen, so ist jedes solche Perpendikel für seinen Fufspunkt eine Hauptträgheitsachse; die beiden anderen Achsen müssen daher in die Symmetrieebene fallen. Da nämlich das Trägheitsellipsoid für einen Punkt der Symmetrieebene notwendigerweise zu letzterer symmetrisch liegt, so mufs eine seiner Hauptebenen in die Symmetrieebene fallen, woraus das Übrige folgt. Besitzt ein Körper drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen, so sind ihre Schnittlinien die Hauptträgheitsachsen für ihren Schnittpunkt.

Das Centralträgheitsellipsoid eines jeden der fünf regulären Polyeder ist eine Kugel. Dies ist bei jedem einzelnen leicht nachzuweisen. Beim regulären Tetraeder z. B. mufs nach dem Vorhergehenden jede durch ein Höhenperpendikel und eine dasselbe schneidende Kante gelegte Ebene zwei Hauptträgheitsachsen enthalten u. s. w.

6. Der Schwerpunkt eines homogenen, rechtwinkligen Parallelepipedons ist dessen Mittelpunkt. Nach den letzten Betrachtungen sind die drei durch denselben gehenden, zu den Seiten parallelen Geraden die Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes. Nehmen wir diese drei Geraden als Koordinatenachsen und setzen die Seitenlängen des Parallelepipedons gleich $2a$, $2b$, $2c$, so ist das Trägheitsmoment für die Achse $2a$:

$$A = \mu \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c} (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$$

$$= \mu \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b} \left[y^2 z + \frac{z^3}{3} \right]_{-c}^{+c} dx\, dy$$

$$= 2\mu c \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b} \left(y^2 + \frac{c^2}{3} \right) dx\, dy$$

$$= \frac{4\mu b c (b^2 + c^2)}{3} \int_{-a}^{+a} dx$$

oder

$$A = \frac{8\mu a b c (b^2 + c^2)}{3} = \frac{M (b^2 + c^2)}{3}, \tag{15}$$

und analog sind die Trägheitsmomente für die Achsen $2b$ und $2c$*)

*) Die Trägheitsmomente für Körper sind allgemein vom fünften Grade in den Liniengröfsen, da das Quadrat einer Strecke und eine Masse, die in den Liniengröfsen kubisch ist, als Faktoren darin erscheinen.

$$(16)\qquad \begin{cases} B = \dfrac{8\mu abc(c^2+a^2)}{3} = \dfrac{M(c^2+a^2)}{3}, \\ C = \dfrac{8\mu abc(a^2+b^2)}{3} = \dfrac{M(a^2+b^2)}{3}. \end{cases}$$

7. Bei dem homogenen, geraden Kreiscylinder (Länge $= 2l$, Radius $= r$) ist wieder der Mittelpunkt der Schwerpunkt; die Achse ist die eine Hauptträgheitsachse, während für die dazu senkrechten Richtungen die Trägheitsmomente gleich werden.

Der Schwerpunkt sei der Nullpunkt des Koordinatensystems, die Cylinderachse die z-Achse. Setzen wir

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta,$$

so ist das Trägheitsmoment für die Cylinderachse durch

$$L = \mu \int_{-l}^{+l} \int_0^r \int_0^{2\pi} \varrho^3 \, dz \, d\varrho \, d\vartheta$$

dargestellt. Die Ausführung der Integration liefert

$$(17)\qquad L = \pi \mu l r^4 = \frac{Mr^2}{2}.$$

Für eine durch den Schwerpunkt gehende, zur Cylinderachse senkrechte Achse (die x-Achse), haben wir das Trägheitsmoment

$$R = \mu \int \int \int_{-l}^{+l} (y^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz,$$

worin die Grenzen für die Integration nach x und y durch die Gleichung

$$x^2 + y^2 = r^2$$

gegeben sind. Wir haben

$$R = 2\mu l \int \int \left(y^2 + \frac{l^2}{3}\right) dx \, dy$$

oder

$$R = 2\mu l \int_0^r \int_0^{2\pi} \varrho \left(\varrho^2 \sin^2 \vartheta + \frac{l^2}{3}\right) d\varrho \, d\vartheta$$

oder

$$R = 4\pi \mu l \int_0^r \left(\frac{\varrho^3}{2} + \frac{\varrho l^2}{3}\right) d\varrho$$

oder schliefslich

$$(18)\qquad R = 2\pi \mu l r^2 \left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right) = M\left(\frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3}\right).$$

Die Trägheitsmomente eines Hohlcylinders können als die Differenz derjenigen zweier Vollcylinder dargestellt werden.

8. Als Trägheitsmoment einer homogenen Kugel mit dem Radius r für einen beliebigen Durchmesser als Achse, der als x-Achse angenommen wird, finden wir

$$D = \mu \int_{-r}^{+r} \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} \int_{0}^{2\pi} \varrho^3 dx\, d\varrho\, d\vartheta = 2\pi\mu \int_{-r}^{+r} \int_{0}^{\sqrt{r^2-x^2}} \varrho^3 dx\, d\varrho$$

$$= \frac{\pi\mu}{2} \int_{-r}^{+r} (r^2 - x^2)^2\, dx = \frac{\pi\mu}{2} \left[r^4 x - \frac{2 r^2 x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-r}^{+r}$$

oder

$$D = \frac{8\pi\mu r^5}{15} = \frac{2 M r^2}{5}. \tag{19}$$

9. Der Schwerpunkt des homogenen Ellipsoids mit der Oberflächengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{20}$$

ist der Mittelpunkt, die Hauptträgheitsachsen für denselben sind die Hauptachsen des Ellipsoids. Setzen wir

$$x = a\xi, \quad y = b\eta, \quad z = c\zeta, \tag{21}$$

so genügen ξ, η, ζ der Kugelgleichung

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \tag{21a}$$

Das Trägheitsmoment für die Achse $2a$ ist

$$A = \mu \int\int\int (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz,$$

wo die Integration der Gleichung (20) entsprechend auszudehnen ist Führen wir die Substitution (21a) aus, so wird

$$A = abc\mu \int\int\int (b^2\eta^2 + c^2\zeta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

wo jetzt die Integrationsgrenzen der Kugeloberfläche (21a) zu entsprechen haben. Da aber bei diesen Grenzen mit Hilfe von (19)

$$\int \eta^2\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \int \zeta^2\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{1}{2} \int (\eta^2 + \zeta^2)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta = \frac{4\pi}{15}$$

ist, so folgt

$$A = \frac{4\pi\mu abc\,(b^2 + c^2)}{15} = \frac{M\,(b^2 + c^2)}{5} \tag{22}$$

und ebenso für die beiden andern Achsen

$$B = \frac{M\,(c^2 + a^2)}{5}, \quad C = \frac{M\,(a^2 + b^2)}{5}. \tag{22a}$$

10. Der Schwerpunkt eines homogenen, geraden Kreiskegels mit dem Radius r und der Höhe h liegt auf seiner Achse in der Höhe $\frac{1}{4}h$

über der Grundfläche. Für die Achse des Kegels haben wir, falls die x-Achse in sie gelegt und die Spitze zum Nullpunkte genommen wird,

$$H = \mu \int_0^h \int_0^{\frac{rx}{h}} \int_0^{2\pi} \varrho^3 \, dx \, d\varrho \, d\vartheta = \frac{\pi \mu r^4}{2h^4} \int_0^h x^4 dx$$

oder

$$(23) \qquad H = \frac{\pi r^4 h \mu}{10} = \frac{3 M r^2}{10}.$$

Um auch das Trägheitsmoment R für eine durch den Schwerpunkt gehende, zur Kegelachse senkrechte Drehungsachse zu finden, betrachten wir zunächst das Trägheitsmoment R' einer hierzu parallelen, durch die Spitze gehenden Achse. Wir haben

$$R' = \mu \int_0^h \int_0^{\frac{rx}{h}} \int_0^{2\pi} x^2 \varrho \, dx \, d\varrho \, d\vartheta = \frac{\pi \mu r^2}{h^2} \int_0^h x^4 dx = \frac{\pi \mu r^2 h^3}{5} = \frac{3 M h^2}{5}$$

und nach (14)

$$R = R' - \frac{9h^2}{16} M$$

oder

$$(24) \qquad R = \frac{r^2 h^3 \pi \mu}{80} = \frac{3 M h^2}{80}.$$

11. Zwei feste Körper, welche gleiche Masse und für den Schwerpunkt gleiche Hauptträgheitsmomente besitzen, haben für alle entsprechenden Punkte und Richtungen gleiche Trägheitsmomente; sie heifsen äquivalente Systeme. Zu jedem beliebigen festen Körper läfst sich ein äquivalentes homogenes Ellipsoid konstruieren. Aus (22) und (22a) folgt nämlich für die Halbachsen eines solchen Ellipsoids

$$(25) \quad a^2 = \frac{5(B + C - A)}{2M}, \quad b^2 = \frac{5(C + A - B)}{2M}, \quad c^2 = \frac{5(A + B - C)}{2M}.$$

Da man M durch geeignete Wahl der Dichtigkeit für beliebige a, b, c jeden Wert geben kann, so lassen sich hiernach a, b, c zu gegebenen A, B, C bestimmen, falls nur die Summe je zweier Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt gröfser ist als das dritte. Dies ist aber in der That der Fall, wie aus (12) unmittelbar abzuleiten ist.

Nach Reye kann man zu jedem Körper ein äquivalentes System von vier Massenpunkten konstruieren. Weitere Bestimmungen von speziellen Hauptträgheitsmomenten, z. B. auch für ebene Figuren, sowie weitere allgemeine Sätze und Litteraturangaben findet man bei Schell a. a. O. B. 1, p. 100 ff.

§ 58.

Das physische Pendel, das Reversionspendel und die bifilare Aufhängung.

1. Die Untersuchungen der beiden letzten Paragraphen geben uns die Möglichkeit, die Bewegung eines starren Körpers um eine feste Achse, die wir der Einfachheit halber als wagrecht annehmen wollen, infolge der Schwerkraft zu ermitteln. Ein in dieser Weise befestigter Körper heifst ein physisches Pendel*).

Wir nehmen die positive x-Achse vertikal nach aufwärts gerichtet an, während die z-Achse die Drehungsachse bildet. Fällt der Schwerpunkt des starren Körpers in die Drehungsachse, so findet indifferentes Gleichgewicht statt; andernfalls befindet sich das System im stabilen Gleichgewichte, wenn der Schwerpunkt vertikal unter der Drehungsachse liegt. Wir beschreiben die Bewegung des Körpers dadurch, dafs wir den Winkel α angeben, welchen das vom Schwerpunkte auf die Drehungsachse gefällte Perpendikel zur Zeit t mit seiner vertikalen Gleichgewichtslage bildet**); für positive y sei α positiv.

Aus § 56, (12) folgt bei geeigneter Änderung der Bezeichnung, wenn r der Abstand eines Punktes von der Drehungsachse ist,

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}\sum mr^2 = \sum yX = -g\sum my. \tag{1}$$

Bezeichnen ξ, η, ζ die laufenden Koordinaten des Schwerpunktes, M die Gesamtmasse des Körpers, ϱ den Abstand des Schwerpunktes von der Drehungsachse, so wird

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g\eta M}{\Sigma mr^2} = -\frac{gM\varrho\sin\alpha}{\Sigma mr^2}. \tag{2}$$

Der Nenner der rechten Seite ist das Trägheitsmoment des Körpers, bezogen auf die Drehungsachse.

Vergleichen wir diese Gleichung mit der Gleichung (1) in § 17, die wegen $s = l\alpha$ auch in die Form

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\alpha \tag{3}$$

gesetzt werden kann, so erkennen wir, dafs beide für

$$l = \frac{\Sigma mr^2}{M\varrho} \tag{4}$$

identisch werden. Dies giebt den Satz:

Jedes physische Pendel stimmt in seinen Schwingungen

*) Im weiteren Sinne ist jeder schwere feste Körper, welcher in einem Punkte befestigt ist, als ein physisches Pendel zu bezeichnen.

**) Den erstgenannten Fall, wo der Schwerpunkt in die Drehungsachse fällt, brauchen wir hier nicht zu untersuchen.

vollkommen überein mit einem in einer Ebene schwingenden Fadenpendel, dessen Länge durch (4) bestimmt ist.

2. Besteht das physische Pendel aus Teilen, deren Hauptträgheitsmomente für ihre Schwerpunkte sich finden lassen, so hat es keine Schwierigkeit, die Länge des korrespondierenden Fadenpendels zu berechnen. So kann man z. B. die Rechnung durchführen für den Fall, dafs das Pendel aus einem homogenen cylindrischen oder parallelepipedischen Stabe und einer Kugel zusammengesetzt ist u. dgl. m. Wir behandeln den einfachen Fall eines homogenen Stabes von der Gestalt eines Parallelepipedons, dessen Kanten $2a$, $2b$, $2c$ betragen, und dessen Drehungsachse der Kante $2c$ parallel in der Mitte der Breite $2b$ und im Abstande ϱ vom Schwerpunkte den Körper durchdringt. Nach § 57, (14) und (16) ist hier bei der Dichte μ

$$\sum mr^2 = \frac{M(a^2 + b^2)}{3} + M\varrho^2, \tag{5}$$

woraus

$$l = \frac{a^2 + b^2 + 3\varrho^2}{3\varrho} \tag{6}$$

folgt.

Ist b sehr klein gegen a, so kann

$$l = \frac{a^2 + 3\varrho^2}{3\varrho} = \frac{a^2}{3\varrho} + \varrho \tag{7}$$

gesetzt werden. Liegt die Drehungsachse am Ende des im Vergleich zu seiner Länge $2a$ sehr schmalen stabförmigen Pendels, so ist

$$l = \frac{a^2}{3a} + a = \frac{4a}{3} = \frac{2\,.\,2a}{3}. \tag{8}$$

Die Schwingungsdauer eines homogenen stabförmigen Pendels von geringer, aber gleichförmiger Dicke ist also derjenigen eines Fadenpendels von $\frac{2}{3}$ seiner Länge gleich.

3. Besteht das physische Pendel aus einer homogenen, schweren Kugel vom Radius r, welche an einem massenlosen Faden von der Länge ϱ (bis zum Mittelpunkte der Kugel gemessen) aufgehängt ist, so haben wir nach § 57, (14) und (19)

$$l = \frac{\frac{2Mr^2}{5} + M\varrho^2}{M\varrho}$$

oder

$$l = \varrho + \frac{2}{5}\,\frac{r^2}{\varrho}. \tag{8a}$$

Die Länge des korrespondierenden einfachen Pendels ist also gröfser als ϱ, jedoch bei $r < \varrho$ kleiner als $\varrho + \frac{2}{5}r$.

4. Wenn derselbe starre Körper unter Einflufs der Schwere um zwei verschiedene Drehungsachsen 1 und 2 schwingt, welche einander parallel sein mögen, so wird die Schwingungsdauer in beiden Fällen im

allgemeinen eine verschiedene sein. Wir suchen die Bedingung, wann beide Schwingungsdauern oder, was auf dasselbe hinausläuft, die Längen l_1 und l_2 der beiden korrespondierenden Fadenpendel gleich werden.

Sind r_1 und r_2 die senkrechten Abstände der Achsen 1 und 2 vom Schwerpunkte, ist A das Trägheitsmoment des Körpers mit der Masse M für eine Achse, welche parallel zu 1 und 2 durch den Schwerpunkt geht, so haben wir nach (4) und Früherem

$$l_1 = \frac{A + r_1^2 M}{M r_1}, \quad l_2 = \frac{A + r_2^2 M}{M r_2}. \tag{9}$$

Die Gleichsetzung beider Gröfsen giebt die Bedingung

$$A\,(r_1 - r_2) = M r_1 r_2\,(r_1 - r_2). \tag{10}$$

Aufser der selbstsverständlichen Lösung $r_1 = r_2$ liefert (10) die Bedingung

$$A = M r_1 r_2. \tag{11}$$

Setzt man diesen Wert für A in (9) ein, so erhält man

$$l_1 = l_2 = r_1 + r_2. \tag{12}$$

Gelingt es also, ein physisches Pendel so herzurichten, dafs es für zwei parallele Schwingungsachsen gleiche Schwingungsdauer erhält, so ist die Summe der Abstände des Schwerpunktes von den beiden Drehungsachsen die Länge des korrespondierenden Fadenpendels (für beide Achsen), falls nicht der Schwerpunkt von beiden Achsen gleichweit entfernt ist.

Liegt insbesondere der Schwerpunkt in der Ebene der beiden Drehungsachsen (zwischen diesen), so ist der Abstand der letzteren der Länge des korrespondierenden Fadenpendels gleich.

Dieser Satz bildet die Theorie des bekannten Bohnenberger'schen Reversionspendels.

An einem Stabe sind zwei parallele Schneiden, von denen die eine verschiebbar ist, angebracht; zwischen beiden befindet sich eine schwere Metalllinse, deren Schwerpunkt in die Ebene der Schneiden fällt. Gelingt es nun, die eine Schneide so zurechtzuschieben, dafs für beide Schneiden die Schwingungsdauer die gleiche wird, ohne dafs der Schwerpunkt in ihre Mitte rückt, so giebt der Abstand der Schneiden die Länge des korrespondierenden Fadenpendels an.

In etwas modifizierter Anwendung, auf die wir hier nicht eingehen, bildet das Reversionspendel das genaueste Hilfsmittel, um die Intensität der Schwerkraft für einen Ort zu bestimmen.

5. Nahe verwandt mit der Pendelbewegung sind die Schwingungen, welche ein bifilar aufgehängter Körper infolge der Schwerkraft ausführt. Zwei unausdehnbare, massenlose und, wenn man will, als starr anzusehende Fäden von der gleichen Länge l seien mit ihren oberen Endpunkten in gleicher Höhe in einer Entfernung $2d$ voneinander befestigt. Die unteren Endpunkte seien an zwei Punkten eines starren Systems

befestigt, welche ebenfalls den Abstand $2d$ haben. In der Gleichgewichtslage werden dann die Fäden — allgemein freilich nur, wenn sie als starr angenommen werden — vertikal und also parallel zueinander sein. Wird das System aus seinem Gleichgewichte gebracht, so gelangen die unteren Endpunkte in eine höhere Lage, so dafs die Schwere sie in die Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt. Die Verbindungslinie der beiden unteren Endpunkte der Fäden wird dann um ihren Mittelpunkt Oszillationen ausführen; von den sonstigen Bewegungen des schweren Körpers soll abgesehen werden. Es ist einleuchtend, dafs die Änderungen in der Höhenlage der immer horizontalen Verbindungslinie gegen die Horizontalbewegung sehr klein sind, wenn, wie in der Folge angenommen werden soll, d gegen l sehr klein ist. Es wird genügen, das Moment der horizontal und senkrecht gegen die Verbindungslinie gerichteten Kraftkomponenten, sowie das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Gerade als Achse, welche vertikal in der Mitte der beiden Fäden läuft, zu bestimmen.

Fig. 11.

C D A B A_1 B_1 α α

Ist (Fig. 11) AB jene Verbindungslinie der Befestigungspunkte des Körpers in der Gleichgewichtslage, $A_1 B_1$ in einer um den Winkel α gegen AB geneigten Lage, so ist unter Vernachlässigung von Gröfsen höheren Kleinheitsgrades als d

$$BB_1 = AA_1 = 2d \sin\frac{\alpha}{2}\cdot$$

Sind C und D die Aufhängungspunkte der beiden Fäden und setzt man

$$\sphericalangle\, ACA_1 = BDB_1 = \varphi,$$

so hat man, da φ sehr klein ist,

$$AA_1 = BB_1 = l \sin\varphi,$$

also

$$(13)\qquad \sin\varphi = \frac{2d\sin\frac{\alpha}{2}}{l}\cdot$$

Die Schwere sucht die Punkte A_1 und B_1 nach A und B hin zu bewegen und zwar mit einer Kraft, welche aus der Theorie der Kreispendelbewegung hervorgeht; beide Fäden spielen nämlich in gewisser Hinsicht die Rolle des Pendelfadens. Aus § 17, (1) ist ersichtlich, dafs die Kraft, welche die Endpunkte beider Fäden mit dem Teile der Körpermasse M, der auf jeden entfällt, erfahren, zusammen

$$(14)\qquad -gM\sin\varphi = -\frac{2gMd\sin\frac{\alpha}{2}}{l}\cdot$$

beträgt. Wollen wir das Drehungsmoment bilden, so müssen wir diese Kraft auf die Normale zu $A_1 B_1$, die mit $A A_1$ und $B B_1$ den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ einschliefst, projizieren. Da der Hebelarm d ist, so erhalten wir für das Drehungsmoment

$$(15)\qquad -\frac{2 g M d^2 \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{l} = -\frac{g M d^2 \sin\alpha}{l}.$$

Bezeichnen wir das Trägheitsmoment des schweren Körpers in Bezug auf die Drehungsachse des Systems mit A, so erhalten wir nach § 56, (12)

$$(16)\qquad \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g M d^2 \sin\alpha}{l A}.$$

Dies ist aber wieder die Bewegungsgleichung eines Fadenpendels mit der Länge

$$(17)\qquad L = \frac{l A}{M d^2}.$$

Die bifilare Aufhängung ist deshalb von grofser Wichtigkeit, weil sie durch Beobachtung der Schwingungsdauer das Trägheitsmoment des aufgehängten Körpers für die Drehungsachse bestimmen läfst. Die Zusammenstellung dieser Beobachtung mit entsprechenden an Körpern, deren Trägheitsmoment bereits bekannt ist, giebt die Möglichkeit, sich von den Gröfsen g, d, l frei zu machen. Bei Beobachtungen über Magnete namentlich spielt die bifilare Aufhängung eine grofse Rolle.

§ 59.

Fortsetzung der Theorie der Bewegungsgleichungen eines starren Systems: die Euler'schen Gleichungen.

1. Wir führten in § 56 die sechs Bewegungsgleichungen des starren Systems auf drei Gleichungen, welche die Bewegungen des Schwerpunktes bestimmen, und die drei weiteren

$$(1)\qquad \begin{cases} \sum m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = \sum(yZ - zY), \\ \sum m\left(z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2}\right) = \sum(zX - xZ), \\ \sum m\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) = \sum(xY - yX) \end{cases}$$

zurück. Die letzteren bedürfen noch der Umformung, weil ihre linken Seiten die Koordinaten sämtlicher Punkte des Systems enthalten, während schon die Angabe der jeweiligen Lage dreier solcher genügt, um die Bewegung des Systems eindeutig zu beschreiben. Am elegantesten finden wir die Bestimmungsstücke der Bewegung des starren Systems, wenn wir auf die Resultate des § 52 zurückgreifen. Durch die Gleichungen

(1) oder (2) jenes Paragraphen setzen wir die Beziehungen zwischen unserem bisherigen, im Raume festen Koordinatensysteme der x, y, z und einem im Körper gelegenen ξ, η, ζ fest. Dabei möge der Schwerpunkt des Körpers der Nullpunkt des neuen Koordinatensystems sein, während die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes zusammenfallen.

2. Zunächst überzeugen wir uns davon, daſs die Gleichungen (1) ungeändert bleiben, wenn wir den Schwerpunkt festlegen und in ihn auch den Nullpunkt des Systems x, y, z versetzen. Sind nämlich im ursprünglichen Systeme (x, y, z) a, b, c die veränderlichen Koordinaten des Schwerpunktes und ist

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z', \tag{2}$$

so wird durch Einsetzen der Ausdrücke (2) in die erste Gleichung (1)

$$\left\{\begin{aligned} &\sum m\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2} - z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right) + b\sum m\frac{d^2z'}{dt^2} - c\sum m\frac{d^2y'}{dt^2} \\ &\qquad + \frac{d^2c}{dt^2}\sum my' - \frac{d^2b}{dt^2}\sum mz' + \left(b\frac{d^2c}{dt^2} - c\frac{d^2b}{dt^2}\right)\sum m \\ &\qquad = \sum(y'Z - z'Y) + b\sum Z - c\sum Y. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Da aber nach § 56, (3), sowie nach den Gleichungen, welche den Schwerpunkt definieren,

$$\sum my' = \sum mz' = 0,$$

$$\frac{d^2b}{dt^2}\sum m = \sum Y, \quad \frac{d^2c}{dt^2}\sum m = \sum Z,$$

also auch

$$\sum m\frac{d^2y'}{dt^2} = \sum m\frac{d^2z'}{dt^2} = 0$$

ist, so folgt aus (3)

$$\sum m\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2} - z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right) = \sum(y'Z - z'Y), \tag{4}$$

und analoge Resultate findet man für die beiden Gleichungen (1). Wir können daher die Gleichungen (1), indem wir jetzt die gestrichenen Buchstaben durch die ungestrichenen ersetzen, auch für den festgelegten Schwerpunkt als Nullpunkt anwenden; es kommt demnach für uns nur noch die Drehung des Körpers um den Schwerpunkt in Betracht.

3. Die linke Seite der ersten Gleichung (1), die wir wegen der Analogie dieser drei Gleichungen allein weiter zu behandeln brauchen, ist der nach dt genommene Differentialquotient des Ausdrucks

$$\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right), \tag{5}$$

in den wir die Werte einsetzen, welche sich aus § 52, (1) und (7) ergeben. Dabei ist zu bemerken, daſs die dort angewandten Variationen,

welche **mögliche** Verrückungen bezeichneten, hier ohne weiteres durch die entsprechenden Differentiale, also die **wirklichen** Verrückungen ersetzt werden dürfen; aufserdem ist hier

$$a = b = c = 0$$

zu nehmen. Hiernach erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum m \left(y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt}\right) \\
&= \sum m \Big[\left(\beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta\right)\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\xi + \frac{d\gamma_2}{dt}\eta + \frac{d\gamma_3}{dt}\zeta\right) \\
&\qquad - \left(\gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta\right)\left(\frac{d\beta_1}{dt}\xi + \frac{d\beta_2}{dt}\eta + \frac{d\beta_3}{dt}\zeta\right)\Big] \\
&= \left(\beta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d\beta_1}{dt}\right)\sum m\xi^2 + \left(\beta_2 \frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_2 \frac{d\beta_2}{dt}\right)\sum m\eta^2 \\
&+ \left(\beta_3 \frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_3 \frac{d\beta_3}{dt}\right)\sum m\zeta^2 + \left(\beta_2 \frac{d\gamma_3}{dt} + \beta_3 \frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_2 \frac{d\beta_3}{dt} - \gamma_3 \frac{d\beta_2}{dt}\right)\sum m\eta\zeta + \cdots
\end{aligned}$$

Nach § 57, 3 werden bei dem gewählten Koordinatensysteme, dessen Achsen die Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes sind,

$$\sum m\eta\zeta = \sum m\zeta\xi = \sum m\xi\eta = 0, \tag{6}$$

so dafs die vorstehende Gleichung in die einfachere

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) = \left(\beta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d\beta_1}{dt}\right)\sum m\xi^2 \\
&\quad + \left(\beta_2 \frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_2 \frac{d\beta_2}{dt}\right)\sum m\eta^2 + \left(\beta_3 \frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_3 \frac{d\beta_3}{dt}\right)\sum m\zeta^2
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

übergeht.

Mit dieser Formel nehmen wir eine Umformung vor, die sich aus den Formeln von § 52 ergiebt. Nach (23) und (25) dieses Paragraphen ist

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta'}{dt} &= -\alpha_3 \frac{d\alpha_1}{dt} - \beta_3 \frac{d\beta_1}{dt} - \gamma_3 \frac{d\gamma_1}{dt}, \\
\frac{d\gamma'}{dt} &= \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{dt},
\end{aligned}$$

also

$$\alpha_2 \frac{d\beta'}{dt} + \alpha_3 \frac{d\gamma'}{dt} = (\gamma_2\alpha_3 - \gamma_3\alpha_2)\frac{d\gamma_1}{dt} - (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\frac{d\beta_1}{dt}$$

oder nach § 52, (6)

$$\beta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d\beta_1}{dt} = \alpha_2 \frac{d\beta'}{dt} + \alpha_3 \frac{d\gamma'}{dt}, \tag{8}$$

wozu die analogen Formeln hinzugefügt werden können. Führen wir noch die gebräuchliche Bezeichnung

$$\frac{d\alpha'}{dt} = p, \quad \frac{d\beta'}{dt} = q, \quad \frac{d\gamma'}{dt} = r \tag{8a}$$

ein, so dafs

$$(9)\quad\begin{cases} p = \alpha_3 \dfrac{d\alpha_2}{dt} + \beta_3 \dfrac{d\beta_2}{dt} + \gamma_3 \dfrac{d\gamma_2}{dt} = -\alpha_2 \dfrac{d\alpha_3}{dt} - \beta_2 \dfrac{d\beta_3}{dt} - \gamma_2 \dfrac{d\gamma_3}{dt}, \\ q = \alpha_1 \dfrac{d\alpha_3}{dt} + \beta_1 \dfrac{d\beta_3}{dt} + \gamma_1 \dfrac{d\gamma_3}{dt} = -\alpha_3 \dfrac{d\alpha_1}{dt} - \beta_3 \dfrac{d\beta_1}{dt} - \gamma_3 \dfrac{d\gamma_1}{dt}, \\ r = \alpha_2 \dfrac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \dfrac{d\beta_1}{dt} + \gamma_2 \dfrac{d\gamma_1}{dt} = -\alpha_1 \dfrac{d\alpha_2}{dt} - \beta_1 \dfrac{d\beta_2}{dt} - \gamma_1 \dfrac{d\gamma_2}{dt} \end{cases}$$

wird, so erhalten wir an Stelle von (7) die Gleichung

$$(10)\quad\begin{cases} \sum m \left(y \dfrac{dz}{dt} - z \dfrac{dy}{dt}\right) = (\alpha_2 q + \alpha_3 r) \sum m \xi^2 \\ \qquad + (\alpha_3 r + \alpha_1 p) \sum m \eta^2 + (\alpha_1 p + \alpha_2 q) \sum m \zeta^2 \end{cases}$$

und zwei analoge Gleichungen.

Auf der rechten Seite führen wir die Hauptträgheitsmomente des Körpers ein, welche durch

$$(11)\quad\begin{cases} A = \sum m (\eta^2 + \zeta^2), \\ B = \sum m (\zeta^2 + \xi^2), \\ C = \sum m (\xi^2 + \eta^2) \end{cases}$$

definiert sind. Hierdurch wird aus (10) und den beiden analogen Gleichungen

$$(12)\quad\begin{cases} \sum m \left(y \dfrac{dz}{dt} - z \dfrac{dy}{dt}\right) = A\alpha_1 p + B\alpha_2 q + C\alpha_3 r, \\ \sum m \left(z \dfrac{dx}{dt} - x \dfrac{dz}{dt}\right) = A\beta_1 p + B\beta_2 q + C\beta_3 r, \\ \sum m \left(x \dfrac{dy}{dt} - y \dfrac{dx}{dt}\right) = A\gamma_1 p + B\gamma_2 q + C\gamma_3 r. \end{cases}$$

Durch Differentiation dieser Ausdrücke nach t erhalten wir die linken Seiten der Gleichungen (1); es ist also

$$(13)\quad\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(A\alpha_1 p + B\alpha_2 q + C\alpha_3 r) = \sum (yZ - zY), \\ \dfrac{d}{dt}(A\beta_1 p + B\beta_2 q + C\beta_3 r) = \sum (zX - xZ), \\ \dfrac{d}{dt}(A\gamma_1 p + B\gamma_2 q + C\gamma_3 r) = \sum (xY - yX). \end{cases}$$

An Stelle der rechts stehenden Drehungsmomente, welche sich auf die festen Achsen der x, y, z beziehen, können wir die auf die jeweilige Lage der Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes bezogenen, M_ξ, M_η, M_ζ, mittels der Gleichungen § 56, (8) einführen. Wir multiplizieren daher die Gleichungen (13) der Reihe nach mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und addieren jedesmal, wobei wir gleichzeitig links die Differentiation ausführen. Bei Benutzung öfters angewandter Relationen ergiebt sich

$$(14)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)\,qr = M_\xi, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)\,rp = M_\eta, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)\,pq = M_\zeta. \end{cases}$$

Dies sind die Euler'schen Gleichungen der Bewegung eines festen Körpers.

4. Für ein starres System mufs das Prinzip der lebendigen Kraft Gültigkeit haben, falls die wirkenden Kräfte ein Potential besitzen; dasselbe mufs bestehen bleiben, wenn der Schwerpunkt als fest angenommen wird, wie aus den Untersuchungen von § 24 hervorgeht. Die lebendige Kraft finden wir unter dieser Voraussetzung aus § 52, (26), worin $\delta a' = \delta b' = \delta c' = 0$ zu setzen ist, während, wenn die Hauptträgheitsachsen des Schwerpunktes wieder die Achsen des Systems ξ, η, ζ sind,

$$\sum m\eta\zeta = \sum m\zeta\xi = \sum m\xi\eta = 0$$

wird. Da die lebendige Kraft gleich

$$\frac{1}{2}\sum m\left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]$$

ist, so folgt die Gleichung

$$2T = p^2\sum m(\eta^2 + \zeta^2) + q^2\sum m(\zeta^2 + \xi^2) + r^2\sum m(\xi^2 + \eta^2) = \text{Const.}$$

oder

$$(15)\qquad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{Const.}$$

Die Flächensätze treten nur in speziellen Fällen in Geltung.

Alle Untersuchungen dieses Paragraphen bleiben in Gültigkeit, wenn ein beliebiger Punkt des Systems festgehalten wird. Man mufs dann nur die Hauptträgheitsachsen für diesen Punkt zur ξ, η, ζ-Achse und statt A, B, C die Hauptträgheitsmomente für denselben nehmen.

§ 60.

Freie Bewegung eines starren Systems ohne Einwirkung von Kräften.

1. Für den Fall, dafs auf ein starres System keinerlei Kräfte einwirken, lassen sich die Bewegungsgleichungen leicht integrieren. Die Bewegung des Schwerpunktes kann nur eine geradlinige mit gleichförmiger Geschwindigkeit sein. Wir können uns wieder den Schwerpunkt festgelegt denken und brauchen nur die noch übrigbleibende Bewegung zu untersuchen. Würde irgend ein anderer Punkt des Systems befestigt werden, so würde entsprechend der letzten Bemerkung des vorigen Paragraphen die Bewegung ganz analog ausfallen. Die sich ergebende Bewegung ist,

wie gleich im voraus bemerkt werden möge, nur in speziellen Fällen eine einfache Rotation um eine gleichbleibende Achse; im allgemeinen ist sie komplizierter*). Wir werden ihre Gleichungen rein analytisch ableiten, um sie dann geometrisch zu interpretieren.

Es ist wieder zu betonen, dafs die Gestalt des Körpers und die Massenverteilung in ihm nicht weiter bekannt zu sein braucht, als dafs man Richtung und Gröfse der drei Hauptträgheitsachsen für den Schwerpunkt, resp. für den festen Punkt, kennt.

2. Die Gleichungen (14) in § 59 werden hier zu

$$(1)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)\,qr = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)\,rp = 0, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)\,pq = 0. \end{cases}$$

Multipliziert man die Gleichungen (1) das eine Mal mit p, q, r, das andere Mal mit Ap, Bq, Cr und addiert jedesmal, so erhält man zwei Gleichungen, welche durch Integration

$$(2)\qquad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = c,$$

$$(3)\qquad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = c_1$$

liefern, in welchen c und c_1 willkürliche positive Konstanten sind; die erste dieser Gleichungen enthält das Prinzip der lebendigen Kraft (§ 59, (15)). Mittels (2) und (3) kann man z. B. p und r durch q ausdrücken, worauf die erste Gleichung von (1) durch eine Quadratur q liefert.

Aus den Gleichungen (13) von § 59, deren rechte Seiten Null werden, folgt dann weiter durch Integration

$$(4)\qquad \begin{cases} A\alpha_1 p + B\alpha_2 q + C\alpha_3 r = A_1, \\ A\beta_1 p + B\beta_2 q + C\beta_3 r = B_1, \\ A\gamma_1 p + B\gamma_2 q + C\gamma_3 r = C_1, \end{cases}$$

worin A_1, B_1, C_1 Konstanten bedeuten. Diese Gleichungen sind, wie aus § 59, (12) ersichtlich ist, die drei Flächensätze für das starre System.

Die Konstanten A_1, B_1, C_1 sind von c_1 nicht unabhängig. Quadriert und addiert man nämlich die Gleichungen (4), so folgt nach bekannten Relationen

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2$$

oder nach (3)

$$(5)\qquad c_1 = A_1^2 + B_1^2 + C_1^2.$$

*) Die interessanten Bewegungsvorgänge, welche hier zur Behandlung gelangen, können leicht an jedem in die Höhe geworfenen festen Körper beobachtet werden; die Schwere modifiziert, wie wir im nächsten Paragraphen sehen werden, die auf den Schwerpunkt bezogene relative Bewegung nicht.

3. Die wirkliche analytische Lösung der Aufgabe nimmt folgenden Verlauf. Aus (2) und (3) berechnen wir

$$(6)\qquad \begin{cases} p^2 = \dfrac{c_1 - cC - B(B-C)q^2}{A(A-C)}, \\ r^2 = \dfrac{c_1 - cA - B(B-A)q^2}{C(C-A)}, \end{cases}$$

wodurch aus der zweiten Gleichung (1)

$$(7)\qquad dt = \frac{B\sqrt{AC}\,dq}{\sqrt{-[c_1 - cC - B(B-C)q^2]\,[c_1 - cA - B(B-A)q^2]}}$$

hervorgeht, ein elliptisches Differential erster Gattung, welches leicht auf die Normalform zu reduzieren ist.

Wir gehen jetzt von der Voraussetzung aus, dafs

$$(8)\qquad A > B > C$$

ist. Damit die rechten Seiten von (6) zu positiven Gröfsen werden, mufs

$$(9)\qquad c_1 - cC > 0, \quad c_1 - cA < 0$$

sein. Dagegen kann

$$c_1 - cB$$

positiv, Null oder negativ sein; es sei zunächst

$$(9\text{a})\qquad c_1 - cB < 0.$$

Setzen wir

$$(10)\qquad \begin{cases} q = \sqrt{\dfrac{c_1 - cC}{B(B-C)}}\, q', \\ \varkappa^2 = \dfrac{(c_1 - cC)(A-B)}{(cA - c_1)(B-C)}, \qquad \lambda = \sqrt{\dfrac{(cA - c_1)(B-C)}{ABC}}, \end{cases}$$

so geht (7) in

$$(11)\qquad dt = \frac{1}{\lambda}\,\frac{dq'}{\sqrt{(1-q'^2)(1-\varkappa^2 q'^2)}}$$

über, woraus

$$(12)\qquad q = \sqrt{\frac{c_1 - cC}{B(B-C)}}\ \sin\operatorname{am}(\varkappa^2, \lambda(t - t_0))$$

folgt.

Die Gröfsen $\varkappa^2$, λ u. s. w. sind durchaus reell; damit jedoch sin am für reelle t einen reellen Wert liefert, mufs

$$\varkappa^2 < 1$$

sein. Dies ist aber infolge von (9a) thatsächlich der Fall. Aus

$$\frac{(c_1 - cC)(A-B)}{(cA - c_1)(B-C)} < 1$$

oder

$$(c_1 - cC)(A-B) < (cA - c_1)(B-C)$$

wird nämlich durch Vereinfachung

$$c_1 (A - C) < cB (A - C)$$

oder

$$c_1 - cB < 0.$$

Aus (6) berechnen wir weiter*)

$$(13) \quad \begin{cases} p = \sqrt{\dfrac{c_1 - cC}{A(A - C)}} \cos \operatorname{am} (\varkappa^2, \lambda (t - t_0)), \\ r = \sqrt{\dfrac{cA - c_1}{C(A - C)}} \varDelta \operatorname{am} (\varkappa^2, \lambda (t - t_0)). \end{cases}$$

Die Vorzeichen der in (12) und (13) auftretenden Wurzelgröſsen sind bestimmt, wenn p, q, r für einen Moment bekannt sind.

Ist

$$(13a) \quad c_1 - cB > 0,$$

so wird

$$\varkappa^2 > 1;$$

die Substitution

$$q' = \frac{q''}{\varkappa}$$

verwandelt dann (11) in ein Differential, in welchem der Modul $\frac{1}{\varkappa}$ auftritt. Die sich ergebenden Formeln sind (12) und (13) ganz analog, weshalb wir darauf verzichten sie hinzuschreiben.

In dem Spezialfalle

$$(13b) \quad c_1 - cB = 0$$

wird

$$\varkappa^2 = 1,$$

wodurch das elliptische Differential (11) in ein logarithmisches übergeht, dessen Ausführung wir weiter unten geben.

4. Zur Bestimmung der Gröſsen α_1 u. s. w. oder der Winkel ϑ, φ, ψ, welche nach § 52, 7 die Lage des starren Systems fixieren, benutzen wir die Gleichungen (4), welche wir durch geeignete Lage des x, y, z-Koordinatensystems vereinfachen. Da die Gleichungen (4) die Flächensätze sind, so muſs nach §§ 24 und 10, 7 eine unveränderliche Ebene existieren, deren Normale mit der x, y, z-Achse Winkel mit den Kosinus

$$\frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \quad \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}, \quad \frac{C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}$$

bildet. Nimmt man diese Normale zur z-Achse, so wird

$$A_1 = B_1 = 0,$$

so daſs die Gleichungen (4) in

---

*) Es ist bekanntlich

$$\cos \operatorname{am} x = \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} x},$$

$$\varDelta \operatorname{am} x = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x}.$$

$$(15)\qquad \begin{cases} Ap\alpha_1 + Bq\alpha_2 + Cr\alpha_3 = 0, \\ Ap\beta_1 + Bq\beta_2 + Cr\beta_3 = 0, \\ Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 = C_1 \end{cases}$$

übergehen, während aus (5)

$$(15\text{a})\qquad c_1 = C_1^2$$

folgt.

Multipliziert man die Gleichungen (15) der Reihe nach mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und addiert sie, so findet man

$$(16)\qquad \gamma_1 = \frac{Ap}{C_1}, \quad \gamma_2 = \frac{Bq}{C_1}, \quad \gamma_3 = \frac{Cr}{C_1}.$$

Nach § 52, (27) hat man dann zur Bestimmung von ϑ

$$(17)\qquad \gamma_3 = \cos\vartheta,$$

zur Bestimmung von ψ

$$\gamma_1 = \cos\psi\sin\vartheta, \quad \gamma_2 = \sin\psi\sin\vartheta,$$

also

$$(18)\qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{Bq}{Ap}.$$

Um φ zu ermitteln, reichen die Gleichungen (15), wie der Versuch zeigt, allein nicht aus. Es ist aber

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\beta_3}{\alpha_3}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\beta_3}{\alpha_3},$$

also

$$d\varphi = \frac{\alpha_3\,d\beta_3 - \beta_3\,d\alpha_3}{\alpha_3^2 + \beta_3^2}$$

oder wegen § 59, (8) und (8a)

$$(18\text{a})\qquad d\varphi = \frac{\gamma_1 p + \gamma_2 q}{\alpha_3^2 + \beta_3^2}\,dt = \frac{\gamma_1 p + \gamma_2 q}{1 - \gamma_3^2}\,dt = \frac{\gamma_1 p + \gamma_2 q}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\,dt.$$

Mittels (16) und weiter (2) und (3) wird hieraus

$$(18\text{b})\qquad d\varphi = C_1\frac{Ap^2 + Bq^2}{A^2p^2 + B^2q^2}\,dt = C_1\frac{c - Cr^2}{c_1 - C^2r^2}\,dt$$

und nach Einfügen des Wertes (13) für r

$$(19)\qquad d\varphi = C_1\frac{c\,(A - C) - (cA - c_1)\,\Delta^2\operatorname{am}(\varkappa^2, \lambda\,(t - t_0))}{c_1\,(A - C) - C\,(cA - c_1)\,\Delta^2\operatorname{am}(\varkappa^2, \lambda\,(t - t_0))}\,dt,$$

ein elliptisches Differential dritter Gattung, auf dessen Umwandlung wir nicht einzugehen brauchen.

Das gesamte Problem ist also mit Hilfe von elliptischen Funktionen lösbar; die auftretenden elliptischen Integrale sind erster und dritter Gattung.

5. Um ein klares Bild von der Bewegung des Körpers zu erlangen, müssen wir die Bedeutung der vorkommenden Größen ins Auge fassen. Den Körper selbst denken wir uns durch sein Zentralträgheitsellipsoid repräsentiert; p, q, r sind die Komponenten der Drehung, bezogen auf

die — selbst im Raume beweglichen — Hauptachsen dieses Ellipsoids. Die Momentandrehungsachse bildet daher mit diesen Hauptachsen Winkel, deren Kosinus

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \tag{20}$$

sind, während die Drehungsgeschwindigkeit um diese Achse

$$\omega = \sqrt{p^2+q^2+r^2} \tag{21}$$

beträgt. Die Lage dieser Achse einerseits zu den Hauptträgheitsachsen, andrerseits zur unveränderlichen Ebene, die wir wieder als xy-Ebene benutzen, kann zur Charakterisierung der Bewegung dienen.

Wir wollen zunächst den bisher nicht beachteten Spezialfall erledigen, dafs

$$A = B = C$$

ist, wie dies nach § 57 z. B. bei einer Kugel, deren Dichtigkeit in homozentrischen Schichten die gleiche ist, und bei homogenen regulären Körpern zutrifft. Aus (1) wird dann

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0,$$

d. h. p, q, r sind Konstanten. Daher bleibt die Richtung der Momentandrehungsachse im Körper, sowie auch die Geschwindigkeit der Rotation um sie konstant. Aber auch im Raume behält diese Achse ihre Lage bei. Aus (20) folgt nämlich, dafs die Kosinus der Winkel λ, μ, ν, welche sie mit den Achsen der x, y, z bildet, durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{\alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \cos\mu &= \frac{\beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \\ \cos\nu &= \frac{\gamma_1 p + \gamma_2 q + \gamma_3 r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \end{aligned}\right. \tag{22}$$

dargestellt werden. Aus den beiden ersten Gleichungen (15) wird aber in unserem Falle

$$\alpha_1 p + \alpha_2 q + \alpha_3 r = 0,$$
$$\beta_1 p + \beta_2 q + \beta_3 r = 0,$$

also nach (22)

$$\cos\lambda \cos\mu = 0.$$

Die Drehungsachse steht also auf der unveränderlichen Ebene senkrecht.

Die Bewegung ist in diesem Falle eine Rotation um eine im Körper und im Raume feste Achse; die Rotationsgeschwindigkeit ist konstant.

6. Auch wenn nur zwei der Hauptträgheitsmomente gleich werden, ist der Verlauf der Bewegung leicht zu übersehen. Nehmen wir an, dafs

$$A = B, \quad C \gtrless A$$

ist, so wird aus (1)

$$(23) \quad \begin{cases} A \dfrac{dp}{dt} - (A - C)\, qr = 0, \\ A \dfrac{dq}{dt} + (A - C)\, pr = 0, \\ \dfrac{dr}{dt} = 0. \end{cases}$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt, dafs r **konstant**, und weiter aus (2) oder (3), dafs $p^2 + q^2$, also auch $p^2 + q^2 + r^2$ konstant ist. Hiernach wird die letzte der Gröfsen (20) konstant, d. h. **die momentane Drehungsachse bildet mit der ζ-Achse, der Achse des kleinsten oder gröfsten Trägheitsmomentes, einen gleichbleibenden Winkel.** Die Drehungsgeschwindigkeit ist nach (21) ebenfalls konstant.

Setzen wir

$$(24) \qquad p^2 + q^2 = \frac{c - Cr^2}{A} = \frac{c_1 - C^2 r^2}{A^2} = k^2,$$

so folgt aus der ersten Gleichung (23)

$$dt = \frac{A}{(A - C)\, r} \frac{dp}{\sqrt{k^2 - p^2}},$$

also

$$t = \frac{A}{(A - C)\, r} \arcsin \frac{p}{k} + t_0$$

oder

$$(25) \qquad p = k \sin \frac{(A - C)\, r\, (t - t_0)}{A}.$$

Hieraus folgt

$$(26) \qquad q = k \cos \frac{(A - C)\, r\, (t - t_0)}{A}.$$

Mittels der Gleichung (25) läfst sich darthun, dafs **die momentane Drehungsachse in dem festen Körper mit konstanter Geschwindigkeit einen Kreiskegel beschreibt.** Die Geschwindigkeit dieser Achse wird nämlich durch die Änderung des Winkels χ bestimmt, welchen die durch die Momentanachse und die Achse der ζ gelegte Ebene mit der ξ-Achse bildet. Bezeichnet für den Augenblick α den Winkel, welchen die Momentanachse mit der ξ-Achse, γ denjenigen, welchen sie mit der ζ-Achse bildet, so ist*)

$$\cos \chi = \frac{\cos \alpha}{\sin \gamma}$$

oder, da

---

*) Die ξ-Achse, die Momentanachse und ihre Projektion auf die $\xi\eta$-Ebene bilden eine rechtwinklige Ecke mit den Seiten χ, $90^\circ - \gamma$, α.

$$\cos\alpha = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

ist,

$$\cos\chi = \frac{p}{\sqrt{p^2+q^2}} = \sin\frac{(A-C)\,r\,(t-t_0)}{A} \tag{27}$$

oder

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \frac{(A-C)\,r\,(t-t_0)}{A}, \quad \frac{d\chi}{dt} = -\frac{(A-C)\,r}{A}. \tag{28}$$

Hieraus folgt, dafs sich χ der Zeit proportional ändert. Ob die Bewegung der Momentanachse im Körper in demselben Sinne oder in umgekehrtem Sinne vor sich geht wie die Drehung um die Hauptachse, hängt davon ab, ob $A < C$ oder $A > C$ ist.

Ein weit klareres Bild von dem Bewegungsvorgange erhalten wir, wenn wir die Bewegung der isolierten Hauptachse (der ζ-Achse) und die Drehung um sie ins Auge fassen. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur die hier sehr einfachen Ausdrücke für ϑ, ψ und φ aufzustellen. Aus (16) wird mittels (25) und (26)

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{kA}{C_1}\sin\dfrac{(A-C)\,r\,(t-t_0)}{A}, \\ \gamma_2 = \dfrac{kA}{C_1}\cos\dfrac{(A-C)\,r\,(t-t_0)}{A}, \\ \gamma_3 = \dfrac{Cr}{C_1}. \end{cases} \tag{29}$$

Aus (17), (18) und (18b) folgt weiter

$$\begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{Cr}{C_1}, \\ \psi = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{(A-C)\,r\,(t-t_0)}{A}, \quad \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{(A-C)\,r}{A} \end{cases} \tag{30}$$

und

$$\frac{d\varphi}{dt} = C_1\frac{A\,(p^2+q^2)}{A^2\,(p^2+q^2)} = \frac{C_1}{A}, \quad \varphi = \frac{C_1}{A}(t-t_1) \tag{31}$$

oder, wenn C_1 mittels der ersten Gleichung (30) eliminiert wird,

$$\varphi = \frac{Cr}{A\cos\vartheta}(t-t_1), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Cr}{A\cos\vartheta}. \tag{32}$$

Da die Rotationsgeschwindigkeit r in Bezug auf die Hauptachse nach dem Vorhergehenden konstant ist, so folgt aus der ersten Gleichung (30), dafs ϑ einen gleichfalls konstanten Wert besitzt, der wegen der willkürlichen Konstanten C_1 von r ganz unabhängig ist. Da wir die z-Achse senkrecht zur invariabeln Ebene annahmen, ϑ aber den Winkel zwischen der z- und ζ-Achse bezeichnet, so folgt, dafs die Hauptachse eine konstante, von der Geschwindigkeit der Rotation um sie unabhängige Neigung gegen die invariable Ebene besitzt. Die Hauptachse beschreibt also einen geraden Kreiskegel. Die Geschwindigkeit, mit welcher diese Kegelbewegung vor sich geht, wird durch die Gröfse $\frac{d\varphi}{dt}$ dargestellt. Dieselbe ist

konstant und hängt von der Rotationsgeschwindigkeit r, dem Winkel ϑ und dem Verhältnisse der beiden Hauptträgheitsmomente ab; ihr Sinn stimmt mit dem der Rotation r überein. Also:

Die Bewegung eines Körpers, der nur *eine* isolierte Hauptträgheitsachse (für den Schwerpunkt) besitzt und bei dem der Schwerpunkt festliegt, besteht in einer Rotation um die Hauptträgheitsachse mit gleichbleibender Geschwindigkeit, während gleichzeitig die Hauptträgheitsachse mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit einen geraden Kreiskegel beschreibt, dessen Achse auf der invariabeln Ebene senkrecht steht. Der Sinn dieser Drehung stimmt mit dem der Rotation um die Hauptträgheitsachse überein; ihre Geschwindigkeit ist durch die Neigung der Hauptträgheitsachse gegen die invariable Ebene, durch die Rotationsgeschwindigkeit um die Hauptträgheitsachse und das Verhältnis der beiden Hauptträgheitsmomente völlig bestimmt.

Dafs auch die Momentandrehungsachse bei gleichbleibender Neigung gegen die invariable Ebene mit gleichförmiger Geschwindigkeit eine Kegeldrehung ausführt, ist als selbstverständlich anzusehen; die rechnende Herleitung des Resultates bietet keine Schwierigkeit.

Soll die Bewegung eine einfache Rotation um eine festbleibende Achse sein, so mufs $\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = 0$ werden. Nach (23) erfordert dies die Bedingung

$$p = q = 0,$$

oder

$$r = 0.$$

Da $p^2 + q^2$ und r konstant sind, so folgt, dafs p und q einerseits, r andrerseits gleich Null bleiben, wenn sie es in einem Momente sind. Wir finden:

Eine Rotation des Körpers kann nur um eine der Hauptachsen (entweder die einzelne oder eine der unendlich vielen darauf senkrechten) stattfinden. Ist eine solche Rotation in einem Momente vorhanden, so besteht sie mit unveränderlicher Achse und unveränderlicher Geschwindigkeit weiter.

7. Sind die drei Hauptträgheitsachsen verschieden, so ist die Bewegung im allgemeinen eine verwickeltere. Soll eine einfache Rotation um eine festbleibende Achse mit gleichförmiger Geschwindigkeit statthaben, so folgt aus (1)

$$qr = rp = pq = 0, \tag{33}$$

d. h. es müssen wenigstens zwei der Gröfsen p, q, r verschwinden. Es ist daher auch in diesem Falle nur eine Rotation um eine der Hauptträgheitsachsen möglich. Findet eine solche in einem Momente statt, so wird sie immer mit gleichmäfsiger Ge-

schwindigkeit erhalten. Denn aus (2) und (3) folgt, wenn etwa q und r für einen Moment verschwinden, nach Elimination von p^2

$$Ac = c_1$$

und hierdurch aus den allgemeinen Gleichungen (2) und (3)

$$Bq^2 (A - B) q^2 + C (A - C) r^2 = 0.$$

Da aber die Koefficienten von q^2 und r^2 positive Gröfsen sind, so müssen q und r konstant verschwinden.

8. Auch hier erhalten wir im allgemeinen Falle den deutlichsten Begriff von der Bewegung, wenn wir einerseits die Bewegung einer der Hauptachsen, andrerseits die Drehung des Körpers um diese ins Auge fassen. Doch ist es nicht gleichgültig, welche Hauptachse wir zu diesem Zwecke bevorzugen. Wir wollen die Betrachtung für den Fall, dafs (9a) gilt, durchführen, da wir alsdann die Formeln (12) und (13) benutzen können, welche die Drehungsgeschwindigkeiten in Bezug auf die drei Hauptachsen darstellen.

Die Funktion $y = \sin \operatorname{am} x$ schwankt bekanntlich für $\varkappa^2 < 1$ und reelle Argumente zwischen den Werten $+1$ und -1; man erkennt dies z. B. aus der Gleichung

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1 - y^2)(1 - \varkappa^2 y^2)}},$$

welche zu ihrer Definition dienen kann; die Wurzel wird nämlich imaginär, wenn y^2 die Einheit übersteigt. Dafs $\cos \operatorname{am} x$ denselben Spielraum besitzt, geht aus der Relation

$$\cos \operatorname{am} x = \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} x}$$

hervor. Wir schliefsen hieraus nach (12) und (13), dafs p und q im Verlaufe der Bewegung ihre Zeichen wechseln.

Anders verhält es sich mit der Funktion $\Delta \operatorname{am} x$; aus

$$\Delta \operatorname{am} x = \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} x}$$

geht nämlich hervor, dafs diese Funktion (vom Zeichen abgesehen) ihren Maximalwert für $\sin \operatorname{am} x = 0$, ihren Minimalwert für $\sin \operatorname{am} x = \pm 1$ erreicht. Demgemäfs schwankt $|\Delta \operatorname{am} x|$ zwischen

$$\sqrt{1 - \varkappa^2} = \varkappa_1 \text{ und } 1;$$

da es den Wert 0 für reelle x nicht passiert, so ist kein Zeichenwechsel möglich. Übrigens ist $\Delta \operatorname{am} x$ für reelle x positiv. Nach der zweiten Gleichung (13) ist hieraus der Schlufs zu ziehen, dafs r im Verlaufe der Bewegung sein Zeichen nicht wechselt, dafs also die Rotation um die ζ-Achse, die Achse des *kleinsten* Hauptträgheitsmomentes, immerfort in dem gleichen Sinne vor sich geht. Hiernach empfiehlt es sich, die ζ-Achse für den oben ausgesprochenen Zweck zu benutzen.

Die Rotationsgeschwindigkeit um die ζ-Achse schwankt, wie aus (10) und (13) hervorgeht, zwischen dem Minimum

$$\sqrt{\frac{cB - c_1}{C(B - C)}} \tag{34}$$

und dem Maximum

$$\sqrt{\frac{cA - c_1}{C(A - C)}}. \tag{35}$$

Der Winkel ϑ, welchen die ζ-Achse mit der z-Achse, d. h. mit der Normalen zur invariabeln Ebene, bildet, ist nach (16), (17) und (15a) durch

$$\cos\vartheta = \frac{Cr}{C_1} = \frac{Cr}{\sqrt{c_1}} \tag{36}$$

bestimmt. Der Winkel ϑ ist desto kleiner, je größer die augenblickliche Geschwindigkeit der Rotation um die ζ-Achse ist.

Die Geschwindigkeit, mit welcher die durch die ζ-Achse und die z-Achse gelegte Ebene rotiert, wird durch $\frac{d\varphi}{dt}$ ausgedrückt. Nach (18b) haben wir aber

$$\frac{d\varphi}{dt} = C_1 \frac{c - Cr^2}{c_1 - C^2r^2} = \frac{C_1}{C}\left(1 - \frac{c_1 - cC}{c_1 - C^2r^2}\right). \tag{37}$$

Führen wir hierin den Minimalwert (34) von r ein, so ergiebt sich

$$\frac{C_1}{B} = \frac{\sqrt{c_1}}{B}, \tag{38}$$

durch Einführung des Maximalwertes (35) dagegen

$$\frac{C_1}{A} = \frac{\sqrt{c_1}}{A}. \tag{39}$$

Das Vorzeichen von $\frac{d\varphi}{dt}$ hängt, da $c - Cr^2$ und $c_1 - C^2r^2 = A^2p^2 + B^2q^2$ positiv sind, lediglich von C_1 ab. Aus der letzten Gleichung (16) geht hervor, daſs C_1 dasselbe Zeichen wie r besitzt, wenn $\gamma_3 = \cos\vartheta$ positiv ist, d. h. wenn angenommen wird — wie wir immer thun wollen — daſs die positiv gerichtete ζ-Achse mit der positiv gerichteten z-Achse einen spitzen Winkel einschlieſst. Ein Zeichenwechsel von γ_3 findet nach (16) nicht statt.

Die Kegelbewegung der ζ-Achse geht nach dieser Festsetzung immer in dem gleichen Sinne wie die Rotation um die ζ-Achse vor sich; sie erreicht das Maximum und Minimum ihrer Geschwindigkeit, wenn r ein Minimum oder Maximum ist. Überhaupt nimmt nach (37) $\frac{d\varphi}{dt}$ mit wachsendem r ab.

Um endlich noch zu entscheiden, welche Lage die ξ-Achse und die η-Achse zur Zeit der größten und kleinsten Drehungsgeschwindigkeit um die ζ-Achse (des kleinsten und größten ϑ) besitzen, bilden wir den Aus-

druck für ψ, den Winkel, welchen die ξ-Achse mit der durch die z-Achse und die ζ-Achse gelegten Ebene einschliefst. Aus (18), (12) und (13) folgt

$$(40) \qquad \operatorname{tg} \psi = \sqrt{\frac{B\,(A - C)}{A\,(B - C)}}\,\operatorname{tg} \operatorname{am}(\varkappa^2, \lambda\,(t - t_0)).$$

Da das Maximum von r für $\sin \operatorname{am} = 0$, das Minimum für $\sin \operatorname{am} = 1$, also $\cos \operatorname{am} = 0$ eintritt, so entsprechen diesem Maximum und Minimum die Werte $\psi = 0$ und $\psi = 90^0$. Also:

Zur Zeit der gröfsten Rotationsgeschwindigkeit um die ζ-Achse liegt die ξ-Achse in der $z\zeta$-Ebene, zur Zeit der kleinsten Rotationsgeschwindigkeit steht sie auf ihr senkrecht.

Die gefundenen Resultate können wir folgendermafsen zusammenfassen:

Wenn $c_1 - cB < 0$ ist, so besteht die Bewegung des starren Körpers in einer Rotation um die Achse des kleinsten Trägheitsmomentes mit gleichbleibendem Richtungssinn, aber periodisch zwischen einem Minimum und einem Maximum schwankender Geschwindigkeit. Gleichzeitig führt die angenommene Drehungsachse eine kegelförmige Drehung um die Normale zur invariabeln Ebene aus und zwar in gleichem Sinne mit der ersten Drehung, falls der Winkel zwischen der Achse und der Normalen als spitz angesehen wird. Dieser Winkel ist desto kleiner, je gröfser die augenblickliche Drehungsgeschwindigkeit ist; er schwankt also in derselben Zeitperiode wie diese zwischen einem Minimum und Maximum. Die Geschwindigkeit der Kegeldrehung zeigt ein Minimum oder Maximum, je nachdem die Achsendrehung ein Maximum oder Minimum der Geschwindigkeit aufweist. Die Achse des gröfsten Trägheitsmomentes fällt zur Zeit der gröfsten Rotationsgeschwindigkeit in die Ebene der Drehungsachse und der Normalen zur invariabeln Ebene; zur Zeit der kleinsten Rotationsgeschwindigkeit steht sie auf der erstgenannten Ebene senkrecht. Die Verhältnisse der Perioden der beiden Drehungen ergeben sich durch Ausführung der betreffenden elliptischen Integrale.

Wenn $c_1 - cB > 0$ ist, so gehen die Formeln (12) und (13), wie die Transformationstheorie der elliptischen Funktionen oder die direkte Durchrechnung zeigt, in analoge über, in denen $\cos \operatorname{am}$ und $\Delta \operatorname{am}$, also p und r vertauscht erscheinen. In der eben angestellten Betrachtung vertauschen also die Achsen des kleinsten und gröfsten Trägheitsmomentes ihre Rollen. Wir gehen auf den Gegenstand nicht näher ein.

Eine Rotation im engeren Sinne ist, wie wir oben sahen, um jede der drei Hauptachsen möglich. Dagegen zeigen diese Achsen ein verschiedenes Verhalten, wenn durch irgend einen Anstofs die Bewegung in geringem Mafse modifiziert wird. Die Achsen des gröfsten und kleinsten

Trägheitsmomentes können dann noch als Rotationsachsen (nicht im strengen Sinne) angesehen werden, welche selbst eine Kegelbewegung ausführen. Die Achse des mittleren Trägheitsmomentes zeigt diese Eigenschaft nicht; durch den geringsten Anstofs wird der Körper, welcher um sie rotiert, in eine Bewegung versetzt, die im allgemeinen als Rotation um eine der beiden anderen Hauptachsen aufgefafst werden mufs. In diesem Sinne kann man sagen, dafs die Rotation um die mittlere Hauptträgheitsachse eine *labile*, diejenige um die beiden andern Hauptachsen eine *stabile* sei.

9. Mit dem Falle

$$c_1 - cB = 0 \quad \text{oder} \quad c_1 = cB \tag{41}$$

wollen wir uns jetzt etwas weiter beschäftigen. Aus (7) wird hier

$$dt = \frac{B\sqrt{AC}}{\sqrt{(A-B)(B-C)}} \frac{dq}{c - Bq^2}, \tag{42}$$

so dafs die Integration

$$t - t_0 = \frac{\sqrt{ABC}}{2\sqrt{c(A-B)(B-C)}} \log \frac{\sqrt{c} + \sqrt{B}q}{\sqrt{c} - \sqrt{B}q} \tag{43}$$

liefert. Nehmen wir $t_0 = 0$ an und setzen

$$\lambda = \frac{\sqrt{c(A-B)(B-C)}}{\sqrt{ABC}}, \tag{44}$$

so folgt hieraus

$$q = \sqrt{\frac{c}{B}} \frac{e^{2\lambda t} - 1}{e^{2\lambda t} + 1} = \sqrt{\frac{c}{B}} \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}. \tag{45}$$

Mittels (6) berechnen wir weiter

$$\begin{cases} p = 2\sqrt{\dfrac{c(B-C)}{A(A-C)}} \dfrac{1}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}, \\ r = 2\sqrt{\dfrac{c(A-B)}{C(A-C)}} \dfrac{1}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}. \end{cases} \tag{46}$$

Der Quotient $\frac{p}{r}$ ist hiernach eine konstante Gröfse, woraus wir schliefsen, dafs wir die Rotationen um die ξ-Achse und die ζ-Achse durch eine einzige ersetzen können, die um eine feste in der $\xi\zeta$-Ebene gelegene Achse vor sich geht. Bezeichnet α den Winkel, welchen diese Achse mit der ξ-Achse bildet, so folgt nach einer einfachen Umrechnung

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{p}{\sqrt{p^2 + r^2}} = \sqrt{\dfrac{C(B-C)}{(A-C)(A-B+C)}}, \\ \sin\alpha = \dfrac{r}{\sqrt{p^2 + r^2}} = \sqrt{\dfrac{A(A-B)}{(A-C)(A-B+C)}}. \end{cases} \tag{47}$$

Die Rotationsgeschwindigkeit um diese Achse beträgt

$$(48)\quad \omega = p\cos\alpha + r\sin\alpha = \sqrt{p^2 + r^2} = 2\sqrt{\frac{c\,(A - B + C)}{AC}}\,\frac{1}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}.$$

Sowie wir im allgemeineren Falle von der Rotation um die Achse des kleinsten oder des gröfsten Trägheitsmomentes ausgingen, so können wir hier die Rotation um die eben eingeführte Achse zu Grunde legen. Die Bewegung ist hier keine periodische, sondern nähert sich in der negativen und positiven Unendlichkeit asymptotisch festen Grenzverhältnissen. So wird für $t = -\infty$

$$\omega = 0, \quad \text{dagegen} \quad q = -\sqrt{\frac{c}{B}},$$

für $t = \infty$ aber

$$\omega = 0 \quad \text{und} \quad q = \sqrt{\frac{c}{B}};$$

dazwischen wird für $t = 0$

$$\omega = \sqrt{\frac{c\,(A - B + C)}{AC}} \quad \text{und} \quad q = 0.$$

Den Winkel η, welchen die gewählte Drehungsachse mit der z-Achse (der Normalen zur invariabeln Ebene) bildet, finden wir mittels der aus einer bekannten Relation folgenden Gleichung

$$\cos\eta = \gamma_1\cos\alpha + \gamma_3\sin\alpha,$$

die durch Einsetzung der Werte aus (16), (46) und (47) in

$$\cos\eta = \frac{2}{C_1}\sqrt{\frac{ACc}{A - B + C}}\,\frac{1}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}$$

oder nach (15a) und (41) in

$$(49)\qquad \cos\eta = 2\sqrt{\frac{AC}{B\,(A - B + C)}}\,\frac{1}{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}$$

übergeht.

Für $t = \pm\infty$ wird $\eta = 90^0$, für $t = 0$

$$\cos\eta = \sqrt{\frac{AC}{B\,(A - B + C)}}.$$

Wir glauben auf den Bewegungsvorgang, der im übrigen mit dem allgemeineren grofse Analogie zeigt, nicht weiter eingehen zu sollen.

10. Die gewöhnlich übliche Behandlungsweise des Problems, die von Poinsot herrührt*), geht von anderen Gesichtspunkten aus; die Momentandrehungsachse, welche fortwährend ihre Lage im Körper und im Raume ändert, und das geometrisch darzustellende Zentralellipsoid spielen hier eine wichtige Rolle. Letzteres rollt auf einer invariabeln

*) Poinsot, Théorie de nouvelle de la rotation des corps, 1834 u. 1851. Eine sehr ausführliche Darstellung des ganzen Problems nebst Litteraturangaben findet man bei Schell, a. a. O. B. II, p. 421 ff.

Ebene. Auf dem Ellipsoid wie in der Ebene wird durch die successiven Berührungspunkte je eine Kurve bestimmt; die erstere auf dem Ellipsoid befindliche, heifst die Polodie, die letztere, in der Ebene gebildete, die Herpolodie oder Serpolodie. Wir gehen auf diesen Gegenstand nicht weiter ein, da es dem Verfasser anschaulicher erscheint, die Bewegung auf die festen Hauptachsen, als auf die wechselnde Momentanachse zu beziehen. Nur einen einfachen Satz, welcher die Rotationsgeschwindigkeit ω um die Momentanachse betrifft (ω hat natürlich hier eine andere Bedeutung wie in der letzten Nummer), wollen wir noch ableiten.

Stellt man die Gleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \tag{50}$$

des Hauptträgheitsellipsoids mit (2) zusammen, worin (T = lebendige Kraft)

$$c = 2T$$

gesetzt werden kann, so zeigt sich, dafs beide Gleichungen für

$$\xi = \frac{p}{\sqrt{2T}}, \quad \eta = \frac{q}{\sqrt{2T}}, \quad \zeta = \frac{r}{\sqrt{2T}} \tag{51}$$

identisch werden. Es ist daher

$$\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2} = \sqrt{2T}\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \tag{52}$$

Infolge von (51) sind ξ, η, ζ als Koordinaten eines Punktes des Trägheitsellipsoides dargestellt, welcher auf der Hauptdrehungsachse liegt; $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ ist die Länge des zugehörigen Halbdiameters. Wir haben daher den Satz:

Die jeweilige Rotationsgeschwindigkeit ist der Länge des Diameters des Hauptträgheitsellipsoides proportional, welcher in die Richtung der momentanen Drehungsachse fällt.

11. Alle Betrachtungen dieses Paragraphen bleiben in Gültigkeit, wenn der Körper in einem Punkte festgehalten wird, der nicht mit dem Schwerpunkte zusammenfällt; nur müssen dann die Trägheitsmomente auf den festen Punkt bezogen werden.

§ 61.

Bewegung eines starren Systems um einen festen Punkt unter Einflufs der Schwerkraft.

1. Ist ein freier starrer Körper der Wirkung der Schwerkraft ausgesetzt, so bewegt sich sein Schwerpunkt ebenso, wie es ein einfacher materieller Punkt thun würde; ein Einflufs auf die drehende Bewegung um den Schwerpunkt findet nicht statt. Das letztere gilt auch, wenn der Schwerpunkt*), nicht aber wenn ein anderer Punkt des Systems

*) Dies geht aus § 55, 1 hervor.

festgehalten wird. Die Bewegung bei der letzteren Annahme soll hier untersucht werden; da sich indessen der allgemeinen Lösung analytische Schwierigkeiten entgegenstellen — die Auffindung eines Integrals ist nicht gelungen —, so beschränken wir uns auf den Spezialfall, daſs das Zentralträgheitsellipsoid des Körpers ein Rotationsellipsoid ist und daſs der festgehaltene Punkt in die isolierte Hauptachse desselben fällt. Wir lösen hiermit das bekannte Problem der Kreiselbewegung unter Einfluſs der Schwerkraft. — Lagrange war der erste, der das Problem auf Quadraturen zurückführte.

2. Die Euler'schen Gleichungen, § 59, (14), wurden unter der Voraussetzung hergeleitet, daſs der Schwerpunkt als der Nullpunkt des Systems ξ, η, ζ angenommen wurde. Doch bleiben sie bestehen (vgl. § 60, 11), wenn dieser Nullpunkt ein festbleibender Punkt des Systems ist; A, B, C sind dann die Hauptträgheitsmomente für diesen Punkt. Diese Annahmen wollen wir für die Folge machen. Die positive ζ-Achse möge durch den Schwerpunkt gehen und die z-Achse möge die Vertikale sein, die positive Hälfte nach oben gekehrt. Bezeichnet s den Abstand des Schwerpunktes von dem festen Punkte, so ist unter Beibehaltung früherer Bezeichnungen (m ist die Masse des Körpers)

$$M_x = -mgs\beta_3, \quad M_y = mgs\alpha_3, \quad M_z = 0. \tag{1}$$

Hieraus finden wir die Drehungsmomente für die ξ, η, ζ-Achse in der Form

$$M_\xi = M_x\alpha_1 + M_y\beta_1 + M_z\gamma_1 = -mgs(\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1) \text{ u. s. w.}$$

oder

$$M_\xi = mgs\gamma_2, \quad M_\eta = -mgs\gamma_1, \quad M_\zeta = 0. \tag{2}$$

Die Euler'schen Gleichungen lauten hiernach

$$\left\{\begin{aligned} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr &= mgs\gamma_2, \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp &= -mgs\gamma_1, \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq &= 0. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Multipliziert man diese Gleichungen mit p, q, r und addiert sie, so erhält man

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = -mgs(q\gamma_1 - p\gamma_2).$$

Aus § 59, (9) und früheren Formeln folgt

$$\begin{aligned} q\gamma_1 - p\gamma_2 &= (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2)\frac{d\alpha_3}{dt} + (\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2)\frac{d\beta_3}{dt} + (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\frac{d\gamma_3}{dt} \\ &= -\alpha_3\gamma_3\frac{d\alpha_3}{dt} - \beta_3\gamma_3\frac{d\beta_3}{dt} + (1-\gamma_3^2)\frac{d\gamma_3}{dt} \\ &= -\gamma_3\left(\alpha_3\frac{d\alpha_3}{dt} + \beta_3\frac{d\beta_3}{dt} + \gamma_3\frac{d\gamma_3}{dt}\right) + \frac{d\gamma_3}{dt} \end{aligned}$$

oder

(4) $$q\gamma_1 - p\gamma_2 = \frac{d\gamma_3}{dt}.$$

Nach Einsetzung dieses Wertes und nach ausgeführter Integration ergiebt sich

(5) $$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = -2mgs\gamma_3 + c,$$

die Gleichung der lebendigen Kraft. Aus der dritten Gleichung § 59, (13) folgt ferner nach Nullsetzen der rechten Seite und Integration

(6) $$A\gamma_1 p + B\gamma_2 q + C\gamma_3 r = C_1,$$

der Flächensatz für die xy-Ebene.

3. Führen wir jetzt die oben in Aussicht genommene Spezialisierung
$$A = B$$
ein, so folgt aus der dritten Gleichung (3)

(7) $$r = \text{Const.}$$

Die Gleichungen (5) und (6) gehen über in

(8) $$A(p^2 + q^2) + Cr^2 = -2mgs\gamma_3 + c,$$

(9) $$A(\gamma_1 p + \gamma_2 q) + C\gamma_3 r = C_1.$$

In diese Relationen führen wir die Winkel ϑ, φ, ψ ein; für (4) können wir schreiben

(10) $$\gamma_2 p - \gamma_1 q = \sin\vartheta \frac{d\vartheta}{dt},$$

während die Gleichung (18a) in § 60 in die Form

(11) $$\gamma_1 p + \gamma_2 q = \sin^2\vartheta \frac{d\varphi}{dt}$$

gesetzt werden kann. Durch Quadrieren und Addieren von (10) und (11) folgt

(12) $$(p^2 + q^2)\,dt^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2.$$

Eliminieren wir mittels (11) und (12) p und q aus (8) und (9), so erhalten wir

(13) $$A(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) = (-2mgs\cos\vartheta + c - Cr^2)\,dt^2,$$

(14) $$A\sin^2\vartheta\, d\varphi = (C_1 - Cr\cos\vartheta)\,dt.$$

Hieraus können wir $d\varphi$ oder dt eliminieren und t und φ durch elliptische Integrale als Funktionen von ϑ darstellen.

Nach § 60, (18), den zu (4) analogen Gleichungen und (11) ist

(15) $$\begin{cases} \operatorname{tg}\psi = \dfrac{\gamma_2}{\gamma_1}, \\[2mm] d\psi = \dfrac{\gamma_1 d\gamma_2 - \gamma_2 d\gamma_1}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} = \dfrac{\gamma_1(\gamma_3 p - \gamma_1 r) - \gamma_2(\gamma_2 r - \gamma_3 q)}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\,dt \\[2mm] \quad = \dfrac{\gamma_3(\gamma_1 p + \gamma_2 q) - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)\,r}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\,dt \\[2mm] \quad = \dfrac{\cos\vartheta \sin^2\vartheta\, d\varphi - r\sin^2\vartheta\, dt}{\sin^2\vartheta} = \cos\vartheta\, d\varphi - r\,dt, \end{cases}$$

wonach auch ψ zu berechnen ist.

Übrigens ist die Berechnung des Winkels ψ nicht nötig, um eine klare und übersichtliche Vorstellung von der Bewegung des Körpers zu erhalten. Durch die Kenntnis von ϑ und φ für die Zeit t ist die Bewegung der Hauptachse beschrieben, um die noch eine Drehung mit der konstanten Geschwindigkeit r stattfindet; (13) und (14) charakterisieren mit (7) zusammen die Bewegung.

4. Der Verlauf der Bewegung hängt wesentlich von dem Anfangszustande ab; wir wollen eine Hypothese verfolgen, welche am besten die Bewegung des in einem Punkte festgehaltenen Kreisels (Gyroskops) klarstellt. Der Kreisel ist ein sonst beliebig geformter Körper, dessen Hauptträgheitsellipsoid ein Rotationsellipsoid ist und welcher in eine rasche Umdrehung um die isolierte Hauptachse versetzt wird; eine Bewegung der Hauptachse ist jedoch keineswegs ausgeschlossen, wird vielmehr bei der primitiven Art, auf welche der Kreisel zur Rotation gebracht wird, niemals zu vermeiden sein. Wir wollen fragen, ob (bei geeignetem seitlichen Anstofs) eine Bewegung möglich ist, bei der ϑ konstant, d. h. die Drehungsachse immer gleich gegen die Horizontalebene geneigt bleibt.

Da hier $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ ist, so wird aus (13)

$$(16) \qquad A \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = -2mgs \cos \vartheta + c - Cr^2 = \text{Const.},$$

während (14) ungeändert bleibt. Aus beiden Gleichungen folgt

$$(17) \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \text{Const.};$$

gleichzeitig ergiebt sich eine Beziehung zwischen c und C_1. $\frac{d\varphi}{dt}$ enthält hiernach noch immer eine willkürliche Konstante, die mittels der Gleichungen (3) beseitigt werden mufs.

Die Gleichungen (10) und (11) werden hier zu

$$\gamma_2 p - \gamma_1 q = 0, \quad \gamma_1 p + \gamma_2 q = \sin^2 \vartheta \frac{d\varphi}{dt},$$

und wir berechnen hieraus

$$(18) \qquad p = \gamma_1 \frac{d\varphi}{dt}, \quad q = \gamma_2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Führen wir diese Werte in die erste Gleichung (3) ein und beachten, dafs wegen (17)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$$

ist, so erhalten wir

$$A \frac{d\gamma_1}{dt} \frac{d\varphi}{dt} + (C - A) r \gamma_2 \frac{d\varphi}{dt} = mgs\gamma_2$$

oder, da analog mit (4)

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3 = r\gamma_2 - \gamma_2\gamma_3 \frac{d\varphi}{dt}$$

ist,

$$A \cos\vartheta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - Cr\frac{d\varphi}{dt} + mgs = 0. \tag{19}$$

Zu derselben Relation führt die analoge Behandlung der zweiten Gleichung (3).

Die Gleichung (19) bestimmt $\frac{d\varphi}{dt}$ zweideutig durch A, C, r, ϑ, m, g, s, ohne dafs eine willkürliche Konstante hinzukäme. Wir berechnen

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Cr \pm \sqrt{C^2r^2 - 4Amgs\cos\vartheta}}{2A\cos\vartheta}. \tag{20}$$

Bei dem Gyroskop wird der Rotationsgeschwindigkeit r meistens ein sehr beträchtlicher Wert verliehen; der Radikand in (20) wird dann für beliebige ϑ positiv*). Unter Voraussetzung eines sehr grofsen r können wir bei Vernachlässigung der Potenzen von $\frac{1}{r}$ von der zweiten an schreiben

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{Cr \pm Cr\sqrt{1 - \frac{4Amgs\cos\vartheta}{C^2r^2}}}{2A\cos\vartheta} = \frac{Cr \pm Cr\left(1 - \frac{2Amgs\cos\vartheta}{C^2r^2}\right)}{2A\cos\vartheta}$$

und erhalten so die beiden Werte

$$\begin{cases} \text{a)} & \frac{d\varphi}{dt} = \frac{Cr}{A\cos\vartheta} - \frac{mgs}{Cr}, \\ \text{b)} & \frac{d\varphi}{dt} = \frac{mgs}{Cr}. \end{cases} \tag{21}$$

Der erste dieser Werte stimmt bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes mit dem in § 60, (32) gefundenen überein. Wir schliefsen daher, dafs bei sehr grofser Drehungsgeschwindigkeit um die isolierte Hauptachse die Bewegung nahezu geradeso verlaufen kann, wie wenn die Schwerkraft nicht vorhanden wäre, während die invariable Ebene horizontal liegt.

Der zweite Wert für $\frac{d\varphi}{dt}$ ist bei sehr grofsem r von ϑ nahezu unabhängig und r umgekehrt proportional; die Kegeldrehung geht dann stets in demselben Sinne vor sich, wie die Drehung um die Hauptachse. Hierbei ist jedoch zu beachten, dafs man zum Vergleich der beiden Drehungsgeschwindigkeiten die positive ζ-Achse mit der positiven z-Achse zum Zusammenfallen bringen mufs. Ist daher ϑ ein stumpfer Winkel, liegt also der Schwerpunkt tiefer als der Aufhängungspunkt, so scheint die Kegeldrehung in umgekehrtem Sinne vor sich zu gehen wie die Achsendrehung. Diese zweite, langsame Kegel-

*) Für $C^2r^2 < 4Amgs\cos\vartheta$ wird die supponierte Kegelbewegung natürlich unmöglich; ein Kreisel, dessen Rotationsgeschwindigkeit zu gering wird, vermag sich bei vorhandener Neigung der Drehungsachse nicht mehr aufrecht zu erhalten.

drehung der Achse ist diejenige, welche man am Gyroskop regelmäſsig beobachtet, soweit es überhaupt gelingt, eine reine Kegelbewegung zu erzielen.

5. Ohne Schwierigkeit läſst sich auch die Annahme, verfolgen, daſs die Rotationsachse in einem Momente festgehalten und daſs dann das System sich selbst überlassen wird. Der Winkel ϑ ist dann einer periodischen Zu- und Abnahme unterworfen, die jedoch bei groſsem r unbedeutend ist. Die Bewegung kommt im ganzen der eben beschriebenen ziemlich nahe.

6. Bei schief gestellter Rotationsachse wirkt die Schwerkraft wie ein Drehungsmoment, welches die Rotationsachse aus ihrer Richtung abzulenken sucht. Liegt der Schwerpunkt über dem befestigten Punkte, so sucht die Schwerkraft die Achse horizontal zu richten, im umgekehrten Falle aber vertikal. Offenbar muſs jedes die Rotationsachse angreifende Drehungsmoment ganz analog wie die Schwerkraft wirken. Wir können daher folgenden Satz aussprechen, der freilich nach dem Vorhergehenden nicht gerade strenge richtig ist, aber doch den Bewegungsvorgang näherungsweise erklärt:

Sucht ein Drehungsmoment die Drehungsachse eines frei rotierenden Rotationskörpers aus ihrer Richtung abzulenken, so weicht jene Achse durch eine seitliche Kegelbewegung um die Normale zur invariabeln Ebene aus. Diese Kegelbewegung, deren Geschwindigkeit mit wachsender Rotationsgeschwindigkeit abnimmt, geht in dem gleichen Sinne wie die Rotation vor sich, wenn das Drehungsmoment die Achse von der Normalrichtung zur invariabeln Ebene zu entfernen strebt; im umgekehrten Falle hat sie den umgekehrten Drehungssinn.

7. Die Gleichungen (13) und (14) gehen für $r = 0$ bei geeigneter Änderung der Bezeichnung und Festsetzung der Konstanten in die Gleichungen (11) und (10) von § 19 über. Die Bewegung der Hauptachse des festen Körpers ist alsdann identisch mit der Bewegung des Fadens (resp. dessen Verlängerung jenseit des Aufhängungspunktes) eines konischen Pendels von geeigneter Länge. Für diese Länge findet man

$$l = \frac{A}{ms}. \tag{22}$$

§ 62.

Die Präzession.

1. Die Erde führt, wenn man ihren Schwerpunkt als relativ festgelegt ansieht, noch eine Bewegung aus, welche in einer Rotation um ihre kleine Achse besteht, während letztere selbst einer langsamen Lagenänderung ausgesetzt ist. Die Bewegung der Erdachse geht im wesentlichen in einem Kreiskegel vor sich, dessen Achse auf der Ebene der

Ekliptik senkrecht steht; der Winkel zwischen der Erdachse und der Normalen zur Ekliptik beträgt gegenwärtig ca. $23^0\,27'$, die Drehung, welche der Rotation um die Achse entgegengesetzt ist, hat eine Periode von ca. 25 795 Jahren. Man bezeichnet diese Kegelbewegung wegen der durch sie veranlafsten Verschiebung der Tag- und Nachtgleichen als Präzession. Sie wird modifiziert durch eine kleine elliptische Kegelbewegung, die sogenannte Nutation, und geringfügigere Störungen. Die Präzessionsbewegung ist der Richtung und Gröfse nach von der Kegelbewegung, welche die Achse eines Rotationskörpers ohne Einwirkung äufserer Kräfte ausführen kann, durchaus verschieden. Sie mufs vielmehr auf die Attraktion der Himmelskörper zurückgeführt werden, von denen jedoch nur Mond und Sonne eine hier in Betracht kommende Wirkung auszuüben vermögen. Die Aufgabe läfst sich als Störungsproblem durchführen; wir begnügen uns hier damit, durch gewisse vereinfachende Annahmen die Rechnung zu erleichtern und so eine ausreichende Theorie der Präzession allein, ohne Berücksichtigung der kleineren Störungen, zu geben*).

2. Um die Differentialgleichungen der Bewegung eines starren Massensystems, welches von einem Massenzentrum nach dem Newton'schen Gesetze angezogen wird, um seinen Schwerpunkt ganz allgemein zu entwickeln, behalten wir die früheren Bezeichnungen bei und setzen noch weiter fest, dafs die Verbindungslinie jenes Massenzentrums und des Schwerpunktes des Systems mit den Hauptträgheitsachsen des letzteren die Winkel λ, μ, ν einschliefsen möge; die Entfernung des Massenzentrums vom Schwerpunkte sei ϱ, von einem beliebigen Punkte ξ, η, ζ des starren Systems ϱ_1. Die Masse des Zentrums sei m_1, die des Elementes ξ, η, ζ dm. Die Komponenten der Attraktion Ξ, H, Z auf dm nach den Achsen der ξ, η, ζ sind dann, wenn f die Gravitationskonstante bezeichnet,

$$(1)\qquad \begin{cases} \Xi = \dfrac{fm_1\,dm}{\varrho_1^{\,2}}\cdot\dfrac{\varrho\cos\lambda-\xi}{\varrho_1}, \\[2mm] H = \dfrac{fm_1\,dm}{\varrho_1^{\,2}}\cdot\dfrac{\varrho\cos\mu-\eta}{\varrho_1}, \\[2mm] Z = \dfrac{fm_1\,dm}{\varrho_1^{\,2}}\cdot\dfrac{\varrho\cos\nu-\zeta}{\varrho_1}. \end{cases}$$

Die in den Euler'schen Gleichungen § 59, (14) auftretenden Drehungsmomente sind daher

$$(2)\qquad \begin{cases} M_\xi = \sum(Z\eta - H\zeta) = fm_1\sum\dfrac{\varrho(\eta\cos\nu-\zeta\cos\mu)}{\varrho_1^{\,3}}\,dm, \\[2mm] M_\eta = fm_1\sum\dfrac{\varrho(\zeta\cos\lambda-\xi\cos\nu)}{\varrho_1^{\,3}}\,dm, \\[2mm] M_\zeta = fm_1\sum\dfrac{\varrho(\xi\cos\mu-\eta\cos\lambda)}{\varrho_1^{\,3}}\,dm, \end{cases}$$

wo die Summation über das ganze starre System auszudehnen ist.

*) Eine weitergehende Durchführung s. bei Israël-Holtzwart, Astromechanik, p. 141 ff.

Der Cosinus des Winkels, welchen die Verbindungslinie des Schwerpunktes mit dem Massenzentrum einerseits und dem Punkte ξ, η, ζ andrerseits miteinander bilden, ist durch

$$\frac{\xi \cos \lambda + \eta \cos \mu + \zeta \cos \nu}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

dargestellt. Demnach ist

$$\varrho_1^2 = \varrho^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2\varrho\,(\xi \cos \lambda + \eta \cos \mu + \zeta \cos \nu).$$

Macht man nun die Annahme, dafs ϱ sehr grofs ist gegen die Dimensionen des starren Systems, so kann man unter Vernachlässigung höherer Potenzen von $\frac{1}{\varrho}$ setzen

$$\varrho_1 = \varrho - (\xi \cos \lambda + \eta \cos \mu + \zeta \cos \nu) \tag{3}$$

und

$$\frac{1}{\varrho_1^3} = \frac{1}{\varrho^3} + \frac{3}{\varrho^4}(\xi \cos \lambda + \eta \cos \mu + \zeta \cos \nu). \tag{4}$$

Bedenkt man, dafs λ, μ, ν für den ganzen Körper denselben Wert haben und dafs nach § 57, 3

$$\sum \eta \zeta\, dm = \sum \zeta \xi\, dm = \sum \xi \eta\, dm = 0$$

und, weil der Nullpunkt der Schwerpunkt ist,

$$\sum \xi\, dm = \sum \eta\, dm = \sum \zeta\, dm = 0$$

ist, so wird aus (2)

$$\tag{5} \left\{\begin{aligned} M_\xi &= \frac{3fm_1}{\varrho^3} \cos \mu \cos \nu \sum (\eta^2 - \zeta^2)\, dm, \\ M_\eta &= \frac{3fm_1}{\varrho^3} \cos \nu \cos \lambda \sum (\zeta^2 - \xi^2)\, dm, \\ M_\zeta &= \frac{3fm_1}{\varrho^3} \cos \lambda \cos \mu \sum (\xi^2 - \eta^2)\, dm. \end{aligned}\right.$$

Bemerkt man noch, dafs

$$\sum (\eta^2 + \zeta^2)\, dm = A, \quad \sum (\zeta^2 + \xi^2)\, dm = B, \quad \sum (\eta^2 + \xi^2)\, dm = C \tag{6}$$

ist, worin A, B, C die Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt bezeichnen, so gehen die Gleichungen § 59, (14) in

$$\tag{7} \left\{\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B)\, qr &= \frac{3fm_1 (C - B)}{\varrho^3} \cos \mu \cos \nu, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C)\, rp &= \frac{3fm_1 (A - C)}{\varrho^3} \cos \nu \cos \lambda, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A)\, pq &= \frac{3fm_1 (B - A)}{\varrho^3} \cos \lambda \cos \mu \end{aligned}\right.$$

über.

Es ist sehr bemerkenswert, dafs die Bewegung durch die spezielle Massenverteilung nur insofern beeinflufst wird, als diese die Hauptträgheitsmomente bestimmt.

3. Bei der Erde nehmen wir die Rotationsachse als ζ-Achse an; es ist dann $A = B$ und $C > A$. Aus den Gleichungen (7) wird

$$
(8) \qquad \begin{cases} A\,\dfrac{dp}{dt} + (C - A)\,qr = \dfrac{3fm_1\,(C-A)}{\varrho^3}\cos\mu\cos\nu, \\ A\,\dfrac{dq}{dt} - (C - A)\,rp = -\dfrac{3fm_1\,(C-A)}{\varrho^3}\cos\nu\cos\lambda, \\ \dfrac{dr}{dt} = 0. \end{cases}
$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$
(9) \qquad r = \text{Const.}
$$

Die Geschwindigkeit der Rotation um die Hauptachse erleidet also durch das Attraktionszentrum keine Störung.

Wäre auch $C = A$, die Erde also z. B. eine aus homogenen Schichten bestehende Kugel, so würde nach (8) überhaupt eine Störung der Rotationsbewegung nicht stattfinden. Die Abplattung der Erde ist daher die Vorbedingung der Präzession.

Wirken mehrere Zentren attrahierend, so sind auf den rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen (8) analoge Glieder zuzufügen.

4. Die wirkliche Auswertung der Gleichungen (8) erfordert, dafs die Winkel λ, μ, ν durch die Gröfsen, welche die Lage des starren Systems, und diejenigen, welche die Lage des Attraktionszentrums als Funktion der Zeit bestimmen, ausgedrückt werden. Obgleich es keine besondere Schwierigkeit bietet, die Aufgabe allgemeiner zu behandeln, wollen wir sie doch der Übersichtlichkeit halber nur unter einer vereinfachenden Voraussetzung erledigen. Wir nehmen die als fest betrachtete Ekliptikebene als xy-Ebene, den fest gedachten Schwerpunkt der Erde als Nullpunkt des Systems der x, y, z. Das Attraktionszentrum möge nun in der Ekliptikebene mit gleichbleibender Geschwindigkeit einen Kreis (Radius ϱ) um den Schwerpunkt der Erde ausführen. In Wirklichkeit ist auch die Neigung der Mondbahn gegen die Erdbahn in Betracht zu ziehen.

Zur Zeit $t = 0$ möge das Attraktionszentrum in der x-Achse liegen, in der Zeit t möge die Verbindungslinie ϱ in der Richtung von der positiven x-Halbachse zur positiven y-Halbachse den Winkel kt beschreiben. Dann ist

$$
\cos\lambda = \cos(\varrho, x)\cos(x, \xi) + \cos(\varrho, y)\cos(y, \xi) + \cos(\varrho, z)\cos(z, \xi)
$$

u. s. w.

oder, unter Anwendung früherer Bezeichnungen und unter Beachtung der Relation

$$
(\varrho, z) = 90^0,
$$

$$(10)\qquad \begin{cases} \cos\lambda = \alpha_1 \cos kt + \beta_1 \sin kt, \\ \cos\mu = \alpha_2 \cos kt + \beta_2 \sin kt, \\ \cos\nu = \alpha_3 \cos kt + \beta_3 \sin kt. \end{cases}$$

Führt man nach § 52, (27) die Gröfsen ϑ, φ, ψ ein, so wird hieraus

$$(11)\qquad \begin{cases} \cos\lambda = \quad\sin\psi \sin(kt-\varphi) - \cos\vartheta\cos\psi\cos(kt-\varphi), \\ \cos\mu = -\cos\psi\sin(kt-\varphi) - \cos\vartheta\sin\psi\cos(kt-\varphi), \\ \cos\nu = \quad\sin\vartheta\cos(kt-\varphi). \end{cases}$$

Der Winkel $kt-\varphi$ ist die Längendifferenz zwischen der Projektion der Erdachse auf die Ekliptikebene und dem Attraktionszentrum. Die Formeln sind auch direkt leicht abzuleiten.

5. Die Integration der aufgestellten Gleichungen gelingt durch Einführung vereinfachender Annahmen. Die Gleichungen (8) nehmen eine bedeutend einfachere Gestalt an, wenn man sich von dem variablen Winkel $kt-\varphi$ unabhängig macht. Da die Bewegung der Erdachse, der Kleinheit der perturbierenden Kräfte halber, ihre Lage nur sehr langsam ändern kann, also sich nur unmerklich geändert hat, wenn $kt-\varphi$ seine sämtlichen Werte von 0 bis 2π durchlaufen hat, so kann man sich ohne beträchtlichen Fehler die Masse des störenden Körpers gleichmäfsig auf seine ganze Bahn verteilt denken*).

Nun treten in (8), nach Einsetzung der Ausdrücke (11), auf der rechten Seite die Gröfsen

$$\sin(kt-\varphi)\cos(kt-\varphi) = \tfrac{1}{2}\sin 2(kt-\varphi)$$

und

$$\cos^2(kt-\varphi)$$

auf; wir werden die Mittelwerte derselben zu ermitteln haben. Für den Sinus ist der Mittelwert gleich Null, während wir für $\cos^2(kt-\varphi)$ den Mittelwert

$$(12)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2 x\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}$$

berechnen.

Hiernach gehen die Gleichungen (8) über in

$$(13)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-A)\,qr = -\dfrac{3fm_1(C-A)}{2\varrho^3}\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\psi, \\ A\dfrac{dq}{dt} - (C-A)\,pr = \quad\dfrac{3fm_1(C-A)}{2\varrho^3}\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\psi, \\ \dfrac{dr}{dt} = 0. \end{cases}$$

*) Die periodischen Störungsglieder, welche hierdurch vernachlässigt werden, sind in der That ziemlich unbedeutend. Die bedeutendste Störung der Präzession, die **Nutation**, rührt von der Neigung der Mondbahn gegen die Ekliptikebene her.

Nimmt man noch weiter an, dafs ϑ konstant sei, so lassen sich die Gleichungen (13) unter Benutzung von § 52, (27) mit den Gleichungen (3) von § 61 bei geeigneter Festsetzung der Konstanten identifizieren. Wir haben nämlich

$$mgs = -\frac{3fm_1(C-A)}{2\varrho^3}\cos\vartheta \tag{14}$$

zu nehmen. Aus der Gleichung § 61, (21b), die wir hier recht wohl anwenden können, folgt dann

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{3fm_1(C-A)}{2C\varrho^3 r}\cos\vartheta. \tag{15}$$

Betrachten wir die Erde als ein homogenes, abgeplattetes Rotationsellipsoid, dessen grofse und kleine Halbachse a und c sind, so wird nach § 57, (22) und (22a)

$$A = \frac{m(a^2+c^2)}{5}, \quad C = \frac{2ma^2}{5}, \tag{16}$$

worin m die Erdmasse bezeichnet. (15) geht hiernach in

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{3fm_1(a^2-c^2)\cos\vartheta}{4a^2\varrho^3 r} = -\frac{3fm_1\varepsilon^2\cos\vartheta}{4\varrho^3 r} \tag{17}$$

über, wenn ε die numerische Exzentrizität der Meridianellipse darstellt. Bezeichnet ferner g die Beschleunigung der Schwere am Pole (Mafseinheiten: Meter und Sekunde), so ist

$$f = \frac{gc^2}{m},$$

also

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{3}{4}\frac{g}{\varrho r}\frac{m_1}{m}\left(\frac{c}{\varrho}\right)^2\varepsilon^2\cos\vartheta. \tag{18}$$

Nun können wir setzen

$$\varepsilon = 0{,}0817, \quad g = 9{,}8088, \quad \vartheta = 23^0\,27', \quad r = \frac{2\pi}{86\,164};$$

ferner für den Mond

$$\frac{m_1}{m} = \frac{1}{80}, \quad \frac{c}{\varrho} = \frac{1}{60}, \quad \varrho = 384\,415\,500\text{ m};$$

für die Sonne

$$\frac{m_1}{m} = 322\,800, \quad \frac{c}{\varrho} = \frac{1}{23\,312},$$
$$\varrho = 148\,600\,000\,000\text{ m}.$$

Aufserdem wollen wir $\frac{d\varphi}{dt}$, welches wir durch Bogenlänge und Zeitsekunde ausgedrückt erhalten, in Bogensekunden und Jahre umrechnen, indem wir mit

$$\frac{360\,.\,60\,.\,60\,.\,31\,556\,927}{2\pi}$$

multiplizieren.

So berechnen wir als jährliche Änderung des Winkels φ:

a) infolge der Attraktion des Mondes: $-36{,}32''$,

b) infolge der Attraktion der Sonne: $-16{,}07''$,

so dafs die ganze jährliche Präzession

$$-52{,}39''$$

betragen würde, was dem wirklichen Betrage von $-50{,}24''$ ziemlich nahe kommt. Die vorgenommenen Vereinfachungen erklären die Abweichung hinreichend.

§ 63.

Der Stofs kugelförmiger Körper.

1. Alle bisher besprochenen Bewegungserscheinungen starrer Körper haben das eine gemein, dafs die Geschwindigkeiten der Bewegungen keine Stetigkeitsunterbrechung erfahren. Es ist aber leicht einzusehen, dafs die Annahme starrer, undurchdringlicher Systeme zu einem Falle des Gegenteiles führen mufs. Kommen nämlich zwei beliebig bewegte starre Systeme mit ihrer Umgrenzung in Berührung, so wird, da sie sich nicht durchdringen können, im allgemeinen eine Stetigkeitsunterbrechung der Geschwindigkeiten statthaben müssen. Man bezeichnet die Wirkung der beiden Körper auf ihre beiderseitige Bewegung als Stofs. Die mechanische Behandlung des Stofses gab zu mannigfaltigen Diskussionen und sehr divergierenden Ansichten Veranlassung*). Unzweifelhaft ist es nicht möglich, mit den früheren Prinzipien den Gegenstand zu erledigen. Bei dem Stofse kommen Vorgänge in den kleinsten Teilen in Betracht, welche wir im einzelnen nicht zu verfolgen im stande sind, deren Gesamtwirkung wir jedoch teils nach der Erfahrung, teils nach gewissen Analogie- und Probabilitätsschlüssen beurteilen können. Um das Problem nicht unnötig zu komplizieren, wollen wir annehmen, dafs die beiden zusammenstofsenden Körper homogen und kugelförmig sind und sich lediglich infolge des Beharrungsgesetzes ohne Rotation geradlinig und mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen. Zunächst wollen wir weiter voraussetzen, dafs der Stofs ein zentraler ist, d. h. dafs sich die beiden Kugelmittelpunkte vor dem Stofse in derselben Geraden bewegen.

2. Da bei dem zentralen Stofse kein Grund vorhanden ist, dafs einer der Kugelmittelpunkte von der Geraden, in der sie sich vor dem Stofse bewegten, nach dem Stofse abweichen sollte, so müssen wir annehmen, dafs beide sich alsdann irgendwie auf derselben weiter bewegen müssen. Obgleich wir die Art der inneren Kräfte, welche bei dem Stofse thätig werden, nicht zu beurteilen im stande sind, so werden wir doch

---

*) S. hierüber Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Prinzipien der Mechanik, 2. Aufl., p. 153 ff.

nicht fehlgehen, wenn wir, im Einklange mit allen Erfahrungsthatsachen, annehmen, dafs das Prinzip der Bewegung des Schwerpunktes nach § 24, 4 bei ihnen Anwendung findet. Der Schwerpunkt des Systems von zwei Körpern wird also nach dem Stofse seine geradlinige Bewegung unverändert fortsetzen. Dagegen sind wir nicht berechtigt, das Prinzip von der Erhaltung der lebendigen Kraft für die äufserlich sichtbare Bewegung in Anwendung zu bringen. Denn es kann ein Teil der lebendigen Kraft, wie auch thatsächlich geschieht, in Molekularbewegung (Wärme) umgesetzt werden.

Der Anschaulichkeit wegen wollen wir jetzt nur den Fall ins Auge fassen, dafs der Schwerpunkt beider Körper mit den Massen m_1 und m_2 von Anfang an in Ruhe war. Bewegen sich die Mittelpunkte auf der x-Achse, sind x_1 und x_2 die Örter derselben und ist der Nullpunkt der Schwerpunkt des Systems, so haben wir die Beziehung

$$(1) \qquad m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0;$$

die entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeiten beider Körper verhalten sich umgekehrt wie ihre Massen. Nach dem Stofse müssen sich beide Kugeln entweder in Ruhe befinden oder sich mit Geschwindigkeiten, welche ihren Massen umgekehrt proportional sind, rückwärts bewegen, wie dies das Beharren des Schwerpunktes im Nullpunkte erfordert. In Wirklichkeit dürfte meistens der letztere Fall eintreten, wenn auch die nach dem Stofse angenommene Geschwindigkeit in verschiedenen Fällen sehr verschieden ausfallen wird; im Maximum wird sie nur die frühere Geschwindigkeit erreichen können, da andernfalls eine Vermehrung der lebendigen Kraft stattfinden würde, was wir, wenn nicht etwa chemische Kräfte in Aktion treten, ausschliefsen dürfen. Bei der mathematischen Behandlung des Stofses pflegt man sich nun auf die beiden extremen Fälle zu beschränken, die beide in Wirklichkeit nahezu erreicht werden können. Wir betrachten also die Hypothesen

a) dafs nach dem Stofse die Bewegung aufhört, die lebendige Kraft also vollständig vernichtet, resp. in Molekularbewegung umgesetzt wird;

b) dafs die Geschwindigkeiten den vor dem Stofse vorhandenen umgekehrt gleich sind, die lebendige Kraft also keine Änderung erfährt.

Das erstere Verhalten pflegt man einem vollkommen unelastischen, das zweite einem vollkommen elastischen Körper zuzuschreiben. Obgleich wir die elastischen festen Körper erst im nächsten Abschnitte behandeln, können wir doch den elastischen Stofs bereits hier erledigen, da seine Theorie — soweit sie sich auf keine tiefer liegenden Grundlagen stützt — mit der Theorie der Elastizität in keinem Zusammenhange steht.

3. Für den Fall des ruhenden Systemschwerpunktes ist die Theorie durch das Obige erledigt. Hat der Schwerpunkt selbst eine geradlinige Bewegung, so läfst sich das Problem infolge der Relativität der Bewegung auf das Vorhergehende zurückführen. Behalten wir die früheren Bezeichnungen bei und sind v_1 und v_2, resp. v_1' und v_2' die Geschwindigkeiten vor, resp. nach dem Stofse beider Körper, so haben wir als Ort des Schwerpunktes

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

und als Geschwindigkeit desselben

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \tag{3}$$

Bei unelastischen Körpern werden die relativen Geschwindigkeiten gegen den Schwerpunkt $v_1 - v$ und $v_2 - v$ annulliert, so dafs beide Körper nach dem Stofse sich in gegenseitiger Berührung mit der Geschwindigkeit (3) weiter bewegen. Der stattfindende Verlust an lebendiger Kraft beträgt

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{2}(m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2) - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 \\ &= \frac{1}{2}\frac{m_2^2 v_1^2 + m_1^2 v_2^2 - 2 m_1 m_2 v_1 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2}\frac{(m_2 v_1 - m_1 v_2)^2}{m_1 + m_2}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

4. Beim elastischen Stofse verwandeln sich die relativen Geschwindigkeiten gegen den Schwerpunkt $v_1 - v$ und $v_2 - v$ in ihr Gegenteil $v - v_1$ und $v - v_2$, so dafs

$$\left\{\begin{aligned} v_1' &= v + v - v_1 = \frac{(m_1 - m_2) v_1 + 2 m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \\ v_2' &= v + v - v_2 = \frac{(m_2 - m_1) v_2 + 2 m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right. \tag{5}$$

wird. Der Verlust an lebendiger Kraft

$$\frac{1}{2}[m_1 (v_1^2 - v_1'^2) + m_2 (v_2^2 - v_2'^2)]$$

ist, wie leicht nachzurechnen, dem Ausgang der Untersuchung entsprechend, gleich Null.

5. Der Fall des schiefen Stofses, bei welchem die Kugelmittelpunkte sich nicht in derselben Geraden bewegen, ist leicht auf den vorigen zurückzuführen. Im Momente des Zusammenstofses lassen sich die Geschwindigkeiten beider Kugeln in je zwei Komponenten zerlegen, von denen das eine Paar in die Zentrale beider Kugeln, das andere in die Richtung der gemeinsamen Tangentialebene fällt. Die ersteren Komponenten erleiden die im Vorigen erörterte Umwandlung, während die letzteren ungeändert bleiben, falls das Vorhandensein von Reibung nicht angenommen wird. Die Zusammensetzung der neuen Komponenten liefert die resultierende Bewegung nach dem Stofse.

§ 64.

Gleichgewicht eines unausdehnbaren Fadens.

1. Wir schliefsen hier die Untersuchung eines Systems an, welches in mancher Hinsicht mit dem starren Systeme verwandt ist. Es sei ein unendlich dünner, absolut biegsamer, aber nicht ausdehnbarer Faden vorgelegt, auf dessen einzelne Punkte gegebene Kräfte wirken; für die Endpunkte können besondere Bedingungen gegeben sein. Die Gleichgewichtsbedingungen für dieses System sollen aufgestellt werden.

Es ist keineswegs zulässig, auf dieses System ohne weiteres das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten anzuwenden. Ändert sich die Wirkung der Kraft von einem Punkte des Fadens zum andern stetig, so wird derselbe keine Ecken bilden und die Bedingung wird in die Form gekleidet werden können, dafs jedes Fadenelement ds mit der Zeit unveränderlich ist; alsdann ist die Bedingung durch eine Gleichung gegeben und das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten kann zur Anwendung gebracht werden. Findet aber jene stetige Änderung der Kraft nicht statt, so werden Ecken gebildet; an Stelle jener Gleichung tritt eine Ungleichheit, welche besagt, dafs ds einen Maximalwert nicht überschreiten kann. Wirken nur auf einzelne Punkte des Fadens Kräfte ein, so bildet das Fadenstück zwischen zwei solchen Punkten eine gerade Linie (Seilpolygon). Wir wollen diesen Fall hier nicht weiter verfolgen und annehmen, dafs die Kräfte auf alle Punkte des Fadens einwirken und zwar von Punkt zu Punkt sich stetig ändernd.

2. Unter der letzteren Voraussetzung wird der Faden in der Gleichgewichtslage — falls überhaupt eine solche existiert — eine stetig gekrümmte Kurve bilden, deren Infinitesimalteile als *gerade* angesehen werden können. Jedes solche Teilchen ds wird nicht allein von der Kraft Pds mit den Komponenten Xds, Yds, Zds affiziert*), sondern auch durch die Wirkung der beiden Nachbarteilchen infolge der gegebenen Bedingung. Die letztere Wirkung bezeichnet man als Spannung; am einen Ende von ds mag sie T, am anderen $T+dT=T+\frac{dT}{ds}ds$ sein. Die Kraft Pds sucht das Teilchen ds aus seiner Lage zu entfernen, übt aber keine richtende Wirkung aus. Dagegen nimmt offenbar ds eine solche Lage an, dafs die beiderseitigen Spannungen in die jeweilige Tangentialrichtung fallen**). Die Komponenten von T sind demnach

$$T\frac{dx}{ds},\quad T\frac{dy}{ds},\quad T\frac{dz}{ds},$$

diejenigen von $T+dT$

---

*) Wir machen hiermit die Annahme, dafs die Kräfte auf unendlich kleinem Raume der Masse, die im Faden als stetig veränderlich zu denken ist, proportional sind. Diese Annahme wird schon durch die Voraussetzung der Stetigkeit der Kraftänderung notwendig gemacht.

**) Wie dies den Gesetzen in §§ 21 und 23 entspricht.

$$T\frac{dx}{ds} + d\left(T\frac{dx}{ds}\right), \quad T\frac{dy}{ds} + d\left(T\frac{dy}{ds}\right), \quad T\frac{dz}{ds} + d\left(T\frac{dz}{ds}\right).$$

. Nach dem Gesetze von Wirkung und Gegenwirkung sind die Spannungen, welche zwei benachbarte Teilchen aufeinander ausüben, gleich und entgegengesetzt; sie ändern sich längs des Fadens kontinuierlich. Nehmen wir die Richtung des Fadens, nach welcher hin T angreift, als die negative an, so verlangt das Bestehen des Gleichgewichtes die Befriedigung folgender Bedingungen:

$$-T\frac{dx}{ds} + T\frac{dx}{ds} + d\left(T\frac{dx}{ds}\right) + Xds = 0$$

u. s. w.

oder

$$(1)\qquad \begin{cases} Xds + d\left(T\dfrac{dx}{ds}\right) = 0, \\ Yds + d\left(T\dfrac{dy}{ds}\right) = 0, \\ Zds + d\left(T\dfrac{dz}{ds}\right) = 0, \end{cases}$$

oder

$$(2)\qquad \begin{cases} Xds + dT\dfrac{dx}{ds} + Td\dfrac{dx}{ds} = 0, \\ Yds + dT\dfrac{dy}{ds} + Td\dfrac{dy}{ds} = 0, \\ Zds + dT\dfrac{dz}{ds} + Td\dfrac{dz}{ds} = 0. \end{cases}$$

Hierzu treten noch Grenzbedingungen, welche sich auf die beiden Endpunkte des Fadens beziehen.

3. Da

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

also

$$\frac{dx}{ds}d\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d\frac{dz}{ds} = 0$$

ist, so folgt durch Multiplikation der Gleichungen (2) mit $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ und folgende Addition

$$(3)\qquad Xdx + Ydy + Zdz = -dT.$$

Besitzt die Kraft P eine Kräftefunktion U, so daſs

$$(4)\qquad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

ist, so nimmt (3) die einfache Gestalt an

$$(5)\qquad dU = -dT,$$

woraus durch Integration

$$U - U_0 = T_0 - T \tag{6}$$

folgt. Der Unterschied in der Spannung zweier Punkte des Fadens ist also der (negativen) Differenz der Kräftefunktion für beide gleich.

Dieser Satz zeigt eine gewisse Analogie mit dem Satze von der lebendigen Kraft, wie überhaupt das hier behandelte Gleichgewichtsproblem mit den Problemen der freien Bewegung mancherlei Analogien aufweist.

4. Multipliziert man die Gleichungen (2) mit $d\frac{dx}{ds}$, $d\frac{dy}{ds}$, $d\frac{dz}{ds}$ und addiert, so folgt

$$\begin{cases} \left(Xd\frac{dx}{ds} + Yd\frac{dy}{ds} + Zd\frac{dz}{ds}\right) ds \\ \qquad + T\left[\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2\right] = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Nun wird aber der erste Krümmungsradius ϱ einer Kurve durch die Formel

$$\varrho = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2}} \tag{8}$$

dargestellt*), so daſs (7) in

$$Xd\frac{dx}{ds} + Yd\frac{dy}{ds} + Zd\frac{dz}{ds} = -T\frac{ds}{\varrho^2} \tag{9}$$

übergeht.

5. Werden die Gleichungen (2) quadriert und addiert, so folgt unter Beachtung von

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = P^2$$

die Relation

$$P^2 ds^2 + dT^2 + T^2\frac{ds^2}{\varrho^2} + 2dT(Xdx + Ydy + Zdz)$$
$$+ 2Tds\left(Xd\frac{dx}{ds} + Yd\frac{dy}{ds} + Zd\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

oder wegen (3) und (9)

$$\frac{T^2}{\varrho^2} + \left(\frac{dT}{ds}\right)^2 = P^2. \tag{10}$$

6. Denkt man sich den Faden in unendlich kleine, als geradlinig zu betrachtende Teile zerlegt, an deren Endpunkten die Kräfte P angreifen, so leuchtet es ein, daſs je zwei aufeinanderfolgende Teile und die Richtung der zwischen ihnen angreifenden Kraft in dieselbe Ebene fallen. Denn andernfalls hätte die Kraft noch das Bestreben, eine seitliche Ablenkung hervorzurufen, dem die Spannung nicht entgegenwirkt; es könnte also kein Gleichgewicht stattfinden. Die Richtung der in einem Punkte des Fadens angreifenden Kraft fällt daher in

*) Vgl. z. B. Joachimsthal, a. a. O. p. 15.

die Krümmungsebene der Fadenkurve für diesen Punkt. Der Satz läfst sich natürlich auch analytisch ableiten. Wirken auf den Faden, der mit seinen Endpunkten befestigt ist, nur Parallelkräfte ein, so ist die Fadenkurve eine ebene.

7. Wird ein Faden über eine feste Fläche durch Zug an den Endpunkten gespannt, ohne dafs weitere Kräfte auf ihn einwirken, so kann man annehmen, dafs die Fläche Normalkräfte auf ihn ausübt, welche seine Lage mitbestimmen. Hieraus folgt, dafs die Flächennormalen, welche in Punkten der Fadenkurve errichtet werden, in die jeweilige Krümmungsebene der letzteren fallen, d. h. dafs die Fadenkurve eine geodätische Linie der Fläche ist. Nach der Definition der geodätischen Linien ist dies auch unmittelbar einleuchtend.

8. Wird ein schwerer, homogener, unausdehnbarer, biegsamer Faden an seinen beiden Enden befestigt, so bildet er infolge der Schwerkraft im Gleichgewichtszustande eine Kurve, welche als Kettenlinie bezeichnet wird. Nach 6. mufs dieselbe eben sein. Denkt man sich statt des einen Endpunktes einen beliebigen anderen Punkt der Kurve festgehalten, so erleidet das Fadenstück von demselben bis zum anderen Endpunkte keine Lagenänderung. Man erkennt hieraus, dafs dieselbe Kurve entsteht, mögen die Endpunkte in gleicher oder verschiedener Höhe liegen. In ähnlicher Weise erkennt man leicht, dafs alle Kettenlinien ähnlich sind, was übrigens auch aus der folgenden Rechnung hervorgeht.

Die positive x-Achse sei vertikal nach oben gerichtet und die Fadenkurve falle in die xy-Ebene. Es ist dann, wenn die gleichgültige Dichtigkeit des Fadens der Einheit gleichgesetzt wird,

$$X = -g, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

und aus den Gleichungen (2) wird

$$(11) \qquad \begin{cases} g\,ds = dT\,\dfrac{dx}{ds} + T d\,\dfrac{dx}{ds}, \\ 0 = dT\,\dfrac{dy}{ds} + T d\,\dfrac{dy}{ds}. \end{cases}$$

Da ferner

$$(12) \qquad U = -gx$$

ist, so folgt aus (5)

$$(13) \qquad dT = g\,dx$$

und aus (6)

$$(14) \qquad T - T_0 = g\,(x - x_0).$$

Die Unterschiede in der Spannung zweier Fadenteile sind also ihrem Höhenunterschiede proportional; mit der Höhe nimmt die Spannung zu.

Da die rechten Seiten von (11) vollständige Differentiale sind, so ist je eine Integration unmittelbar ausführbar; es folgt

$$(15)\qquad \begin{cases} T\dfrac{dx}{ds} = gs + c, \\ T\dfrac{dy}{ds} = c_1, \end{cases}$$

worin c und c_1 Konstanten bedeuten. Die Elimination von T liefert

$$(16)\qquad \frac{dx}{dy} = \frac{gs}{c_1} + \frac{c}{c_1} = \varepsilon s + \frac{c}{c_1},$$

worin ε eine neue willkürliche Konstante ist.

Wir differentiieren (16) nach y und erhalten

$$(17)\qquad \frac{d^2x}{dy^2} = \varepsilon\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Substituieren wir

$$p = \frac{dx}{dy},$$

so liefert die Gleichung

$$\frac{dp}{dy} = \varepsilon\sqrt{1 + p^2}$$

durch Integration

$$\varepsilon y + \varepsilon_1 = \log\left(p + \sqrt{1 + p^2}\right)$$

oder

$$(18)\qquad e^{\varepsilon y + \varepsilon_1} = p + \sqrt{1 + p^2}$$

oder

$$(19)\qquad p = \frac{dx}{dy} = \frac{e^{\varepsilon y + \varepsilon_1} - e^{-\varepsilon y - \varepsilon_1}}{2}.$$

Nochmalige Integration führt zu der Gleichung der Kettenlinie:

$$(20)\qquad x = \frac{e^{\varepsilon y + \varepsilon_1} + e^{-\varepsilon y - \varepsilon_1}}{2\varepsilon} + C.$$

Die Konstanten ε, ε_1, C können durch Festsetzung der Länge l des Fadens und der Lage der beiden festen Endpunkte bestimmt werden, was mit Hilfe von (16) auf eine transzendente Gleichung führt.

Um die Gleichung zu vereinfachen, wollen wir den tiefsten Punkt der Kurve zum Nullpunkte des Koordinatensystems wählen. Es mufs dann zunächst für $x = 0$ auch $y = 0$ werden, woraus

$$(21)\qquad C = -\frac{e^{\varepsilon_1} + e^{-\varepsilon_1}}{2\varepsilon}$$

folgt. Ferner mufs für $y = 0$ auch $\dfrac{dx}{dy} = 0$ werden, was nach (19) die Bedingung

$$e^{\varepsilon_1} = 1,$$

also

$$\varepsilon_1 = 0$$

liefert. Hiernach geht (20) über in

$$(22)\qquad x = \frac{e^{\varepsilon y} + e^{-\varepsilon y} - 2}{2\varepsilon},$$

eine Gleichung, die durch Verlegung des Nullpunktes in vertikaler Richtung um $\frac{1}{\varepsilon}$ nach unten in

$$x = \frac{e^{\varepsilon y} + e^{-\varepsilon y}}{2\varepsilon} \tag{23}$$

transformiert werden kann.

Die Kurve ist gegen die x-Achse symmetrisch. Da ihre Gleichung nur von einer Konstanten ε abhängt, die mit x und y multipliziert ist, so sind alle Kettenlinien ähnlich. Die Kettenlinie sieht einer Parabel nicht unähnlich, wie durch Reihenentwicklung der rechten Seite von (22) bei Vernachlässigung höherer Glieder nachweisbar ist, und sie wurde von Galilei für diese Kurve genommen. Jac. Bernoulli löste zuerst das Problem der Kettenlinie in exakter Weise.

Sechster Abschnitt.

Mechanik der elastisch festen Körper.

§ 65.

Die homogene Deformation.

1. Der Mechanik aller derjenigen Körper, deren Punkte keine unveränderlich feste Lage gegeneinander haben, schicken wir wieder eine rein geometrische Untersuchung über die Bewegung solcher Systeme vorher. Man bezeichnet eine Änderung in der gegenseitigen Lage der Punkte eines Systems im Gegensatz zu einer Ortsveränderung des ganzen, unveränderten Systems als eine Deformation desselben. Wir wollen zunächst eine ganz spezielle Änderung des Systems betrachten und auf diese dann eine sehr allgemeine Untersuchung basieren.

2. Es sei ein beliebiges räumliches Punktesystem vorgelegt, welches unbegrenzt gedacht werden kann. Ein Punkt desselben im Anfangszustande habe in einem willkürlichen rechtwinkligen Koordinatensysteme die Koordinaten x, y, z, nach Ausführung einer Bewegung die Koordinaten ξ, η, ζ. Wir untersuchen nun die Änderung, welche das System durch diese Bewegung erfährt, falls die alten und neuen Koordinaten der Systempunkte durch Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a + a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta, \\ y = b + b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta, \\ z = c + c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta \end{cases}$$

verbunden sind; die Koeffizienten derselben sollen keinerlei Bedingungen unterworfen sein, aufser dafs sie als endlich vorausgesetzt werden. Die hierdurch hervorgerufene Deformation des Systems wollen wir mit Thomson und Tait als eine homogene bezeichnen.

Irgend eine algebraische Fläche des ursprünglichen Systems S wird in dem deformierten Systeme Σ noch eine algebraische Fläche desselben Grades sein, da die lineare Transformation (1) keine Gradänderung nach sich zieht. Einer Ebene von S entspricht insbesondere eine Ebene von Σ und daher einer Geraden in S, der Durchschnittslinie zweier Ebenen, auch eine Gerade in Σ. Man nennt bekanntlich zwei räumliche Systeme,

welche einander so zugeordnet sind, dafs jedem Punkte, jeder Geraden und jeder Ebene des einen resp. ein Punkt, eine Gerade und eine Ebene des anderen entspricht, kollinear. S und Σ sind kollineare Systeme; doch stellen die Gleichungen (1) keineswegs die allgemeinste kollineare Zuordnung dar*).

Offenbar entspricht einem im Endlichen gelegenen Punkte von S ein ebensolcher in Σ, einem unendlich fernen Punkte von S ein unendlich ferner Punkt in Σ und umgekehrt, wie aus (1) unmittelbar hervorgeht. Zwei parallelen Geraden von S, d. h. zwei Geraden, welche sich in einem unendlich fernen Punkte schneiden, müssen daher in Σ zwei Parallele entsprechen. Einer unendlich fernen Geraden von S entspricht eine unendlich ferne Gerade von Σ. Mithin sind zwei parallelen Ebenen von S (zwei Ebenen, welche sich in einer unendlich fernen Geraden schneiden) zwei parallele Ebenen in Σ zugeordnet. Der Abstand der parallelen Geraden und Ebenen sowie ihre Richtung im Raume kann sich jedoch nach der Ortsänderung geändert haben. Man bezeichnet zwei kollineare Systeme, in denen unendlich ferne Punkte wieder unendlich fernen Punkten entsprechen, als affin. Durch die *homogene* Deformation wird also das System S in ein affines Σ verwandelt. Es liefse sich auch zeigen, dafs auf diese Weise die allgemeinste affine Zuordnung hergestellt werden kann, doch ist dies für unsere Untersuchung unnötig.

Die homogene Deformation ist keine blos fingierte; sie kann bei elastischen Körpern mit grofser Annäherung wirklich vorkommen.

3. Durch die homogene Deformation transformiren wir eine Kugel von S in eine Fläche zweiter Ordnung von Σ und zwar, da kein Punkt der im Endlichen gelegenen Kugelfläche ins Unendliche verschoben wird, in ein Ellipsoid. Sehen wir hier, wo es sich nur um die gegenseitige Lagenänderung der Systempunkte handelt, von einer Verschiebung des Nullpunktes von S ab, setzen also einfacher

$$(2)\qquad \begin{cases} x = a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta, \\ y = b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta, \\ z = c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta, \end{cases}$$

so geht die um den Nullpunkt beschriebene Kugelfläche

$$(3)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

von S in das Ellipsoid

$$(4)\qquad (a_1\xi + a_2\eta + a_3\zeta)^2 + (b_1\xi + b_2\eta + b_3\zeta)^2 + (c_1\xi + c_2\eta + c_3\zeta)^2 = r^2$$

von Σ über, welches gleichfalls den Nullpunkt zum Mittelpunkte hat. Dasselbe heifst das der Kugel entsprechende Deformationsellipsoid oder Dilatationsellipsoid.

---

*) Auch wenn die Ausdrücke auf den rechten Seiten von (1) denselben linearen Nenner $d + d_1\xi + d_2\eta + d_3\zeta$ hätten, wäre die Zuordnung eine kollineare.

4. Soll das Ellipsoid (4) wieder eine Kugel mit dem Radius r sein, so mufs

$$(5)\quad \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1, \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0, \\ a_3 a_1 + b_3 b_1 + c_3 c_1 = 0, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 \end{cases}$$

sein, d. h. die Veränderung des Systems darf nur in einer Drehung ohne Deformation bestehen. Die Gleichungen (5) sind nämlich die in § 52, (3) und (4) aufgestellten Bedingungen dafür, dafs die Transformation (2) eine Drehung um den Nullpunkt repräsentiert.

Es existiert also keine homogene Deformation, durch welche eine Änderung in der gegenseitigen Lage der Systempunkte herbeigeführt wird, ohne dafs zugleich eine um den Nullpunkt beschriebene Kugel in ein von ihr verschiedenes Ellipsoid umgewandelt wird.

5. Wendet man mehrmals Transformationen von der Form (2) an, so setzen sie sich zu einer derselben Art zusammen; selbstverständlich trägt auch die Umkehrung von (2) denselben Charakter. Es wird immer möglich sein, eine vorgelegte Transformation (2) aus einer beliebigen andern und einer hierdurch bestimmten dritten zusammenzusetzen. Um diese dritte zu finden, braucht man nur die Umkehrung der zweiten mit der ersten zu kombinieren. Dabei ist wohl darauf zu achten, dafs die Reihenfolge, in welcher zwei Transformationen (2) angewandt werden, im allgemeinen nicht gleichgültig ist.

Wir wollen nun annehmen, dafs das Koordinatensystem so gewählt sei, dafs die Hauptachsen des Deformationsellipsoids mit den Koordinatenachsen zusammenfallen; dann nimmt (4) die einfache Gestalt an

$$(6)\quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1,$$

worin a, b, c die Hälften der Hauptachsen des Ellipsoids sind. Dieses Ellipsoid kann man sich aber durch die Substitution

$$(7)\quad x = \frac{r\xi}{a}, \quad y = \frac{r\eta}{b}, \quad z = \frac{r\zeta}{c}$$

aus einer Kugel (3) hergeleitet denken, wobei die Hauptachsen des Ellipsoids aus denjenigen Durchmessern der Kugel hervorgehen, mit welchen sie der Lage nach zusammenfallen. Die Transformation, welche mit (7) zusammengesetzt werden mufs, um (2) zu erzeugen, kann nur eine Drehung darstellen; denn nach der vorigen Nummer führt nur eine solche eine Kugel in eine andere mit gleichem Halbmesser über.

Es existieren also immer drei aufeinander senkrechte Richtungen im Körper, welche nach der Deformation noch aufeinander senkrecht bleiben; dieselben bilden im Deformationsellipsoid die Hauptachsen (die Hauptdilatationsachsen). Umgekehrt zeigt auch die Transformation (7), dafs, wenn drei aufeinander senkrechte Durchmesser nach der Deformation zueinander senkrecht bleiben*), sie zu Hauptachsen des Ellipsoids werden. Wenn also nicht zwei oder drei dieser Hauptachsen gleich werden, so existieren nur drei Gerade mit der angegebenen Eigenschaft.

Die Transformationsgleichungen (2) enthalten neun willkürliche Konstanten, während in den speziellen Gleichungen, welche eine Drehung darstellen, nur drei unabhängige Konstanten enthalten sind. Die durch (2) repräsentierte Umwandlung kann man sich nun folgendermafsen vorstellen. Zuerst wird der Körper so gedreht, dafs die Geraden, welche Hauptachsen des Deformationsellipsoids werden sollen, mit den Koordinatenachsen zusammenfallen. Hierauf wird die durch (7) repräsentierte Deformation vorgenommen und dann der Körper abermals so gedreht, dafs die Hauptachsen die ihnen zukommende Lage annehmen. Beide Drehungen lassen sich nicht durch eine einzige ersetzen. Die beiden Drehungen hängen von sechs, die eigentliche Deformation hängt nur von drei Konstanten ab.

Der Charakter der Deformation (7) leuchtet unmittelbar ein. Der Körper erfährt in drei aufeinander senkrechten Richtungen (den Koordinatenachsen) Zusammendrückungen, resp. Ausdehnungen, so dafs alle Strecken, welche in diesen Richtungen laufen, resp. in den Verhältnissen

$$a : r, \quad b : r, \quad c : r$$

verlängert oder verkürzt werden. Gerade, welche in diesen Richtungen laufen, erfahren keine Richtungsänderung; alle übrigen ändern bei der Deformation ihre Richtung.

6. Aufser dem besprochenen (ersten) Dilatationsellipsoide führt man noch ein zweites Dilatationsellipsoid ein, dessen Hauptachsen der Richtung nach mit denen des ersten zusammenfallen. Seine Halbachsen sind die geometrischen Mittel zwischen den entsprechenden des ersten Ellipsoids und dem Radius der ursprünglichen Kugel, also gleich

$$\sqrt{ar}, \quad \sqrt{br}, \quad \sqrt{cr};$$

die Gleichung des Ellipsoids lautet demnach

$$\frac{\xi'^2}{ar} + \frac{\eta'^2}{br} + \frac{\zeta'^2}{cr} = 1. \tag{8}$$

Dasselbe wird benutzt, um die Lage des Kugelradius zu bestimmen, welcher durch die Deformation in einen bestimmten Radius des ersten Dilatationsellipsoids übergeht.

---

*) Man braucht sie nur zu Koordinatenachsen zu wählen.

Sind α, β, γ die Richtungskosinus jenes Radius ϱ des Ellipsoids, α', β', γ' die entsprechenden des Kugelradius, so ist

$$(9) \qquad \begin{cases} x = r\alpha', & y = r\beta', & z = r\gamma', \\ \xi = \varrho\alpha, & \eta = \varrho\beta, & \zeta = r\gamma. \end{cases}$$

Mittels (7) folgt weiter

$$(10) \qquad \alpha' = \frac{\xi}{a} = \frac{\varrho\alpha}{a}, \quad \beta' = \frac{\eta}{b} = \frac{\varrho\beta}{b}, \quad \gamma' = \frac{\zeta}{c} = \frac{\varrho\gamma}{c}.$$

Da ferner

$$\frac{\varrho^2\alpha^2}{a^2} + \frac{\varrho^2\beta^2}{b^2} + \frac{\varrho^2\gamma^2}{c^2} = 1,$$

also

$$(11) \qquad \varrho^2 = \frac{1}{\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}}$$

ist, so hat es keine Schwierigkeit, die Gröfsen α', β', γ' durch α, β, γ auszudrücken.

Die Gleichung einer im Punkte ξ', η', ζ' an das zweite Ellipsoid gelegten Tangentialebene, deren laufende Koordinaten ξ'', η'', ζ'' sind, lautet

$$(12) \qquad \frac{\xi'\xi''}{a} + \frac{\eta'\eta''}{b} + \frac{\zeta'\zeta''}{c} = r.$$

Wählen wir den Punkt ξ', η', ζ' des zweiten Ellipsoids so, dafs er auf dem betrachteten Radius des ersten Ellipsoids liegt, so ist (unter Benutzung von (9) und (10))

$$\xi' : \eta' : \zeta' = \xi : \eta : \zeta = \alpha : \beta : \gamma = a\alpha' : b\beta' : c\gamma',$$

so dafs aus (12)

$$(13) \qquad \alpha'\xi'' + \beta'\eta'' + \gamma'\zeta'' = r$$

wird. Dies ist aber die Gleichung einer Ebene, deren Normale die Richtungskosinus α', β', γ' besitzt. Der gesuchte Kugelradius steht also auf dieser Tangentialebene senkrecht.

Hiernach ergiebt sich folgende Konstruktion:

Um den Kugelradius zu finden, welcher in einen bestimmten Radius des ersten Dilatationsellipsoids nach der Deformation (7) übergeht, lege man durch den Schnittpunkt dieses Radius mit dem zweiten Dilatationsellipsoide eine Tangentialebene an letzteres; das vom Mittelpunkte auf diese Ebene gefällte Perpendikel ist der gesuchte Kugelradius. Die umgekehrte Aufgabe läfst sich in analoger Weise lösen.

7. Die Volumänderung, welche ein Teil des deformierten Körpers durch die Transformation (7) erleidet, kann durch Inhaltsvergleichung der ursprünglichen Kugel mit dem daraus hervorgehenden Ellipsoid oder noch einfacher eines Würfels, dessen Kanten $= r$ den Koordinatenachsen parallel sind, mit dem daraus hervorgehenden rechtwinkligen Parallelepipedon ermittelt werden. Es wird im ersten Falle aus

$$\frac{4r^3\pi}{3} \qquad \frac{4abc\pi}{3},$$

im zweiten aus

$$r^3 \qquad abc,$$

so dafs aus der Volumeinheit durch die Deformation

$$\frac{abc}{r^3}$$

wird. Die Gröfse

$$\frac{abc}{r^3} - 1 \tag{14}$$

giebt also die Vergröfserung der Volumeinheit, die sogenannte räumliche Dilatation, an.

8. Wir wollen jetzt noch weiter untersuchen, in welcher Form sich die Richtungskosinus der drei Hauptachsen des ersten Dilatationsellipsoids darstellen, falls die Transformationsgleichungen in der allgemeinen Form (2) vorliegen, die Gleichung des Ellipsoids also in der Form (4) gegeben ist. Zu diesem Zwecke suchen wir die Lage der Hauptachsen des Ellipsoids, dessen Mittelpunktsgleichung

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 + 2D\eta\zeta + 2E\zeta\xi + 2F\xi\eta = r^2 \tag{15}$$

lautet. Ist ϱ irgend ein Radius dieses Ellipsoids und sind α, β, γ die Kosinus seiner Winkel mit den Koordinatenachsen, ist also

$$\xi = \varrho\alpha, \quad \eta = \varrho\beta, \quad \zeta = \varrho\gamma, \tag{15a}$$

so folgt aus (15) durch Einsetzen dieser Gröfsen

$$\frac{r^2}{\varrho^2} = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 + 2D\beta\gamma + 2E\gamma\alpha + 2F\alpha\beta = V. \tag{16}$$

Nehmen wir ϱ zur gröfsten oder kleinsten Hauptachse des Ellipsoids, so ist ϱ ein Maximum oder Minimum, $\frac{r^2}{\varrho^2}$ also ein Minimum oder Maximum. Bilden wir also die Gleichungen, welche die Werte von α, β, γ liefern, für welche die rechte Seite von (16) ein Maximum oder Minimum wird, so werden zwei Lösungsgruppen jener gröfsten und kleinsten Halbachse entsprechen; als dritte Lösungsgruppe ergeben sich die Werte α, β, γ für die mittlere Hauptachse, welche allerdings weder Maximum noch Minimum ist*).

Aus der Beziehung zwischen α, β, γ

$$\gamma^2 = 1 - \alpha^2 - \beta^2 \tag{17}$$

folgt

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\alpha} = -\frac{\alpha}{\gamma}, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial\beta} = -\frac{\beta}{\gamma}. \tag{18}$$

*) Dafs auch die Richtungskosinus der mittleren Hauptachse derselben Relation Genüge leisten, erklärt sich daraus, dafs der Wert von $d\varrho$ beim Durchgang von ϱ durch diese Achse in beliebiger Drehungsrichtung verschwindet.

Daher müssen wir die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} = \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \frac{\alpha}{\gamma}\frac{\partial V}{\partial \gamma} = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} - \frac{\beta}{\gamma}\frac{\partial V}{\partial \gamma} = 0$$

befriedigen, die zusammen auch in die Form

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial V}{\partial \gamma} \tag{19}$$

gesetzt werden können. Die wirkliche Ausführung der Differentiation liefert

$$\frac{A\alpha + F\beta + E\gamma}{\alpha} = \frac{F\alpha + B\beta + D\gamma}{\beta} = \frac{E\alpha + D\beta + C\gamma}{\gamma}. \tag{20}$$

Aus (17) und (20) lassen sich die Werte α, β, γ berechnen, welche den drei Hauptachsen zukommen.

Für A, B, C, D, E, F sind die betreffenden Gröfsen aus (4) einzusetzen, um die allgemeine Untersuchung auf unseren Fall anzuwenden. Wir finden so

$$\tag{21} \left\{ \begin{aligned} &\frac{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)\alpha+(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)\beta+(a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1)\gamma}{\alpha}\\ =&\frac{(a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2)\alpha+(a_2^2+b_2^2+c_2^2)\beta+(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)\gamma}{\beta}\\ =&\frac{(a_3a_1+b_3b_1+c_3c_1)\alpha+(a_2a_3+b_2b_3+c_2c_3)\beta+(a_3^2+b_3^2+c_3^2)\gamma}{\gamma}. \end{aligned} \right.$$

Dafs den Gleichungen (17) und (21) thatsächlich nur drei Lösungspaare zukommen, läfst sich auch ohne Durchführung der Rechnung aus der Natur der Sache schliefsen.

9. Diese Gleichungen vereinfachen sich wesentlich, wenn die Transformation (2) lediglich eine Deformation ohne Drehung der Hauptachsen darstellt. Man erhält die allgemeinsten reinen Deformationsgleichungen, wenn man in (7) eine Transformation des Koordinatensystems vornimmt. Wir setzen daher in (7) an Stelle von x, ξ u. s. w.

$$\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \quad \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta \quad \text{u. s. w.,}$$

worin α_1 u. s. w. ihre frühere Bedeutung (§ 52) haben. Dies giebt die Gleichungen

$$\tag{22} \left\{ \begin{aligned} \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z &= \frac{r}{a}(\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta),\\ \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z &= \frac{r}{b}(\beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta),\\ \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z &= \frac{r}{c}(\gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta). \end{aligned} \right.$$

Die Berechnung von x, y, z aus diesen Gleichungen ist leicht aus-

zuführen, indem man resp. mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ multipliziert und addiert. Man findet

$$x = \frac{r\alpha_1}{a}(\alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta) + \frac{r\beta_1}{b}(\beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta) + \frac{r\gamma_1}{c}(\gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta)$$

u. s. w.

oder

$$(23)\quad \begin{cases} x = r\xi\left(\frac{\alpha_1^2}{a} + \frac{\beta_1^2}{b} + \frac{\gamma_1^2}{c}\right) + r\eta\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{a} + \frac{\beta_1\beta_2}{b} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c}\right) \\ \qquad + r\zeta\left(\frac{\alpha_3\alpha_1}{a} + \frac{\beta_3\beta_1}{b} + \frac{\gamma_3\gamma_1}{c}\right), \\ y = r\xi\left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{a} + \frac{\beta_1\beta_2}{b} + \frac{\gamma_1\gamma_2}{c}\right) + r\eta\left(\frac{\alpha_2^2}{a} + \frac{\beta_2^2}{b} + \frac{\gamma_2^2}{c}\right) \\ \qquad + r\zeta\left(\frac{\alpha_2\alpha_3}{a} + \frac{\beta_2\beta_3}{b} + \frac{\gamma_2\gamma_3}{c}\right), \\ z = r\xi\left(\frac{\alpha_3\alpha_1}{a} + \frac{\beta_3\beta_1}{b} + \frac{\gamma_3\gamma_1}{c}\right) + r\eta\left(\frac{\alpha_2\alpha_3}{a} + \frac{\beta_2\beta_3}{b} + \frac{\gamma_2\gamma_3}{c}\right) \\ \qquad + r\zeta\left(\frac{\alpha_3^2}{a} + \frac{\beta_3^2}{b} + \frac{\gamma_3^2}{c}\right). \end{cases}$$

Vergleicht man diese Transformationsgleichungen mit den Gleichungen (2), so ergiebt sich, dafs letztere, um eine reine Deformation ohne Drehung darzustellen, den Bedingungen

$$(24)\qquad a_2 = b_1, \quad b_3 = c_2, \quad a_3 = c_1$$

entsprechen müssen. Dies ist aber auch ausreichend; denn die Gleichungen (21) enthalten dann noch sechs willkürliche Gröfsen, ebenso wie die Gleichungen (23), in welchen a, b, c und drei der Richtungskosinus willkürlich sind.

10. Wir behaupten nun, dafs bei Voraussetzung von (24) die Gleichungen (21) durch die einfacheren

$$(25)\qquad \frac{a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma}{\alpha} = \frac{b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma}{\beta} = \frac{c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma}{\gamma}$$

ersetzt werden können. Statt (21) kann man nämlich zunächst schreiben

$$(26)\quad \begin{cases} \frac{a_1(a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma) + b_1(b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma) + c_1(c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma)}{\alpha} \\ = \frac{a_2(a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma) + b_2(b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma) + c_2(c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma)}{\beta} \\ = \frac{a_3(a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma) + b_3(b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma) + c_3(c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma)}{\gamma}. \end{cases}$$

Da es in diesen Gleichungen nur auf die Verhältnisse

$$(a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma) : (b_1\alpha + b_2\beta + b_3\gamma) : (c_1\alpha + c_2\beta + c_3\gamma)$$

ankommt, welche unter Voraussetzung von (25)

$$\alpha : \beta : \gamma$$

sind, so wollen wir jene Klammern durch die letzteren Gröſsen ersetzen; dann geht aber bei Beachtung von (24) einfach (26) in (25) über. Da ferner (25) und (21) in Bezug auf α, β, γ dieselbe Form haben, so folgt hieraus die vollständige Äquivalenz dieser Gleichungspaare.

§ 66.

Die allgemeine infinitesimale Deformation.

1. Finden in einem Körper Deformationen statt, die sich mit der Lage des Punktes im Körper stetig ändern, im übrigen aber ganz willkürlich sind, so lassen sich über diese ganz allgemeine Sätze aussprechen, welche mit denen über stetige Flächen vollkommen analog sind. Gerade so wie eine Ebene, welche zu einer Tangentialebene einer solchen Fläche parallel und ihr unendlich benachbart ist, aus der Fläche einen Kegelschnitt ausschneidet, so wird auch bei einer Deformation der angegebenen Art eine Kugel von unendlicher Kleinheit in ein Ellipsoid transformiert. Insbesondere haben wir Deformationen ins Auge zu fassen, bei denen benachbarte Punkte nur sehr kleine relative Verschiebungen erfahren (infinitesimale Deformationen).

Seien x, y, z die Koordinaten eines bestimmten Punktes des Körpers vor, $x + u$, $y + v$, $z + w$ diejenigen nach der Deformation, so daſs u, v, w die Komponenten der Änderung darstellen; u, v, w mögen stetige Funktionen von x, y, z sein. Ferner sei $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ ein Punkt in unendlicher Nähe von x, y, z; die Verschiebung, welche er durch die Deformation erleidet, möge durch die Komponenten $u + \Delta u$, $v + \Delta v$, $w + \Delta w$ dargestellt sein. Wenn sich nun die partiellen Differentialquotienten, wie $\frac{\partial u}{\partial x}$ u. s. w., auf die Änderung beziehen, welche u u. s. w. erleiden, wenn man auf der x-Achse u. s. w. von einem Punkte zum andern geht, so wird man infolge der stetigen Änderung der Verschiebungen mit den Koordinaten folgende Entwicklung nach dem Taylor'schen Satze vornehmen können:

$$u + \Delta u = u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \cdots$$

u. s. w.

Wegen der vorausgesetzten Kleinheit von Δx, Δy, Δz dürfen wir die höheren Potenzen dieser Gröſsen vernachlässigen und schreiben

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z, \\ \Delta v = \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z, \\ \Delta w = \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z. \end{cases}$$

Wir wollen nun nicht die absoluten, im allgemeinen endlichen Verschiebungen eines Punktes betrachten, sondern nur die relativen

Verschiebungen benachbarter Punkte gegeneinander. Zu diesem Zwecke denken wir uns jetzt den Punkt x, y, z als festliegend und zum Nullpunkte eines neuen Koordinatensystems gemacht, dessen Achsen den alten parallel sind. Die Koordinaten des früheren Punktes $x + \varDelta x$, $y + \varDelta y$, $z + \varDelta z$ sind jetzt $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$, während ihm nach der Verschiebung (bei der u, v, w in Abzug gebracht werden) die Koordinaten

$$(2)\qquad \begin{cases} \varDelta\xi = \varDelta x + \varDelta u = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\varDelta x + \frac{\partial u}{\partial y}\varDelta y + \frac{\partial u}{\partial z}\varDelta z, \\ \varDelta\eta = \varDelta y + \varDelta v = \frac{\partial v}{\partial x}\varDelta x + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\varDelta y + \frac{\partial v}{\partial z}\varDelta z, \\ \varDelta\zeta = \varDelta z + \varDelta w = \frac{\partial w}{\partial x}\varDelta x + \frac{\partial w}{\partial y}\varDelta y + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\varDelta z \end{cases}$$

zukommen.

Die neuen Koordinaten drücken sich also durch die alten linear aus, und ebenso die alten durch die neuen. Wir haben daher auf einem unendlich kleinen Raume dieselben Beziehungen, welche bei der homogenen Deformation für den ganzen Körper gelten; wir können also die Untersuchungen von § 65 unmittelbar auf die Änderungen anwenden, welche ein unendlich kleiner Teil des Körpers durch eine beliebige stetige Deformation erleidet.

2. Denken wir uns um den Punkt x, y, z im ursprünglichen Zustande eine unendlich kleine Kugel beschrieben, so geht dieselbe durch die Deformation in ein unendlich kleines Ellipsoid, das erste Dilatationsellipsoid, über. Alle Sätze, welche wir über dieses und das zweite Dilatationsellipsoid dort aussprachen, kommen hier zur Anwendung. Nur ein Punkt verlangt eine weitere Untersuchung; wir können hier nämlich leichter als im allgemeinen Falle die Drehung absondern, welche die drei Geraden, die im Ellipsoide zu den Hauptachsen werden, erfahren haben, und so in den Formeln allein die Ausdrücke für die eigentliche Deformation übrig lassen.

Wenn die relativen Verschiebungen auch gegen die Dimensionen des betrachteten Körperteilchens noch verschwindend klein sind, so wird auch diese Drehung gegen $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$ infinitesimal sein. Nach den Untersuchungen von §§ 51 und 52 kann diese Drehung des Teilchens durch drei Drehungskomponenten nach den Koordinatenachsen, deren Gröfse man durch Projektion der Gesamtdrehung auf diese Achsen erhält, dargestellt werden. Bildet die Drehungsachse also mit den Koordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν und ist ε der unendlich kleine Drehungswinkel, so sind jene Drehungskomponenten

$$(3)\qquad \varepsilon\cos\lambda, \quad \varepsilon\cos\mu, \quad \varepsilon\cos\nu.$$

Die Komponenten der Lagenänderung, welche der Punkt $x + \varDelta x$, $y + \varDelta y$, $z + \varDelta z$ durch diese Drehung erleidet, wollen wir mit $\varDelta\xi_1$, $\varDelta\eta_1$, $\varDelta\zeta_1$ bezeichnen; nach § 52, (13) u. s. w. sind dieselben

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta\xi_1 = -\,\varepsilon\,(\Delta y\cos\nu - \Delta z\cos\mu), \\ \Delta\eta_1 = -\,\varepsilon\,(\Delta z\cos\lambda - \Delta x\cos\nu), \\ \Delta\zeta_1 = -\,\varepsilon\,(\Delta x\cos\mu - \Delta y\cos\lambda). \end{cases}$$

Man kann hiernach eine in (2) enthaltene Drehung dadurch beseitigen, dafs man Ausdrücke von der Form (4) auf den rechten Seiten subtrahiert. Wir können aber (2) in die Form setzen

$$(5)\qquad \begin{cases} \Delta\xi = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\Delta y \\ \qquad + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\Delta z, \\ \Delta\eta = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\Delta x + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y \\ \qquad + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\Delta z, \\ \Delta\zeta = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]\Delta x \\ \qquad + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\Delta y + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Delta z \end{cases}$$

und überblicken dann leicht, dafs die Gröfsen

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta\xi_1 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y - \left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Delta z\right], \\ \Delta\eta_1 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\Delta z - \left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x\right], \\ \Delta\zeta_1 = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Delta x - \left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\Delta y\right] \end{cases}$$

in die Ausdrücke (4) übergehen, wenn man

$$(7)\qquad \begin{cases} \varepsilon\cos\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right), \\ \varepsilon\cos\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right), \\ \varepsilon\cos\nu = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{cases}$$

setzt, was möglich ist.

Lassen wir demnach in (5) auf den rechten Seiten die Gröfsen (6) weg, so drücken sie noch dieselbe Deformation aus, das Resultat ist nur um eine Drehung vom Früheren verschieden. Wir erhalten so die neuen Verrückungen $\Delta\xi'$, $\Delta\eta'$, $\Delta\zeta'$

$$(8)\qquad \begin{cases} \Delta\xi' = \left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Delta z, \\ \Delta\eta' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\Delta x + \left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\Delta z, \\ \Delta\zeta' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\Delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\Delta y + \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Delta z. \end{cases}$$

Diese neuen Transformationsgleichungen befriedigen die Bedingung (24) in § 65; eine Drehung der Hauptachsen findet also jetzt nicht mehr statt. Die Gleichungen (8) stellen also dieselbe Deformation wie die ursprünglichen Gleichungen (2) dar, jedoch befreit von einer Drehung der Hauptachsen.

3. Sind die Koordinatenachsen so gewählt, dafs sie mit den Hauptachsen des Dilatationsellipsoids zusammenfallen, so reduzieren sich die Gleichungen (5) bei nicht vorhandener Drehung auf (vgl. § 65, (7))

$$(9)\qquad \begin{cases} \Delta\xi = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Delta x, \\ \Delta\eta = \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \Delta y, \\ \Delta\zeta = \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \Delta z. \end{cases}$$

Es ist daher für dieses Koordinatensystem

$$(10)\qquad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Die räumliche Dilatation σ der Umgebung des Punktes x, y, z stellt sich nach § 65, (14) und (7) in diesem Falle durch

$$\sigma = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) - 1$$

dar. Da aber $\frac{\partial u}{\partial x}$ u. s. w., wenn u, v, w als unendlich klein angenommen werden, ebenfalls unendlich kleine Gröfsen sind, so brauchen wir sie dann nur in der ersten Dimension zu berücksichtigen; die Gleichung geht für infinitesimale Deformationen in den einfachen Ausdruck*)

$$(11)\qquad \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

über.

Aber auch wenn die Koordinatenachsen nicht mit den Hauptachsen des Dilatationsellipsoids zusammenfallen, drückt (11) die räumliche Dilatation aus. Um dies nachzuweisen, transformieren wir das Koordinatensystem durch eine beliebige Drehung um den Nullpunkt. Wir setzen also bei bekannter Bezeichnungsweise

$$(12)\qquad \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z', \end{cases}$$

also

$$(13)\qquad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z \end{cases}$$

und ebenso

---

*) σ ist eine reine Zahl.

$$(14)\qquad \begin{cases} u = \alpha_1 u' + \alpha_2 v' + \alpha_3 w', \\ v = \beta_1 u' + \beta_2 v' + \beta_3 w', \\ w = \gamma_1 u' + \gamma_2 v' + \gamma_3 w', \end{cases}$$
u. s. w.

Dabei wollen wir annehmen, dafs die Achsen der x', y', z' mit den Achsen des Hauptdilatationsellipsoids zusammenfallen.

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \alpha_1 \frac{\partial u'}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial v'}{\partial x} + \alpha_3 \frac{\partial w'}{\partial x} \\ &= \alpha_1 \left[\frac{\partial u'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial x}\right] + \cdots \\ &= \alpha_1 \left(\alpha_1 \frac{\partial u'}{\partial x'} + \alpha_2 \frac{\partial u'}{\partial y'} + \alpha_3 \frac{\partial u'}{\partial z'}\right) \\ &+ \alpha_2 \left(\alpha_1 \frac{\partial v'}{\partial x'} + \alpha_2 \frac{\partial v'}{\partial y'} + \alpha_3 \frac{\partial v'}{\partial z'}\right) \\ &+ \alpha_3 \left(\alpha_1 \frac{\partial w'}{\partial x'} + \alpha_2 \frac{\partial w'}{\partial y'} + \alpha_3 \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) \end{aligned}$$
u. s. w.

oder mit Berücksichtigung von (10)

$$(15)\qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha_1^2 \frac{\partial u'}{\partial x'} + \alpha_2^2 \frac{\partial v'}{\partial y'} + \alpha_3^2 \frac{\partial w'}{\partial z'}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \beta_1^2 \frac{\partial u'}{\partial x'} + \beta_2^2 \frac{\partial v'}{\partial y'} + \beta_3^2 \frac{\partial w'}{\partial z'}, \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \gamma_1^2 \frac{\partial u'}{\partial x'} + \gamma_2^2 \frac{\partial v'}{\partial y'} + \gamma_3^2 \frac{\partial w'}{\partial z'}. \end{cases}$$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man

$$(16)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}.$$

Der Ausdruck (11) für die räumliche Dilatation ist also von der Lage der Koordinatenachsen zu den Hauptachsen des Ellipsoids unabhängig.

4. Es ist auch ohne weitere analytische Begründung einleuchtend, dafs durch eine homogene Deformation ein Punkt der Oberfläche eines beliebig abgegrenzten Körperteils nicht aus der Oberfläche entfernt wird. Da jede stetige Deformation in den kleinsten Teilen als homogen anzusehen ist, so wird auch nach ihr jedes Teilchen einer Oberfläche auf dieser verbleiben. Diese Betrachtung gilt insbesondere auch für die Oberfläche des ganzen Körpers.

Wenn im allgemeinen die Deformation stetig ist, längs einer zusammenhängenden Fläche jedoch nicht, so pflegt man letztere als die Grenzfläche zweier verschiedenen Körper zu betrachten. Nimmt man an, dafs zwei Körper auf einer Fläche fortwährend in Kontakt bleiben, sonst sich aber willkürlich bewegen, so wird die Verschiebungs-

komponente an der Grenzfläche, welche in die Normale der letzteren fällt, für aneinanderstofsende Teilchen beider Körper die gleiche sein müssen; die Komponenten, welche in die Tangentialebene der Grenzfläche fallen, sind voneinander unabhängig. Sind u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 die Geschwindigkeitskomponenten zweier solchen benachbarten Teilchen beider Körper, genommen nach den Koordinatenachsen, und bezeichnet n die Richtung der Normalen der Grenzfläche nach einem bestimmten der Körper zu, so mufs demnach

$$(17) \qquad \begin{cases} \quad u_1 \cos(n, x) + v_1 \cos(n, y) + w_1 \cos(n, z) \\ = u_2 \cos(n, x) + v_2 \cos(n, y) + w_2 \cos(n, z) \end{cases}$$

sein.

§ 67.

Die Druckkräfte.

1. Die Kräfte, welche wir bisher behandelten, waren meistens derart, dafs ein materieller Punkt auf den anderen eine Fernwirkung ausübte. Eine konsequent durchgeführte atomistische Auffassung der Natur mufs darauf ausgehen, überhaupt alle Bewegungsvorgänge auf solche Kräfte, in Verbindung mit dem Beharrungsgesetze, zurückzuführen. Thatsächlich ist bis jetzt eine solche Theorie noch nicht soweit ausgebildet, dafs sie zur Grundlage der Entwicklung der Bewegungsvorgänge in den verschiedenen Körpern dienen könnte*); auch wird gerade die Fernwirkung von vielen Seiten her entschieden bekämpft. Ohne uns auf Kontroversen dieser Art hier einzulassen, müssen wir uns mit der Erklärung begnügen, dafs zur Zeit eine genügende rein theoretische Entwicklung der Bewegungsvorgänge in den zusammenhängenden Körpern nicht möglich ist. Die Mechanik derselben soll daher unter grundsätzlicher Vermeidung vager und ungenügend fundamentierter Hypothesen auf rein empirischer Grundlage aufgebaut werden. Wir betrachten die Körper so, wie sie uns die Anschauung bietet: als kontinuierlich zusammenhängend und kontinuierlich bewegt. Eine tiefer gehende Entwicklung mufs der Zukunft vorbehalten bleiben.

2. Die einzelnen Teilchen eines zusammenhängenden Körpers stehen erfahrungsmäfsig unter der Wirkung von zwei Arten von Kräften. Die erste Gattung sind die fernwirkenden Kräfte, wie die Schwere, welche die materiellen Punkte angreifen. Aufserdem findet aber eine Einwirkung jedes Teiles des Körpers auf jeden direkt angrenzenden statt. Man bezeichnet die Kräfte, durch welche sich diese Einwirkung ersetzen läfst, als Druckkräfte**). Denkt man sich einen beliebigen, kleinen Teil

---

*) Auch die kinetische Gastheorie giebt noch zu mancherlei Bedenken Veranlassung.

**) Der gewöhnliche Sprachgebrauch begrenzt die Bedeutung dieses Wortes

des Körpers abgegrenzt, so wird angenommen, dafs auf die Oberfläche dieses Teiles von der Umgebung Druckkräfte ausgeübt werden. Die Gröfse eines Druckes erscheint nicht proportional der Masse, auf welchen er ausgeübt wird, sondern der Fläche, auf welche er wirkt.

Als Einheit des Druckes können wir denjenigen Druck definieren, der auf die Flächeneinheit ausgeübt der Einheit der Masse die Einheit der Beschleunigung erteilt. Der Druck stellt sich demnach als der Quotient einer gewöhnlichen Kraft und einer Flächengröfse dar, so dafs seine Dimension

$$l^{-1}\, t^{-2}\, m$$

ist.

Im übrigen werden den Druckkräften dieselben Eigenschaften beigelegt wie den übrigen Kräften. Jedem Druck kommt eine bestimmte Richtung zu. Drucke, welche auf denselben Punkt einer Fläche einwirken, können nach dem Parallelogramm der Kräfte zusammengesetzt und zerlegt werden. Namentlich gilt auch das Gesetz von Wirkung und Gegenwirkung, und zwar für die kleinsten Teile des Körpers.

Bildet ein unendlich kleines Flächenstück einen Teil der Grenze zweier (willkürlich angenommener) Körperteile I und II, so ist der Druck, welcher von I auf II in diesem Flächenstücke ausgeübt wird, dem von II auf I ausgeübten umgekehrt gleich. Man erkennt leicht, dafs im entgegengesetzten Falle durch die inneren Druckkräfte der Schwerpunkt des ganzen Körpers in beschleunigte Bewegung gesetzt werden könnte, was der Erfahrung durchaus entgegenläuft.

3. Die Wirkung der Druckkräfte auf ein Teilchen eines veränderlichen Körpers ist eine doppelte: sie bringen erstens eine Deformation und zweitens eine Verschiebung und Drehung des Teilchens zuwege. Die Art der Deformation hängt von der speziellen Natur des Körpers ab; wir werden sie für die verschiedenen Körper eingehend zu untersuchen haben. Da bei einer stetigen Bewegung diese Deformation innerhalb einer unendlich kurzen Zeit immer infinitesimal ist, so dürfen wir in jedem Momente das Teilchen in Beziehung auf Verschiebung und Drehung wie einen festen Körper behandeln. Dieser zweite Teil der Bewegung wird daher durch sechs Gleichungen bestimmt, von denen drei die Verschiebung des Schwerpunktes und drei die Drehung um denselben festsetzen.

4. Die Druckkraft, welche auf ein infinitesimales Flächenstück der Umgrenzung eines Körperteilchens einwirkt, braucht auf dem Flächenstücke keineswegs senkrecht zu stehen, sie kann vielmehr zu ihm eine beliebige Richtung haben. Die Druckkraft kann dann in eine zur Fläche

---

etwas enger; er geht davon aus, dafs ein Druck das Bestreben habe, einen Körperteil zu komprimieren, während eine umgekehrt wirkende Kraft als Zug bezeichnet wird. Selbstverständlich behandeln wir den Zug durchgehends als einen negativen Druck.

normale Komponente und eine, eventuell weiter zu zerlegende, in die Tangentialebene der Fläche fallende Komponente zerlegt werden; die letztere ist bestrebt, eine seitliche Verschiebung des Flächenteils zuwege zu bringen.

Es seien durch den Punkt x, y, z Flächenelemente gelegt, welche resp. auf der x, y, z-Achse senkrecht stehen. Die Druckkräfte, welche auf diese Flächen wirken, mögen (reduziert auf die Flächeneinheit)

$$P_x, \; P_y, \; P_z$$

sein. Jede dieser drei Kräfte möge in drei Komponenten nach den Koordinatenachsen zerlegt werden, welche wir durch

$$\begin{array}{lccc} P_x: & X_x, & Y_x, & Z_x, \\ P_y: & X_y, & Y_y, & Z_y, \\ P_z: & X_z, & Y_z, & Z_z \end{array}$$

bezeichnen. Die Buchstaben X, Y, Z deuten also die Richtung der Komponente, die Buchstaben x, y, z aber die Fläche an, auf welche die Komponente einwirkt. X_x, Y_y, Z_z sind dann normale, die übrigen Komponenten seitliche Druckkräfte. Die Komponenten mögen als positiv gerechnet werden, wenn sie die betreffende Koordinate zu vermindern streben.

5. Unsere nächste Aufgabe ist es, die Beschleunigungen zu untersuchen, welche einem Körperelemente durch die Druckkomponenten erteilt werden. Wenn nicht die ganze Theorie des Druckes hinfällig sein soll, so mufs die Gestalt dieses Elementes gleichgültig sein. Wir nehmen als solches ein unendlich kleines rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel laufen und die Längen dx, dy, dz besitzen und dessen Mittelpunkt der Punkt x, y, z ist. Die sechs Seitenflächen des Parallelepipedons bezeichnen wir mit

$$(+x), \quad (-x), \quad (+y), \quad (-y), \quad (+z), \quad (-z),$$

wobei der eingeklammerte Buchstabe die Koordinatenachse bezeichnet, auf welcher die Fläche senkrecht steht, während das vorgesetzte Zeichen angiebt, ob die Fläche auf der positiven oder negativen Seite von x, y, z, gerechnet in der betreffenden Koordinatenrichtung, gelegen ist.

Wir machen nun die Voraussetzung, dafs die Druckkräfte stetige Funktionen des Ortes sind. Der Druck, welcher z. B. auf $(+x)$ von aufsen her ausgeübt wird, ist dann von demjenigen, welchen das Element selbst in $(-x)$ auf das angrenzende Element ausübt, also vom Negativen desjenigen, welchen das Nachbarelement hier auf das betrachtete ausübt, nur unendlich wenig verschieden. Ferner denken wir uns das Element für einen Zeitmoment unveränderlich und, indem wir noch die Dichtigkeit des Körpers als stetig voraussetzen, wegen seiner Kleinheit als homogen, so dafs sein Schwerpunkt mit seinem Mittelpunkte zusammenfällt; seine Dichtigkeit sei ε. Die Kräfte, welche auf die ein-

zelnen Flächen einwirken, sind dann, da sie durch Multiplikation des betreffenden Druckes mit dem Inhalte des zugehörigen Flächenelementes erhalten werden:

$$\text{für } (+x): \quad \left(X_x + \frac{1}{2}\frac{\partial X_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz, \quad \left(Y_x + \frac{1}{2}\frac{\partial Y_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz,$$

$$\left(Z_x + \frac{1}{2}\frac{\partial Z_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz;$$

$$\text{für } (-x): -\left(X_x - \frac{1}{2}\frac{\partial X_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz, \quad -\left(Y_x - \frac{1}{2}\frac{\partial Y_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz,$$

$$-\left(Z_x + \frac{1}{2}\frac{\partial Z_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz,$$

und analog für die übrigen Flächen.

Die Normaldrucke können wir uns ohne weiteres in den Schwerpunkt verlegt denken. In der Richtung der x-Achse wirkt also hier zunächst die Kraft

$$X_x\,dy\,dz + \frac{1}{2}\frac{\partial X_x}{\partial x}dx\,dy\,dz - X_x\,dy\,dz + \frac{1}{2}\frac{\partial X_x}{\partial x}dx\,dy\,dz$$
$$= \frac{\partial X_x}{\partial x}dx\,dy\,dz,$$

und analoge Kräfte wirken in den beiden andern Koordinatenrichtungen.

Den beiden auf $(+x)$ und $(-x)$ in der y-Richtung wirkenden Kräften setzen wir die Kraft $-\frac{1}{2}\frac{\partial Y_x}{\partial x}dx\,dy\,dz$ zu, die wir durch die doppelte im Schwerpunkte mit entgegengesetzter Richtung angebrachte Kraft kompensieren (nach § 53, 4).

$$\left(Y_x + \frac{1}{2}\frac{\partial Y_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz \quad \text{und} \quad -\left(Y_x - \frac{1}{2}\frac{\partial Y_x}{\partial x}dx\right)dy\,dz$$

werden so ersetzt durch die im Schwerpunkte angreifende Einzelkraft

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x}dx\,dy\,dz,$$

welche der Richtung der positiven y-Achse entgegenwirkt, und das Kräftepaar

$$Y_x\,dy\,dz, \quad -Y_x\,dy\,dz,$$

dessen Hebelarm dx ist und welches daher bei Berücksichtigung der Drehungsrichtung*) das Drehungsmoment

$$-Y_x\,dx\,dy\,dz$$

liefert; die Achse des letzteren ist die z-Achse. Setzt man abkürzungsweise

*) Die Drehung geht nämlich (bei positivem Y_x) von der positiven x-Richtung nach der negativen y-Richtung.

$$d\tau = dx\,dy\,dz \tag{1}$$

und bezeichnet die infolge des Druckes auf den Schwerpunkt einwirkenden Kraftkomponenten mit*)

$$X_1 d\tau, \quad Y_1 d\tau, \quad Z_1 d\tau,$$

die sich ergebenden Drehungsmomente in Bezug auf die x, y, z-Achse mit $M_x d\tau$, $M_y d\tau$, $M_z d\tau$, so erhalten wir durch Summation der einzelnen Bestandteile

$$\left\{\begin{aligned} -X_1 &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ -Y_1 &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ -Z_1 &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} \end{aligned}\right. \tag{2}$$

und, wenn wir beachten, dafs z. B. X_y und Y_x entgegengesetzten Drehungssinn besitzen,

$$\left\{\begin{aligned} M_x &= Y_z - Z_y, \\ M_y &= Z_x - X_z, \\ M_z &= X_y - Y_x. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

6. Nehmen wir an, dafs aufser den Druckkräften auf das Massenteilchen noch eine der Masse proportional wirkende Kraft ausgeübt wird, deren Komponenten**)

$$X\varepsilon d\tau, \quad Y\varepsilon d\tau, \quad Z\varepsilon d\tau$$

sind, so erhalten wir als Bewegungsgleichungen des Punktes x, y, z

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2u}{dt^2} &= \varepsilon X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \varepsilon \frac{d^2v}{dt^2} &= \varepsilon Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \varepsilon \frac{d^2w}{dt^2} &= \varepsilon Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Die linken Seiten dieser Gleichungen sind unter der Voraussetzung gebildet, dafs die Koordinaten eines Punktes, welche ursprünglich x, y, z sind, im Laufe der Zeit $x + u$, $y + v$, $z + w$ werden, worin nur u, v, w, nicht aber x, y, z als mit der Zeit veränderlich anzusehen sind. Wegen

---

*) X_1, Y_1, Z_1 sind daher Quotienten einer Kraft und eines Rauminhaltes, also von der Dimension $l^{-2}t^{-2}m$, was mit der Dimension der Differentialquotienten der Druckkomponenten übereinstimmt, die in l um 1 niedriger als diejenige der Druckkomponenten selbst sein mufs.

**) X, Y, Z sind also die Komponenten der Kraft, welche auf die Masseneinheit ausgeübt werden. Man beachte, dafs X, Y, Z sowie M_x, M_y, M_z in anderer Bedeutung wie früher gebraucht werden.

der vorausgesetzten Kleinheit von u, v, w dürfen wir rechts überall x, y, z statt $x + u$, $y + v$, $z + w$ setzen.

Diese Gleichungen bestimmen bei gegebenen Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten die Bewegung der einzelnen Punkte des veränderlichen Systems vollständig und hiermit die Bewegung des ganzen Systems; die wirkliche Durchführung verlangt nur noch, die Abhängigkeit der Druckkräfte von den sie bestimmenden Faktoren, namentlich auch den Dilatationen festzusetzen. Gerade diese Beziehungen charakterisieren die verschiedenen Arten veränderlicher Körper.

7. Es mufs auffallen, dafs bei den vollständigen Bewegungsgleichungen (4) die Drehungsmomente gar nicht in Betracht kamen; welche Bewandtnis hat es mit denselben? Nehmen wir an, dafs die äufseren Kräfte sich im allgemeinen stetig von Punkt zu Punkt des Körpers ändern und dafs nur in einzelnen Punkten Kräfte angreifen, welche hiervon eine Ausnahme machen, so leuchtet es ein, dafs dieselben im allgemeinen in Bezug auf einzelne infinitesimale Teile des Körpers kein Drehungsmoment hervorrufen können, welches gegen die Momente gemäfs (3) in Betracht käme. Denn in Bezug auf jenes Element können, einzelne Stellen ausgenommen, die äufseren Kräfte als Parallelkräfte angesehen werden, die in Bezug auf den Schwerpunkt kein Drehungsmoment hervorrufen. Die hierbei vernachlässigten Gröfsen sind unendlich klein von höherer Ordnung. Die Drehungsmomente von (3) können daher durch äufsere Kräfte, einzelne Elemente etwa ausgenommen, nicht kompensiert werden. Wenn aber die einzelnen Elemente des Systems Drehungsmomenten ausgesetzt sind, so müssen sie, einzeln betrachtet, in Rotation versetzt werden. Es leuchtet aber ein, dafs ein solches Rotieren der einzelnen Elemente (die immer noch beliebig weiter zerlegt werden können), das bei benachbarten Elementen in demselben Sinne vor sich gehen müfste, mit der Natur eines stetig zusammenhängenden Körpers und einer stetigen Bewegung desselben in unlösbarem Widerspruche steht. Der Körper würde sich in eine unendliche Zahl diskreter Teile auflösen, die infolge ihrer Rotation gegeneinander eine diskontinuierliche Bewegung besäfsen; man überzeugt sich nämlich durch den Augenschein, dafs zwei unendlich benachbarte im gleichen Sinne rotierende Elemente unmöglich in stetigem Konnexe bleiben können. Wir müssen daher bei den wirklich existierenden Körpern die Annahme machen, dafs die Gröfsen (3) identisch verschwinden, d. h. dafs zwischen den seitlichen Druckkräften die wichtige Beziehung

$$(5) \qquad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x$$

besteht. In Worten ausgedrückt lautet dieses Resultat:

Der Wert einer seitlichen Druckkomponente bleibt ungeändert, wenn man ihre Richtung mit der Richtung der Normalen auf der Ebene, auf welche sie wirkt, vertauscht.

8. Wir wollen nun weiter zeigen, dafs man aus den gegebenen Druckkomponenten

(6) $$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z, \quad Y_z = Z_y, \quad Z_x = X_z, \quad X_y = Y_x$$

für einen Punkt x, y, z, welche sich auf Normalebenen zu den Koordinatenachsen beziehen, die Druckkomponenten

(7) $$X_s, \quad Y_s, \quad Z_s$$

für eine beliebige andere, durch denselben Punkt gehende Ebene berechnen kann.

Zu diesem Zwecke denken wir uns (Fig. 12) ein unendlich kleines Tetraeder konstruiert, dessen eine Ecke der Punkt x, y, z ist; die drei Kanten, welche in demselben zusammenstofsen, mögen in der Richtung der positiven x, y, z-Achse laufen und resp. die Länge a, b, c besitzen. Die Flächeninhalte der in x, y, z zusammenstofsenden Tetraederflächen sind

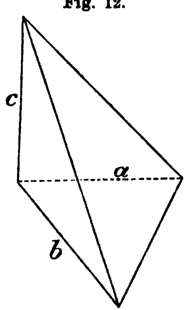


Fig. 12.

(8) $$\tfrac{1}{2}\,bc, \quad \tfrac{1}{2}\,ca, \quad \tfrac{1}{2}\,ab;$$

die vierte Fläche besitze den Flächeninhalt ω. Die von x, y, z auf die letztere Fläche gefällte Normale heifse s; auf diese Fläche mögen sich die Druckkomponenten (7) beziehen, falls sich das Tetraeder, immer sich selbst ähnlich bleibend, in den Punkte x, y, z zusammenzieht. Wegen der schliefslich verschwindenden Kleinheit des Tetraeders brauchen wir hier keine Rücksicht auf etwaige Änderungen der Komponenten für verschiedene Teile desselben zu nehmen; ebenso können wir alle Punkte des Tetraeders mit seinem Schwerpunkte identifizieren.

Sollen die Drucke (6) und (7) äquivalent sein, so brauchen wir nur die Bedingungen dafür aufzustellen, dafs die Drucke (6) und die negativ genommenen Drucke (7), immer bezogen auf die entsprechenden Flächen des Tetraeders, ihre Wirkung gegenseitig aufheben. So erhalten wir z. B. für die Komponenten, welche das Tetraeder in der Richtung der positiven x-Achse zu verschieben streben,

(9) $$-\tfrac{1}{2}\,bc X_x - \tfrac{1}{2}\,ca X_y - \tfrac{1}{2}\,ab X_z + \omega X_s = 0.$$

Da aber die Projektion eines ebenen Flächenstückes auf eine Ebene den Flächeninhalt jenes Stückes, multipliziert mit dem Kosinus des Neigungswinkels beider Ebenen, zum Flächeninhalte hat, so ist

(10) $$\begin{cases} \omega \cos(s, x) = \tfrac{1}{2}\,bc, \\ \omega \cos(s, y) = \tfrac{1}{2}\,ca, \\ \omega \cos(s, z) = \tfrac{1}{2}\,ab, \end{cases}$$

und aus der Gleichung (9) und den beiden analogen wird

(11) $$\begin{cases} X_s = X_x \cos(s, x) + X_y \cos(s, y) + X_z \cos(s, z), \\ Y_s = Y_x \cos(s, x) + Y_y \cos(s, y) + Y_z \cos(s, z), \\ Z_s = Z_x \cos(s, x) + Z_y \cos(s, y) + Z_z \cos(s, z). \end{cases}$$

Diese drei Komponenten lassen sich nach bekannter Regel zu einer einzigen Druckkraft P_s von bestimmter Richtung vereinigen.

9. Denken wir uns durch den Punkt x, y, z beliebig viele Ebenen gelegt, so gehört zu jeder derselben eine Druckkraft P_s von bestimmter Gröfse und bestimmter Richtung; für verschiedene Ebenen ist Gröfse und Richtung von P_s im allgemeinen verschieden. Es wird sich im Laufe der Untersuchung herausstellen, dafs man umgekehrt die Richtung von P_s beliebig annehmen, dann aber ihre Gröfse und die Ebene, auf welche sie wirkt, eindeutig bestimmen kann. Um uns ein klares Bild von der Lage und Gröfse dieser verschiedenen, in demselben Punkte x, y, z angreifenden Druckkräfte zu machen, denken wir uns von x, y, z aus nach allen Richtungen hin Strahlen gezogen und auf diesen Strecken abgetragen, welche der Gröfse der Druckkräfte, die in dieser Richtung wirken, proportional sind. Die Endpunkte dieser Strecken bilden dann eine Fläche, deren Koordinaten wir bestimmen wollen. Wir führen zu diesem Zwecke ein Koordinatensystem ξ, η, ζ ein, welches dem alten parallel ist, dessen Nullpunkt aber der Punkt x, y, z ist.

Ist jetzt ξ, η, ζ der Punkt der gesuchten Oberfläche, durch welchen die Richtungslinie von P_s hindurchgeht, so mufs nach den gemachten Festsetzungen

$$\lambda\xi = X_s, \quad \lambda\eta = Y_s, \quad \lambda\zeta = Z_s \tag{12}$$

sein; den willkürlichen Faktor λ können wir gleich 1 setzen.

Schreiben wir ferner für die Richtungskosinus der Normalen s

$$\cos(s, x) = \alpha, \quad \cos(s, y) = \beta, \quad \cos(s, x) = \gamma,$$

so haben wir nach (11)

$$\begin{cases} \xi = X_x\alpha + X_y\beta + X_z\gamma, \\ \eta = Y_x\alpha + Y_y\beta + Y_z\gamma, \\ \zeta = Z_x\alpha + Z_y\beta + Z_z\gamma. \end{cases} \tag{13}$$

Diese Gleichungen, welche ξ, η, ζ durch α, β, γ ausdrücken, haben wegen (5) denselben Charakter wie die Gleichungen (23), resp. (2) und (24), in § 65. Die Umkehrung von (13) liefert Gleichungen von der Form

$$\begin{cases} \alpha = a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\ \beta = a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\ \gamma = a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta, \end{cases} \tag{14}$$

worin gleichfalls

$$a_{23} = a_{32}, \quad a_{31} = a_{13}, \quad a_{12} = a_{21} \tag{15}$$

ist. Durch direktes Nachrechnen, resp. Bildung der entscheidenden Unterdeterminanten, ist die letzte Beziehung leicht zu bewahrheiten. Setzt man nun in der bekannten Relation zwischen α, β, γ:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \tag{16}$$

die Werte (14) ein, so erhält man für jene Oberfläche die Gleichung

$$(17)\quad \begin{cases}(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta)^2 + (a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta)^2 \\ \qquad\qquad + (a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta)^2 = 1.\end{cases}$$

Die Oberfläche ist ein Ellipsoid, weil nach (11) die Druckkräfte sämtlich endlich sind, wenn dies mit den X_x u. s. w. der Fall ist, kein Radius der Fläche sich also ins Unendliche erstrecken kann. Die Fläche heifst das erste Druckellipsoid.

Wenn also die Druckkräfte in einem Körper sich *stetig* von Punkt zu Punkt ändern, im übrigen aber ganz willkürlich sind, so gruppieren sich die Druckkräfte für denselben Punkt symmetrisch zu drei aufeinander senkrechten Achsen, den Hauptachsen des ersten Druckellipsoids. Für die gröfste und kleinste dieser Achsen ist der Druck ein Maximum und Minimum.

10. Wir untersuchen, wann die Druckrichtung auf ihrer Ebene senkrecht steht. Sei die x-Achse, welche ja ganz beliebig gelegt werden kann, die Richtung des Druckes; die Ebene, auf welche derselbe wirkt, sei die yz-Ebene. Die seitlichen Druckkomponenten, welche auf diese Ebene wirken, müssen dann verschwinden, d. h. es mufs

$$(18)\qquad Y_x = Z_x = 0$$

sein. Die Gleichungen (13) nehmen jetzt die Gestalt an

$$(19)\qquad \begin{cases}\xi = X_x\alpha, \\ \eta = Y_y\beta + Y_z\gamma, \\ \zeta = Z_y\beta + Z_z\gamma.\end{cases}$$

Berechnet man hieraus α, β, γ und setzt sie in (16) ein, so kommt in der so vereinfachten Gleichung (17) ξ nur als Quadrat vor, das Ellipsoid liegt also zu der $\xi\eta$-Ebene symmetrisch, d. h. die ξ-Achse ist eine Hauptachse.

Wir erhalten so das wichtige Resultat:

Die Druckrichtung steht dann und nur dann auf der dem Drucke ausgesetzten Ebene senkrecht, wenn sie in eine Hauptachse des ersten Druckellipsoids fällt.

Machen wir daher die Hauptachsen zu Koordinatenachsen, so wird

$$(20)\qquad Y_z = Z_x = X_y = 0.$$

Hat das Druckellipsoid zwei gleiche Hauptachsen, so haben alle in der Ebene der letzteren gelegenen Druckrichtungen die verlangte Eigenschaft. Wenn das Ellipsoid eine Kugel ist — und nur dann — stehen alle Drucke auf ihren Ebenen senkrecht. Dies giebt das bemerkenswerte, für die Hydromechanik fundamentale Resultat:

Wenn die Drucke in einem Punkte nach allen Richtungen gleich sind, so stehen sie alle auf ihren Ebenen senkrecht, die seitlichen Druckkomponenten verschwinden also durchgehends; und umgekehrt bedingt das allseitige Verschwinden der seit-

lichen Druckkomponenten die Gleichheit des Druckes nach allen Richtungen.

Läſst man die Koordinatenachsen mit den Hauptdruckachsen zusammenfallen, so wird aus (13)

$$(21)\qquad \xi = X_x\alpha, \quad \eta = Y_y\beta, \quad \zeta = Z_z\gamma;$$

ferner folgt durch Vergleich mit (14)

$$(22)\qquad \begin{cases} a_{11} = \dfrac{1}{X_x}, \quad a_{22} = \dfrac{1}{Y_y}, \quad a_{33} = \dfrac{1}{Z_z}, \\ a_{23} = a_{31} = a_{12} = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung (17) nimmt also die Gestalt an:

$$(23)\qquad \frac{\xi^2}{X_x^2} + \frac{\eta^2}{Y_y^2} + \frac{\zeta^2}{Z_z^2} = 1.$$

Die Hauptachsen des Ellipsoids sind, wie selbstverständlich,

$$X_x, \quad Y_y, \quad Z_z.$$

Die Berechnung der Hauptdruckachsen und ihrer Lage im allgemeinen Falle wird nach der Theorie der Flächen zweiter Ordnung ausgeführt; sie verlangt die Lösung einer Gleichung dritten Grades.

11. Die Lage der Ebene, auf welche ein Druck wirkt, ist eindeutig bestimmt, wenn die Richtung des letzteren bekannt ist. Dies ist aus (14) unmittelbar ersichtlich; diese Gleichungen liefern direkt die Richtungswinkel. Um eine geometrische Herleitung der Lage der Ebene zu geben, verfahren wir analog wie bei den entsprechenden Untersuchungen über Dilatationen. Wir konstruieren ein zweites Druckellipsoid, dessen Hauptachsen*) die Quadratwurzeln aus den Gröſsen der Achsen des ersten sind und in der Richtung mit diesen zusammenfallen. Fallen wieder die Koordinatenachsen in diese Hauptachsen, so lautet die Gleichung des zweiten Ellipsoids**)

$$(24)\qquad \frac{\xi'^2}{X_x} + \frac{\eta'^2}{Y_y} + \frac{\zeta'^2}{Z_z} = 1.$$

Legt man an diese Fläche in dem Punkte ξ', η', ζ', welcher in der Druckrichtung liegt, eine Tangentialebene, so ist ihre Gleichung

$$(25)\qquad \frac{\xi'\xi''}{X_x} + \frac{\eta'\eta''}{Y_y} + \frac{\zeta'\zeta''}{Z_z} = 1,$$

worin ξ'', η'', ζ'' die laufenden Koordinaten vorstellen. Weiter ist, wenn ξ, η, ζ den Punkt darstellt, in welchem die Druckrichtung das erste Druckellipsoid schneidet,

$$(26)\qquad \xi' = \mu\xi, \quad \eta' = \mu\eta, \quad \zeta' = \mu\zeta,$$

---

*) Natürlich nur, wenn in (12) $\lambda = 1$ genommen wird; es handelt sich auch hier um die Bestimmung des geometrischen Mittels zwischen zwei linearen Gröſsen. — Die Ungenauigkeit des Ausdrucks Ellipsoid wird weiter unten besprochen.

**) Genaueres über das Vorzeichen der rechten Seite folgt weiter unten.

worin μ so zu bestimmen ist, dafs der Gleichung (24) genüge geschieht. Die Richtungskosinus der Normalen dieser Tangentialebene verhalten sich wie

$$\frac{\xi}{X_x} : \frac{\eta}{Y_y} : \frac{\zeta}{Z_z}$$

und sind daher mit α, β, γ, welche nach (21) dasselbe Verhältnis besitzen, identisch.

Dies giebt folgende Konstruktion der Ebene, auf welche ein Druck von gegebener Richtung in einem gegebenen Punkte wirkt:

Man konstruiere um den gegebenen Punkt das zweite Druckellipsoid, lege an dasselbe in dem Punkte, in welchem es von der Druckrichtung geschnitten wird, eine Tangentialebene und durch den gegebenen Punkt zu dieser eine Parallelebene. Die letztere ist die gesuchte Ebene.

Der Gang der umgekehrten Konstruktion ist ebenfalls leicht zu verfolgen.

12. Die Fläche zweiter Ordnung, welcher wir den Namen „zweites Druckellipsoid" beilegten, verdient denselben nicht immer. Die Druckkräfte X_x, Y_y, Z_z können auch negativ sein; da die Nenner von (24) als Quadratwurzeln von X_x^2, Y_y^2, Z_z^2 zu betrachten sind, so kann die rechte Seite sowohl als positiv wie als negativ angenommen werden Haben X_x, Y_y, Z_z alle dasselbe Zeichen, so ist, um eine reelle Fläche zu erhalten, rechts das gleiche Zeichen zu wählen. Die Fläche ist dann wirklich ein Ellipsoid. Haben dagegen die drei Hauptdrucke nicht alle gleiches Zeichen, so sind rechts beide Zeichen zulässig; wir erhalten in jedem Falle zwei Hyperboloide, ein einschaliges und ein zweischaliges, welche denselben Asymptotenkegel besitzen. Beide sind bei der obigen Konstruktion zu benutzen, da dieselbe sonst für einen Teil der Druckrichtungen nicht ausführbar wäre. Wird die zu konstruierende Tangentialebene eine Tangentialebene des Asymptotenkegels, so fällt die Druckrichtung gerade in die Ebene, auf welche der Druck wirkt.

13. Eine besondere Untersuchung erfordert der Fall, dafs eine oder zwei Hauptachsen des ersten (also auch des zweiten) Druckellipsoids der Null gleich sind; das Ellipsoid geht hier in eine elliptische Scheibe oder eine begrenzte Gerade über. Die Gröfse der Druckkräfte für die verschiedenen Richtungen und die Lage der Ebenen, auf welche sie einwirken, läfst sich dann durch einen Grenzübergang oder durch eine direkte Untersuchung bestimmen.

Legen wir wieder die Koordinatenachsen in die Hauptdruckachsen und ist dann

$$Z_z = 0,$$

so haben wir an Stelle von (21)

$$\xi = X_x\alpha, \quad \eta = Y_y\beta, \quad \zeta = Z_z\gamma = 0, \tag{27}$$

also

$$\alpha = \frac{\xi}{X_x}, \quad \beta = \frac{\eta}{Y_y}, \quad \gamma \text{ beliebig.} \tag{28}$$

Durch Einsetzen in (16) folgt

$$\frac{\xi^2}{X_x^2} + \frac{\eta^2}{Y_y^2} = 1 - \gamma^2. \tag{29}$$

Die Drucke fallen alle in die Ebene der Scheibe; die Lage der Druckebene ist nicht durch die Richtung des Druckes allein bestimmt, sondern hängt auch von der Gröfse desselben, die für die gleiche Richtung verschieden sein kann, ab. Die Gröfsen der Drucke stellen sich nämlich als Radien eines (nach aufsen hin begrenzten) Systems ähnlicher und ähnlich liegender Ellipsen dar, deren Achsen sich proportional zu dem Sinus des Winkels ändern, welche die Normale zur Druckebene mit der z-Achse bildet.

An Stelle des zweiten Druckellipsoids tritt der Kegelschnitt

$$\frac{\xi^2}{X_x} + \frac{\eta^2}{Y_y} = \sqrt{1 - \gamma^2}. \tag{30}$$

Wie in 11. findet man, dafs die Gerade, in welcher eine Druckebene die xy-Ebene schneidet, der Tangente an diesen Kegelschnitt in dem Punkte, in welchem er von der Druckrichtung geschnitten wird, parallel ist. Die Richtung der Normalen der Druckebene hängt in der oben angegebenen Weise mit der Richtung des Druckes zusammen.

14. Ist

$$Y_y = Z_z = 0,$$

so ist

$$\xi = X_x \alpha, \quad \eta = \zeta = 0,$$

also

$$\alpha = \frac{\xi}{X_x}, \quad \beta \text{ beliebig}, \quad \gamma \text{ beliebig}.$$

Die Druckrichtung fällt hier immer in die x-Achse. Die Gröfse ξ des Druckes ist dem Kosinus des Winkels proportional, welchen die Normale der Druckebene mit der x-Achse bildet. Zu einem bestimmten Drucke gehören unendlich viele, gegen die x-Achse gleich geneigte Ebenen.

15. Die bisherigen Untersuchungen bezogen sich auf die Drucke, welche im Innern eines Körpers statthaben. Aber auch an der Oberfläche können, etwa von einem andern Körper ausgehend, Drucke vorhanden sein. Da auch hier die Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung gewahrt bleiben mufs, so wird an jeder Stelle der Oberfläche der gegen sie gerichtete innere Druck dem auf sie ausgeübten äufseren gleich und entgegengesetzt sein. Bezeichnet n die nach aufsen gehende Normale einer Stelle der Körperoberfläche, P_n den inneren Druck mit den Komponenten X_n, Y_n, Z_n; P' den äufseren Druck mit den Komponenten X', Y', Z', so ist

$$X_n + X' = 0, \quad Y_n + Y' = 0, \quad Z_n + Z' = 0 \tag{31}$$

oder, wenn der innere Druck nach (11) zerlegt wird,

$$(32)\quad \begin{cases} X' + X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n,z) = 0, \\ Y' + Y_x \cos(n,x) + Y_y \cos(n,y) + Y_z \cos(n,z) = 0, \\ Z' + Z_x \cos(n,x) + Z_y \cos(n,y) + Z_z \cos(n,z) = 0. \end{cases}$$

§ 68.

Die Bewegungsgleichungen der elastisch festen Körper.

1. In § 67, (4) fanden wir als Bewegungsgleichungen des stetig veränderlichen Systems

$$(1)\quad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{d^2 u}{dt^2} = \varepsilon X - \dfrac{\partial X_x}{\partial x} - \dfrac{\partial X_y}{\partial y} - \dfrac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \varepsilon \dfrac{d^2 v}{dt^2} = \varepsilon Y - \dfrac{\partial Y_x}{\partial x} - \dfrac{\partial Y_y}{\partial y} - \dfrac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \varepsilon \dfrac{d^2 w}{dt^2} = \varepsilon Z - \dfrac{\partial Z_x}{\partial x} - \dfrac{\partial Z_y}{\partial y} - \dfrac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{cases}$$

Relationen, die durch geeignete Anfangs- und Grenzbedingungen zu vervollständigen sind. Sollen die Gleichungen (1) nun auf einen stetig veränderlichen Körper von bestimmter Beschaffenheit angewandt werden, so müssen die Druckkräfte, die ja, aufser etwa an den Grenzen, nicht unmittelbar gegeben sind, eliminiert werden. Zu diesem Zwecke müssen diese Druckkräfte durch andere Gröfsen, z. B. durch die Veränderungen welche sie im Körper hervorrufen, ausgedrückt werden. Wir werden diese Beziehungen für die wichtigsten in der Natur vorkommenden Körper aufstellen; in diesem Abschnitte sollen uns insbesondere die elastisch festen Körper beschäftigen.

2. Die elastisch festen Körper — und kein fester Körper entbehrt der Elastizität vollständig — haben die charakteristische Eigenschaft, dafs je zwei benachbarte Teilchen ihre Entfernung nur sehr wenig zu ändern im stande sind und dafs durch jede solche Entfernungsänderung Druckkräfte erregt werden, welche die ursprüngliche Entfernung wiederherzustellen bestrebt sind. Werden zwei Teilchen gewaltsam über eine gewisse Grenze voneinander entfernt oder einander genähert, so wird der Körper zerrissen, resp. zerdrückt, oder doch so in seinen Eigenschaften verändert, dafs die Gesetze der Elastizität ihre Gültigkeit verlieren.

In welcher Beziehung stehen nun bei einem Teilchen eines elastisch festen Körpers die erlittene Deformation und die durch sie in Aktion versetzten oder umgekehrt sie hervorrufenden Druckkräfte? Navier, der Begründer der Elastizitätstheorie, Poisson und Cauchy gehen bei ihren Untersuchungen von gewissen sehr unbestimmten Voraussetzungen über die Wirkungsweise der Moleküle aus und leiten daraus jene Beziehungen ab. Wir glauben mit Kirchhoff derartige mangelhaft fundamentierte Hypothesen, deren Resultate auch mit der Wirklichkeit unvollkommen übereinstimmen, verwerfen und

an ihre Stelle lieber die rein experimentelle Erfahrung setzen zu sollen. Es handelt sich also darum, durch ein möglichst einfaches Experiment die Beziehung zwischen Druck und Deformation aufzufinden. Dabei soll vorläufig vorausgesetzt werden, dafs der Körper sich nach allen Richtungen hin gegen Druck gleichartig verhält, dafs er isotrop ist. Diese Voraussetzung trifft nicht zu bei krystallinischen Körpern; auch unkrystallinische können anisotrop sein, wenn sie bei ihrer Herstellung nach verschiedenen Richtungen hin ungleichartig behandelt wurden, wie dies z. B. beim Ausziehen eines Drahtes der Fall ist.

3. Ein gerader, prismatischer (cylindrischer) Körper sei mit seiner oberen Grundfläche so befestigt, dafs seine Längsachse die vertikale Richtung einnimmt*). An seiner unteren Grundfläche werde ein Gewicht so befestigt, dafs sich sein Zug auf die einzelnen Teile der Grundfläche gleichmäfsig verteilt. Am nächsten kommt man diesen Bedingungen, wenn man den Querschnitt des Prismas sehr klein annimmt, also etwa einen dünnen Draht aus der zu untersuchenden Substanz, welche jedoch vollkommen isotrop sein mufs, verwendet. Wenn das Gewicht des Drahtes gegen das belastende Gewicht verschwindend klein ist, so erfährt jeder Teil des Prismas den gleichen Zug, die hervorgerufene Deformation wird also homogen sein und wir werden aus der gesamten Gestaltänderung des Prismas auf diejenige in einem infinitesimalen Teile schliefsen dürfen.

Genaue Messungen, wie sie besonders Wertheim anstellte, ergaben, dafs der Stab infolge des Zuges eine Verlängerung erfährt, welche dem angehängten Gewichte, also dem Zuge, direkt proportional ist, falls letzterer nicht über ein zulässiges Maximum hinausging, die Ausdehnung also nicht die Elastizitätsgrenze überschritt. Bei verschiedenen Stäben derselben Substanz ist die Ausdehnung der Länge direkt, dem Querschnitt umgekehrt proportional, wie dies als selbstverständlich anzusehen ist. Bei Stäben aus verschiedener Substanz ist unter sonst gleichen Verhältnissen die Ausdehnung eine verschiedene. Die Art, wie die Substanz bei Herstellung des Stabes behandelt wurde (gezogene und gegossene, resp. angelassene Stäbe und Drähte), ist von beträchtlichem Einflufs. Die Längenausdehnung durch Zug hängt also von einer Konstanten ab, welche je nach der Natur des Stoffes verschieden ist. Man versteht unter dem Elastizitätsmodul E einer Substanz den Zahlenwert des Gewichtes, welches bei einem Stabe aus dieser Substanz mit einem der Flächeneinheit gleichen Querschnitte nötig wäre, um seine Länge auf das Doppelte auszudehnen, vorausgesetzt natürlich, dafs alsdann noch dieselben Gesetze Anwendung fänden wie bei zulässigen Ausdehnungen. Den reciproken Wert n von E nennt man auch den Elastizitätskoeffizienten; doch

*) Genau genommen mufs in den Grenzflächen eine seitliche Verschiebung möglich sein; bei einem dünnen Drahte fällt jedoch dieser Umstand wenig ins Gewicht.

wird diese Bezeichnung auch mit dem Elastizitätsmodulus als gleichbedeutend gebraucht.

Das Gewicht, welches den Stab dehnt, erscheint hier nicht als eine Masse, sondern als eine Kraft, welche auf den Stab einwirkt. Die Wirkung ist daher genau genommen von dem lokalen Werte der Beschleunigung g durch die Schwere abhängig; man kann etwa den Wert von g in Paris zu Grunde legen. Die Dimension des Elastizitätsmoduls bestimmt sich durch die Bemerkung, dafs er als Quotient einer Kraft und eines Flächeninhaltes erscheint; wir finden so für die Dimension von E:

$$l^{-1} t^{-2} m,$$

während n die Dimension

$$l t^2 m^{-1}$$

besitzt. Die Dimension von E stimmt mit der des Drucks überein.

Die Länge l_1, zu welcher ein Stab von der Länge l und dem Querschnitte q durch ein Gewicht p ausgedehnt wird, ist

$$l_1 = l\left(1 + \frac{p}{Eq}\right). \tag{1}$$

Die Gröfse $n = \frac{1}{E}$ giebt an, um wieviel ein Stab von der Länge 1 und dem Querschnitte 1 durch die Gewichtseinheit verlängert wird. Nimmt man, wie gebräuchlich*), als Einheit des Querschnittes den Quadratmillimeter und als Einheit des Gewichtes das Kilogramm, so beträgt E bei einer Temperatur von 15^0—20^0 für

Blei, gezogen	1883
Blei, angelassen	1727
Gold, gezogen	8131
Gold, angelassen	5584
Kupfer, gezogen	12449
Kupfer, angelassen	10519
Eisen, gezogen	20869
Eisen, angelassen	20794
Spiegelglas	7015.

4. Die Längenausdehnung ist nicht die einzige Wirkung des Zuges; vielmehr hat er gleichzeitig in allen Richtungen, welche zur Zugrichtung senkrecht stehen, eine gleichmäfsige Kontraktion zur Folge. Während die Längenausdehnung leicht direkt gemessen werden kann, läfst sich die Querkontraktion nur in besonderen Fällen, z. B. bei einem dicken Kaut-

*) Will man an Stelle des angegebenen traditionellen Mafssystems, dessen Inkonsequenzen auf der Hand liegen, ein konsequentes absolutes Mafssystem setzen, dessen Einheiten etwa Meter, Sekunde und Kilogrammmasse sind, so mufs man die Schwerkraft durch eine Kraft ersetzen, welche der Masseneinheit in der Sekunde eine Beschleunigung von einem Meter erteilt, während der Querschnitt nach Quadratmetern zu messen ist. Die obigen Zahlenwerte werden durch Multiplikation mit 1 000 000 g in das absolute Mafssystem umgerechnet.

schukstabe direkt beobachten. Sonst mufs man den Stab in einer Flüssigkeit ausdehnen und aus der beobachteten Volumänderung und der gemessenen Längenänderung auf die Veränderung in der Dicke schliefsen. Diese Methode ist begreiflicherweise wenig genau, weshalb auch gegenwärtig noch die Untersuchungen über diesen wichtigen Gegenstand nicht abgeschlossen sind. Jedenfalls kann man behaupten, dafs die Querkontraktion der Längenausdehnung proportional ist. Wir bezeichnen ihr Verhältnis zur Längenausdehnung mit μ*).

Ist b die Länge irgend einer Sehne des Querschnittes im ursprünglichen Zustande, so wird sie bei dem Zuge zu

$$b_1 = b\left(1 - \frac{\mu p}{Eq}\right) = b(1 - \mu\delta), \tag{2}$$

wenn die Längenausdehnung der Längeneinheit $= \delta$ gesetzt wird. Aus dem Querschnitte q wird

$$q_1 = q(1 - \mu\delta)^2$$

oder, wenn Potenzen der sehr kleinen Gröfse δ vernachlässigt werden,

$$q_1 = q(1 - 2\mu\delta). \tag{3}$$

Der Rauminhalt J des Stabes wird zu

$$J_1 = J(1 + \delta)(1 - 2\mu\delta)$$

oder bei derselben Vernachlässigung

$$J_1 = J[1 + \delta(1 - 2\mu)]. \tag{4}$$

Wenn $\mu < \frac{1}{2}$ ist, findet also eine Vergröfserung des Volums statt; in der Wirklichkeit ist dies immer der Fall.

Für $\mu = \frac{1}{2}$ würde eine Änderung des Volums überhaupt nicht stattfinden; der Körper könnte in diesem Sinne, obgleich sich die einzelnen Dimensionen ändern, als inkompressibel bezeichnet werden. Wir werden auf diese bei keinem festen Körper zutreffende Annahme bei der Theorie der Lichtwellen zurückkommen.

5. Die fundamentale, noch nicht hinreichend beantwortete Frage der Elastizitätstheorie ist diese: Besitzt μ einen von der Natur der Substanz unabhängigen Wert, existiert also nur *eine* Elastizitätskonstante, oder ist μ für verschiedene Substanzen verschieden, existieren also zwei unabhängige Konstanten E und μ? Navier und Poisson glaubten aus ihren theoretischen, nicht genügend begründeten Untersuchungen schliefsen zu können, dafs immer

$$\mu = \frac{1}{4} \tag{5}$$

sei. In der That liefern die Experimente bei manchen Substanzen hierzu recht gut stimmende Werte. Wertheim's Untersuchungen wiesen dagegen mehr auf den Wert $\mu = \frac{1}{3}$ hin. Als Resultat zahlreicher neueren

---

*) μ ist natürlich eine reine Zahl; dasselbe gilt von der sogleich einzuführenden Gröfse δ.

Messungen, bei denen der Spielraum der Beobachtungsfehler freilich immer ein sehr weiter ist, ergiebt sich mit grofser Wahrscheinlichkeit, dafs μ für verschiedene Substanzen verschiedene Werte annimmt, dafs also zwei Elastizitätskonstanten festzuhalten sind*).

6. Da bei dem besprochenen Experimente der Zug ein einseitiger ist, so degeneriert das Druckellipsoid für jeden Punkt in eine zur Zugrichtung parallele, begrenzte Gerade. Das Dilatationsellipsoid ist ein längliches Rotationsellipsoid, dessen Rotationsachse in die Zugrichtung fällt. Die deformierte Kugel ist nach dieser Richtung hin ausgedehnt, nach den dazu senkrechten Richtungen verkürzt worden.

Falls Druck statt Zug angewandt wird, ergeben sich nach anderen Experimenten analoge Resultate; die Konstanten bleiben dieselben und es ist nur das Vorzeichen der Dilatation umzukehren. Das Dilatationsellipsoid ist hier ein abgeplattetes Rotationsellipsoid. Das degenerierte Druckellipsoid bleibt das gleiche.

7. Wir wollen jetzt ein rechtwinkliges Parallelepipedon aus isotroper Substanz ins Auge fassen, welches in den Richtungen seiner Seitenlinien die auf die betreffenden Flächen gleichmäfsig verteilten Drucke p_1, p_2, p_3 (reduziert auf die Flächeneinheit) erleidet. Jeder dieser Drucke bringt für sich allein eine Deformation hervor, welche der soeben behandelten analog ist. Wirken die drei Drucke zusammen, so werden wir die Längenänderungen, welche sie in den drei Hauptrichtungen bewirken, wegen ihrer Kleinheit einfach addieren dürfen**). Die Längeneinheit erfährt demnach in jeder der drei Hauptrichtungen die folgende Änderung***):

$$(6)\quad -\frac{1}{E}[p_1-\mu(p_2+p_3)],\ -\frac{1}{E}[p_2-\mu(p_3+p_1)],\ -\frac{1}{E}[p_3-\mu(p_1+p_2)].$$

Das Druckellipsoid ist hier im allgemeinen dreiachsig; seine Hauptachsen laufen den Kanten des Parallelepipedons parallel. Das Dilatationsellipsoid ist für jeden Punkt — auch diese Deformation ist eine homogene — das gleiche; seine Hauptachsen fallen, wie schon aus der Symmetrie hervorgeht, der Richtung nach mit denjenigen des Druckellipsoids zusammen und sind durch die Gröfsen (6) zu bestimmen.

8. Wir sahen in § 67, 10, dafs bei sonst beliebigen Druckverhältnissen in den Richtungen der Hauptachsen des Druckellipsoides nur Normaldrucke stattfinden. Nehmen wir daher unser Parallelepipedon als unendlich klein an, so können wir seine Kantenrichtungen

---

*) Über den experimentellen Teil der Untersuchung findet man eingehende Angaben bei Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. I, S. 196 ff.

**) Im allgemeinen ist nicht der Schlufs zulässig, dafs die gleichzeitige Wirkung mehrerer Ursachen der Summe der Wirkungen der einzelnen gleich ist.

***) Die Einheit des Drucks mufs den bei der Bestimmung von E zu Grunde gelegten Einheiten entsprechend gewählt werden. Diese Einheit wäre demnach der Druck, welchen die Kilogrammmasse (etwa bei der Gröfse der Schwerkraft, wie sie in Paris herrscht) auf einen Quadratmillimeter ausübt.

mit den Achsenrichtungen des Drückellipsoids identifizieren*). Wir gelangen so zu dem wichtigen Resultate, daſs in jedem Falle das Druckellipsoid und das Dilatationsellipsoid die gleichen Achsenrichtungen besitzen.

Sind p_1, p_2, p_3 die Hauptdrucke, so werden die Achsen des Dilatationsellipsoides, falls es aus einer Kugel vom Radius r hervorgeht, nach (6)

$$(7)\quad \begin{cases} a = r\left[1 - \frac{1}{E}(p_1 - \mu(p_2 + p_3))\right], \\ b = r\left[1 - \frac{1}{E}(p_2 - \mu(p_3 + p_1))\right], \\ c = r\left[1 - \frac{1}{E}(p_3 - \mu(p_1 + p_2))\right]. \end{cases}$$

Lassen wir die Koordinatenachsen mit den Hauptachsen beider Ellipsoide zusammenfallen, so ist nach § 66, (9) und § 65, (7)

$$(8)\quad \begin{cases} a = r\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \\ b = r\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \\ c = r\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{cases}$$

Aus (7) und (8) folgt

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{E}[p_1 - \mu(p_2 + p_3)], \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{E}[p_2 - \mu(p_3 + p_1)], \\ \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{E}[p_3 - \mu(p_1 + p_2)] \end{cases}$$

oder

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{E}[(1+\mu)p_1 - \mu(p_1 + p_2 + p_3)], \\ \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{E}[(1+\mu)p_2 - \mu(p_1 + p_2 + p_3)], \\ \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{E}[(1+\mu)p_3 - \mu(p_1 + p_2 + p_3)]. \end{cases}$$

Setzen wir nach § 66, (11)

$$(11)\quad \sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

*) Die folgenden Untersuchungen beruhen alle auf der Voraussetzung, daſs die Deformationen des elastischen Körpers gegen seine Dimensionen unendlich klein sind. Bei den zunächst zu betrachtenden Beispielen kommt diese Annahme der Wirklichkeit so nahe, daſs keine bedeutenden Fehler durch ihr unvollkommenes Zutreffen zu besorgen sind. Fälle, wo diese Annahme nicht zulässig ist, müssen in besonderer Weise behandelt werden, wie weiter unten geschehen wird.

wo σ die räumliche Dilatation bedeutet, so folgt aus den Gleichungen (10) durch Addition

$$(12)\qquad p_1 + p_2 + p_3 = -\frac{E\sigma}{1-2\mu}$$

und durch Zusammenstellung von (12) mit den einzelnen Gleichungen (10)

$$(13)\qquad \begin{cases} (1+\mu)\,p_1 = -E\left[\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\mu}{1-2\mu}\,\sigma\right], \\ (1+\mu)\,p_2 = -E\left[\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\mu}{1-2\mu}\,\sigma\right], \\ (1+\mu)\,p_3 = -E\left[\dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{\mu}{1-2\mu}\,\sigma\right]. \end{cases}$$

Setzen wir mit Kirchhoff*)

$$(14)\qquad \frac{E}{1+\mu} = 2K, \qquad \frac{\mu}{1-2\mu} = \vartheta,$$

so erhalten wir schliefslich

$$(15)\qquad \begin{cases} p_1 = -\,2K\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\sigma\right), \\ p_2 = -\,2K\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + \vartheta\sigma\right), \\ p_3 = -\,2K\left(\dfrac{\partial w}{\partial z} + \vartheta\sigma\right). \end{cases}$$

9. Die Gleichungen (15) gelten für ein Koordinatensystem, dessen Achsen mit den jeweiligen Hauptachsen des Dilatationsellipsoides zusammenfallen; wir wollen in der Folge, im Gegensatze zu den willkürlich gelegten Koordinaten x, y, z, diese besonderen Koordinaten mit x', y', z' bezeichnen und dementsprechend auch u', v', w' gebrauchen. In (15) sind diese gestrichenen Buchstaben eingesetzt zu denken; bei der Gröfse σ ist es nach § 66, 3 gleichgiltig, welche Koordinaten angewandt werden. Es handelt sich nun darum, an Stelle der speziellen Koordinaten die allgemeinen einzuführen, was, da eine Parallelverschiebung des Koordinatensystems hier irrelevant ist, mittels der Gleichungen

$$(16)\qquad \begin{cases} x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z', \\ y = \beta_1 x' + \beta_2 y' + \beta_3 z', \\ z = \gamma_1 x' + \gamma_2 y' + \gamma_3 z' \end{cases}$$

geschehen mag, worin die α, β, γ die oft gebrauchte Bedeutung haben und den bekannten Relationen unterworfen sind.

Um zunächst die Druckkomponenten im neuen System

$$X_x,\; Y_y,\; Z_z;\quad Y_z,\; Z_x,\; X_y$$

durch p_1, p_2, p_3 auszudrücken, benutzen wir § 67, (11). Da die seitlichen Druckkomponenten bei den Drucken in der Richtung der Haupt-

*) K hat dieselbe Dimension wie E, ϑ ist wie μ eine reine Zahl.

achsen verschwinden, so finden wir als Komponenten des Druckes auf eine Ebene mit der Normalen s, bezogen auf das System x', y', z':

$$(17) \qquad \begin{cases} X'_s = p_1 \cos(s, x'), \\ Y'_s = p_2 \cos(s, y'), \\ Z'_s = p_3 \cos(s, z'). \end{cases}$$

Weiter finden wir für die Komponente dieses Druckes, welche in die Richtung der Normalen fällt,

$$S_s = X'_s \cos(s, x') + Y'_s \cos(s, y') + Z'_s \cos(s, z')$$

oder nach (17)

$$(18) \qquad S_s = p_1 \cos^2(s, x') + p_2 \cos^2(s, y') + p_3 \cos^2(s, z)$$

und für die seitliche Komponente, welche in die Richtung einer Geraden r jener Druckebene fällt,

$$R_s = X'_s \cos(r, x') + Y'_s \cos(r, y') + Z'_s \cos(r, z')$$

oder

$$(19) \quad R_s = p_1 \cos(s,x') \cos(r,x') + p_2 \cos(s,y') \cos(r,y') + p_3 \cos(s,z') \cos(r,z').$$

Identifizieren wir die Richtungen s, dann s und r mit den Koordinatenrichtungen x, y, z und beachten die Bedeutung der Koeffizienten α_1 u. s. w., so erhalten wir

$$(20) \qquad \begin{cases} X_x = \alpha_1^2 p_1 + \alpha_2^2 p_2 + \alpha_3^2 p_3, \\ Y_y = \beta_1^2 p_1 + \beta_2^2 p_2 + \beta_3^2 p_3, \\ Z_z = \gamma_1^2 p_1 + \gamma_2^2 p_2 + \gamma_3^2 p_3, \\ Y_z = Z_y = \beta_1 \gamma_1 p_1 + \beta_2 \gamma_2 p_2 + \beta_3 \gamma_3 p_3, \\ Z_x = X_z = \gamma_1 \alpha_1 p_1 + \gamma_2 \alpha_2 p_2 + \gamma_3 \alpha_3 p_3, \\ X_y = Y_x = \alpha_1 \beta_1 p_1 + \alpha_2 \beta_2 p_2 + \alpha_3 \beta_3 p_3. \end{cases}$$

Setzen wir hierin die Werte für p_1, p_2, p_3 aus (15) ein, so erhalten wir bei Beachtung bekannter Relationen und der geänderten Bezeichnung

$$(21) \qquad \begin{cases} X_x = -2K\left(\alpha_1^2 \dfrac{\partial u'}{\partial x'} + \alpha_2^2 \dfrac{\partial v'}{\partial y'} + \alpha_3^2 \dfrac{\partial w'}{\partial z'} + \vartheta\sigma\right), \\ X_y = -2K\left(\beta_1^2 \dfrac{\partial u'}{\partial x'} + \beta_2^2 \dfrac{\partial v'}{\partial y'} + \beta_3^2 \dfrac{\partial w'}{\partial z'} + \vartheta\sigma\right), \\ Z_z = -2K\left(\gamma_1^2 \dfrac{\partial u'}{\partial x'} + \gamma_2^2 \dfrac{\partial v'}{\partial y'} + \gamma_3^2 \dfrac{\partial w'}{\partial z'} + \vartheta\sigma\right), \\ Y_z = -2K\left(\beta_1 \gamma_1 \dfrac{\partial u'}{\partial x'} + \beta_2 \gamma_2 \dfrac{\partial v'}{\partial y'} + \beta_3 \gamma_3 \dfrac{\partial w'}{\partial z'}\right), \\ Z_x = -2K\left(\gamma_1 \alpha_1 \dfrac{\partial u'}{\partial x'} + \gamma_2 \alpha_2 \dfrac{\partial v'}{\partial y'} + \gamma_3 \alpha_3 \dfrac{\partial w'}{\partial z'}\right), \\ X_y = -2K\left(\alpha_1 \beta_1 \dfrac{\partial u'}{\partial x'} + \alpha_2 \beta_2 \dfrac{\partial v'}{\partial y'} + \alpha_3 \beta_3 \dfrac{\partial w'}{\partial z'}\right). \end{cases}$$

Nach § 66, (15), wo dieselbe Bezeichnungsweise angewandt wurde, sind in den drei ersten Gleichungen (21)

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}$$

unmittelbar einzuführen. Aus § 66, (14) und (13) folgt weiter in ähnlicher Weise, wie die Relationen § 66, (15) abgeleitet wurden,

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} &= \beta_1 \frac{\partial u'}{\partial z} + \beta_2 \frac{\partial v'}{\partial z} + \beta_3 \frac{\partial w'}{\partial z} \\ &+ \gamma_1 \frac{\partial u'}{\partial y} + \gamma_2 \frac{\partial v'}{\partial y} + \gamma_3 \frac{\partial w'}{\partial y} \\ &= \beta_1 \left(\gamma_1 \frac{\partial u'}{\partial x'} + \gamma_2 \frac{\partial u'}{\partial y'} + \gamma_3 \frac{\partial u'}{\partial z'}\right) + \cdots \\ &+ \gamma_1 \left(\beta_1 \frac{\partial u'}{\partial x'} + \beta_2 \frac{\partial u'}{\partial y'} + \beta_3 \frac{\partial u'}{\partial z'}\right) + \cdots\end{aligned}$$

oder mit Beachtung von § 66, (10)

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 2\left(\beta_1 \gamma_1 \frac{\partial u'}{\partial x'} + \beta_2 \gamma_2 \frac{\partial v'}{\partial y'} + \beta_3 \gamma_3 \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) \tag{22}$$

u. s. w.

So wird schliefslich aus (21)

$$\left\{\begin{aligned} X_x &= -2K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\sigma\right), \\ Y_y &= -2K\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \vartheta\sigma\right), \\ Z_z &= -2K\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \vartheta\sigma\right), \\ Y_z = Z_y &= -K\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ Z_x = X_z &= -K\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ X_y = Y_x &= -K\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Die drei ersten dieser Gleichungen stimmen mit (15) vollkommen überein; die rechten Seiten der drei letzten verschwinden, wenn die Koordinatenachsen mit den Hauptachsen des Dilatationsellipsoides zusammenfallen.

10. Um die fertigen Bewegungsgleichungen für elastisch feste Körper zu erhalten, müssen wir die Werte (23) in die Gleichungen § 67, (4) eintragen; wir erhalten so

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2u}{dt^2} &= \varepsilon X + K\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (1 + 2\vartheta)\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right], \\ \varepsilon \frac{d^2v}{dt^2} &= \varepsilon Y + K\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (1 + 2\vartheta)\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right], \\ \varepsilon \frac{d^2w}{dt^2} &= \varepsilon Z + K\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (1 + 2\vartheta)\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right]. \end{aligned}\right. \tag{24}$$

Aufser diesen Hauptgleichungen kommen noch Grenzbedingungen für die Grenzen des elastischen Körpers in Betracht. Die Gleichungen § 67, (32) müssen jedenfalls erfüllt sein. Ist die Oberfläche eine freie, d. h. grenzt sie an den leeren Raum und erleidet sie keinen äufseren Druck, so ist hierin

$$X' = Y' = Z' = 0 \tag{25}$$

zu setzen. Sind dagegen in einer Grenzfläche zwei elastische Körper verbunden, so dafs die Teilchen an der Fläche in Berührung bleiben, während die Gleichungen (24) infolge verschiedener Elastizitätskonstanten verschieden ausfallen, so können X', Y', Z' für den zweiten Körper ebenso zerlegt werden, wie die entsprechenden Gröfsen für den ersten. Wir erhalten, wenn wir beachten, dafs die nach aufsen gerichtete Normale auf der Grenzfläche für beide Körper entgegengesetzte Richtung hat,

$$\left\{\begin{aligned}(X_x - X_x')\cos(n,x) + (X_y - X_y')\cos(n,y) + (X_z - X_z')\cos(n,z) &= 0,\\ (Y_x - Y_x')\cos(n,x) + (Y_y - Y_y')\cos(n,y) + (Y_z - Y_z')\cos(n,z) &= 0,\\ (Z_x - Z_x')\cos(n,x) + (Z_y - Z_y')\cos(n,y) + (Z_z - Z_z')\cos(n,z) &= 0.\end{aligned}\right. \tag{26}$$

Die ungestrichenen Gröfsen beziehen sich auf den ersten, die gestrichenen auf den zweiten Körper; die Normalrichtung n kann beliebig nach der einen oder der andern Seite genommen werden.

Die Gemeinschaftlichkeit der Bewegung auf beiden Seiten der Grenzfläche bedingt ferner die Gleichungen (mit entsprechender Bezeichnung)

$$u = u', \quad v = v', \quad w = w'. \tag{27}$$

In (26) können noch die Druckkomponenten nach (23) durch die Verrückungen ersetzt werden.

11. Wir wollen die Gleichung von der Erhaltung der lebendigen Kraft für den elastischen Körper bilden. Sowohl die Kraft X, Y, Z, als auch die auf ein Teilchen der Oberfläche einwirkende Kraft X', Y', Z' mögen Kräftefunktionen U und U' besitzen. An Stelle der Gleichungen (24) betrachten wir zuerst die ursprünglichen in § 67, (4). Wir multiplizieren dieselben mit $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ und addieren sie; da u, v, w die Änderungen von x, y, z zur Zeit t, im Vergleich zur Zeit $t = 0$, vorstellen, so können wir, wo es zweckmäfsig erscheint, statt du, dv, dw auch dx, dy, dz setzen. So erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\varepsilon\frac{d}{dt}\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right] &= \varepsilon\frac{dU}{dt}\\ &- \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\frac{du}{dt} - \left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right)\frac{dv}{dt}\\ &- \left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right)\frac{dw}{dt}.\end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $dx\,dy\,dz = d\tau$ und integrieren über den ganzen Körper. Die rechte Seite, mit Ausnahme des ersten Gliedes, läfst partielle Integrationen zu, die wir in bekannter Weise

(vgl. § 43, 1, 2) ausführen; wir bezeichnen hierbei ein Element der Körperoberfläche mit $d\omega$ und denken uns die Integrale, welche das Differential $d\omega$ enthalten, über die ganze Körperoberfläche ausgedehnt. So finden wir

$$
(28)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\varepsilon\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]d\tau=\frac{d}{dt}\int\varepsilon\,U\,d\tau\\
&-\int d\omega\Big\{[X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y)+X_z\cos(n,z)]\frac{du}{dt}\\
&+[Y_x\cos(n,x)+Y_y\cos(n,y)+Y_z\cos(n,z)]\frac{dv}{dt}\\
&+[Z_x\cos(n,x)+Z_y\cos(n,y)+Z_z\cos(n,z)]\frac{dw}{dt}\Big\}\\
&+\int d\tau\Big\{X_x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,dt}+Y_y\frac{\partial^2 v}{\partial y\,dt}+Z_z\frac{\partial^2 w}{\partial z\,dt}\\
&+Y_z\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+Z_x\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+X_y\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big\}.
\end{aligned}\right.
$$

Wenden wir statt (26) wieder die ursprünglichen Gleichungen § 67, (32) an, so sind wir im stande, mittels dieser für die Oberfläche geltenden Relationen die rechts auftretenden Flächenintegrale wesentlich zu vereinfachen; es ist nämlich

$$X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y)+X_z\cos(n,z)=-X'$$

u. s. w.

zu setzen. Substituieren wir ferner

$$X'=\frac{\partial U'}{\partial x},\quad Y'=\frac{\partial U'}{\partial y},\quad Z'=\frac{\partial U'}{\partial z},$$

so nimmt (28) die Gestalt an

$$
(29)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\varepsilon\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]d\tau=\frac{d}{dt}\int\varepsilon\,U\,d\tau\\
&+\frac{d}{dt}\int U'd\omega+\int d\tau\Big\{X_x\frac{\partial^2 u}{\partial x\,dt}+Y_y\frac{\partial^2 v}{\partial y\,dt}+Z_z\frac{\partial^2 w}{\partial z\,dt}\\
&+Y_z\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)+Z_x\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+X_y\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big\}.
\end{aligned}\right.
$$

Fügt man endlich noch für die Druckkomponenten die Werte (23) ein, so erkennt man leicht, dafs beide Seiten der Gleichung vollständige Differentialquotienten nach t werden; durch Ausführung der Integration nach dt erhält man

$$
(30)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int\varepsilon\left[\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{dv}{dt}\right)^2+\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]d\tau=\int\varepsilon\,U\,d\tau+\int U'd\omega\\
&-K\int d\tau\Big[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\vartheta\sigma^2\\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\Big]\\
&+\text{Const.}
\end{aligned}\right.
$$

Dies ist der Ausdruck für das Prinzip der Erhaltung der lebendigen Kraft, angewandt auf einen elastisch festen Körper. Da das dritte Integral auf der rechten Seite nur positive Glieder enthält, so folgt, dafs die lebendige Kraft durch die eingetretenen Verrückungen eine Verminderung erfährt.

Das dritte Integral auf der rechten Seite hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dafs seine partiellen Differentialquotienten nach

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$$

die Gröfsen

$$X_x, \ Y_y, \ Z_z, \ Y_z, \ Z_x, \ X_y$$

sind, wovon man sich durch Ausführung der Differentiation leicht überzeugt. Da die übrigen Gröfsen, welche in (30) auftreten, ihrer Natur nach von der Lage des Koordinatensystems unabhängig sind, so mufs es auch das letzte Integral sein. Vergleicht man (30) mit dem allgemeinen Prinzipe der lebendigen Kraft, so erkennt man in der linken Seite die lebendige Kraft des Systems, in den beiden ersten Gliedern der rechten Seite aber die Gesamtpotentiale der äufseren Kräfte, welche teils auf die einzelnen materiellen Punkte, teils auf die Oberfläche wirken. Das dritte Integral mufs daher als das Potential derjenigen Kräfte angesehen werden, welche durch die Verrückungen im Innern des Körpers erzeugt werden.

12. An die soeben vollendete Rechnung läfst sich leicht der Beweis anschliefsen, dafs durch die Gleichungen (24), die Grenzbedingungen (26) und diejenigen Angaben, welche für $t = t_0$ die Gröfsen $u, v, w, \frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ als Funktionen der Koordinaten festsetzen, die Bewegung des elastischen Körpers *eindeutig* bestimmt ist.

Es sei für $t = t_0$

$$(31) \quad \begin{cases} u = \varphi_1(x, y, z), & v = \varphi_2(x, y, z), & w = \varphi_3(x, y, z), \\ \frac{du}{dt} = \psi_1(x, y, z), & \frac{dv}{dt} = \psi_2(x, y, z), & \frac{dw}{dt} = \psi_3(x, y, z). \end{cases}$$

Falls nun das angegebene Gleichungssystem zwei Lösungssysteme u_1, v_1, w_1 und u_2, v_2, w_2 zuläfst, so wollen wir

$$(32) \quad u_3 = u_1 - u_2, \quad v_3 = v_1 - v_2, \quad w_3 = w_1 - w_2$$

setzen. Aus den Gleichungen § 67, (4), welche wir wieder vorläufig statt (24) anwenden, folgt dann

$$(33) \quad \begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 u_3}{dt^2} = -\frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \varepsilon \frac{d^2 v_3}{dt^2} = -\frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \varepsilon \frac{d^2 w_3}{dt^2} = -\frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{cases}$$

worin jedoch X_x u. s. w. Gröfsen bedeuten, welche durch die Gleichungen (23) definiert sind, falls man in ihnen u, v, w durch u_3, v_3, w_3 ersetzt. Aus den Grenzbedingungen § 67, (32) folgt bei der gleichen Festsetzung

$$(34)\quad \begin{cases} X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z) = 0, \\ Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z) = 0, \\ Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z) = 0. \end{cases}$$

Mit (33) nehmen wir jetzt dieselben Operationen vor, wie vorher mit § 67, (4), als wir das Prinzip der lebendigen Kraft herleiteten; die Integration nach dt erstrecken wir von t_0 bis t. Da hier

$$U = U' = 0$$

zu setzen ist und wegen (31) für $t = t_0$

$$(35)\quad u_3 = v_3 = w_3 = 0,\ \frac{du_3}{dt} = \frac{dv_3}{dt} = \frac{dw_3}{dt} = 0,\ \frac{\partial u_3}{\partial x} = 0 \text{ u. s. w.}$$

wird, so fallen in der (30) entsprechenden Gleichung rechts die beiden ersten Glieder und die Konstante weg. Wir erhalten, wenn auch in σ die Gröfsen u_3, v_3, w_3 eingeführt werden,

$$(36)\quad \begin{cases} \frac{1}{2}\int \varepsilon\left[\left(\frac{du_3}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_3}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dw_3}{dt}\right)^2\right] d\tau \\ + K\int d\tau\left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial z}\right)^2 + \vartheta\sigma^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial z} + \frac{\partial w_3}{\partial y}\right)^2\right. \\ \left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_3}{\partial x} + \frac{\partial u_3}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)^2\right] = 0. \end{cases}$$

Da die Konstanten K und ϑ positiv sind, so ist die linke Seite von (36) eine Summe von unendlich vielen positiven Gliedern; soll eine solche verschwinden, so mufs jedes einzelne Glied verschwinden. Mithin ist für jeden Punkt des Körpers

$$(37)\quad \frac{du_3}{dt} = 0,\quad \frac{dv_3}{dt} = 0,\quad \frac{dw_3}{dt} = 0 \quad \text{u. s. w.};$$

u_3, v_3, w_3 sind daher von der Zeit unabhängig, also wegen (35) der Null gleich. Die Differenzen der beiden supponierten verschiedenen Lösungsreihen verschwinden also, d. h. es existiert nur ein einziges System von Lösungen.

13. Die Theorie der Elastizität gestaltet sich bei anisotropen (krystallinischen) Körpern wesentlich komplizierter als bei isotropen Substanzen. Der Elastizitätsmodulus E nimmt verschiedene Werte an, je nach der Richtung, in welcher ein Zug oder Druck auf den Körper ausgeübt wird. Die Hauptachsen des Druckellipsoides brauchen mit denjenigen des Dilatationsellipsoides nicht mehr zusammenzufallen.

Jedenfalls werden wir nicht fehlgehen, wenn wir annehmen, dafs die Druckkomponenten nur von denjenigen Gröfsen abhängen, welche die relative Verschiebung eines Teilchens gegen ein anderes der Gröfse und

Richtung nach bestimmen. Dies sind aber nach § 66, (8) die sechs Gröfsen

$$(38) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Da bei unkrystallinischen Körpern die Kraftkomponenten lineare Funktionen dieser Gröfsen sind, so müssen wir bei krystallinischen die gleiche Annahme machen. Bei einer Entwicklung der Kraftkomponenten nach den sechs Gröfsen (38) kommt wegen der Kleinheit der letzteren immer nur die niedrigste Potenz von ihnen in Betracht. Dafs dies die erste Potenz sein mufs, läfst sich a priori nicht schliefsen; da indessen das isotrope Medium nur ein Grenzfall des anisotropen ist, für jenen Grenzfall aber nur erste Potenzen der Gröfsen (38) auftreten, so haben wir die gröfste Wahrscheinlichkeit für uns, wenn wir die sechs Druckkomponenten als lineare Funktionen der sechs Gröfsen (38) ansehen. In der That stimmen die so berechneten Resultate mit den Beobachtungen.

Wir haben also zu setzen

$$(39) \qquad \begin{cases} X_x = a\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + b\,\dfrac{\partial v}{\partial y} + c\,\dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \qquad + d\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) + e\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) + f\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) \end{cases}$$

u. s. w.

In diesen Gleichungen treten 36 Konstanten auf, deren Anzahl sich jedoch gemäfs einer andern Betrachtungsweise im allgemeinen Falle auf 21, im speziellen aber auf geringere Zahlen reduziert. In (30) lernten wir das dritte Integral der rechten Seite, welche ein Ausdruck zweiten Grades in den Gröfsen

$$(40) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

ist, als Potential der inneren Kräfte für den Fall eines isotropen Körpers kennen. Es ist wahrscheinlich, dafs auch für die krystallinischen Körper ein solches Potential existiert. Dasselbe wäre im allgemeinsten Falle der allgemeinste homogene Ausdruck zweiten Grades in jenen sechs Gröfsen, und ein solcher enthält nur 21 Konstanten. Durch Differentiation nach den Gröfsen (40) erhält man dann die Kraftkomponenten, und es ist hieraus leicht ersichtlich, welche von den 36 Konstanten in (39) einander gleich werden müssen.

Wir gehen im folgenden auf die weitläufige Theorie der Elastizität bei anisotropen Substanzen nicht weiter ein.

§ 69.

Gleichgewicht einer elastischen Kugelschale bei äufserem und innerem Druck.

1. Die Integration der Bewegungsgleichungen der elastisch festen Körper gelingt nur in verhältnismäfsig wenigen Fällen; die Schwierigkeit

besteht, wie bei vielen ähnlichen Aufgaben, in der Einführung der Grenzbedingungen. Wir wollen uns zunächst mit einigen der wichtigsten Gleichgewichtsprobleme beschäftigen, welche der mathematischen Behandlung zugänglich sind.

Es sei eine homogene elastische Hohlkugel mit dem grofsen und kleinen Radius R und r gegeben, auf deren innere und äufsere Oberfläche die gleichmäfsigen Normaldrucke P und p, bezogen auf die Flächeneinheit, einwirken; beide sollen als positiv gerechnet werden, wenn sie in der Richtung des wachsenden Radius wirken; P mufs dann negativ sein, um einen Druck im engeren Sinne zu repräsentieren. Von äufseren Kräften, welche auf die inneren Teile des Körpers einwirken, möge abgesehen werden.

Setzen wir zur Abkürzung wieder

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{1}$$

so nehmen die Hauptgleichungen § 68, (24) im Falle des Gleichgewichtes die einfache Form an

$$\left\{\begin{aligned} \Delta u + (1 + 2\vartheta)\frac{\partial \sigma}{\partial x} &= 0, \\ \Delta v + (1 + 2\vartheta)\frac{\partial \sigma}{\partial y} &= 0, \\ \Delta w + (1 + 2\vartheta)\frac{\partial \sigma}{\partial z} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Es ist bei der symmetrischen Anordnung der Kräfte einleuchtend, dafs irgend ein Körperelement nur in der Richtung des Radius verschoben wird. Setzen wir für einen Punkt des Körpers, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Koordinaten sei,

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{3}$$

und bezeichnen wir die Verschiebung eines Teilchens in radialer Richtung, bezogen auf den Radius 1, mit τ, so ist

$$u = \tau x, \quad v = \tau y, \quad w = \tau z. \tag{4}$$

Hieraus folgt z. B.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \tau + x\frac{\partial \tau}{\partial x} = \tau + x\frac{d\tau}{d\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x} = \tau + \frac{x^2}{\varrho}\frac{d\tau}{d\varrho},$$

also

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 3\tau + \varrho\frac{d\tau}{d\varrho}, \tag{5}$$

ferner

$$\Delta u = \frac{4x}{\varrho}\frac{d\tau}{d\varrho} + x\frac{d^2\tau}{d\varrho^2} \quad \text{u. s. w.}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{4x}{\varrho}\frac{d\tau}{d\varrho} + x\frac{d^2\tau}{d\varrho^2} \quad \text{u. s. w.} \tag{7}$$

Durch Einsetzen dieser Werte gehen die drei Gleichungen (2) in die einzige*)

$$(8) \qquad \frac{4}{\varrho}\frac{d\tau}{d\varrho} + \frac{d^2\tau}{d\varrho^2} = 0$$

über, welche mittels der Substitution

$$\frac{d\tau}{d\varrho} = q$$

leicht zu integrieren ist. Man erhält nämlich

$$\frac{4q}{\varrho} + \frac{dq}{d\varrho} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{4d\varrho}{\varrho} + \frac{dq}{q} = 0$$

und hieraus

$$4 \log \varrho + \log q = \text{Const.}$$

oder

$$\log(\varrho^4 q) = \text{Const.}$$

oder

$$q\varrho^4 = \text{Const.}$$

Durch nochmalige Integration erhalten wir

$$(9) \qquad \tau = A\varrho^{-3} + B,$$

worin A und B noch zu bestimmende Konstanten bedeuten.

Die drei Oberflächenbedingungen § 68, (26) können wir durch eine einzige äquivalente ersetzen, welche besagt, daſs der innere Normaldruck an der Oberfläche — eine seitliche Komponente ist nicht vorhanden — dem äuſseren Normaldrucke das Gleichgewicht hält. Der innere Normaldruck, welcher an allen Stellen, einerseits der äuſseren und andrerseits der inneren Oberfläche, der gleiche ist, wird aus § 68, (23) erhalten, wenn man die Normalrichtung z. B. mit der x-Achse identifiziert. Man hat

$$X_x = -2K\left[\tau + \frac{\varrho^2}{\varrho}\frac{d\tau}{d\varrho} + \vartheta\left(3\tau + \varrho\frac{d\tau}{d\varrho}\right)\right]$$

oder bei Benutzung von (9)

$$(10) \qquad X_x = 2K\left[2A\varrho^{-3} - B(1 + 3\vartheta)\right].$$

Wir erhalten hiernach die Oberflächengleichungen

$$(11) \qquad \begin{cases} -P = 2K\left[2AR^{-3} - B(1 + 3\vartheta)\right], \\ \;\; p = 2K\left[2Ar^{-3} - B(1 + 3\vartheta)\right] \end{cases}$$

und berechnen hieraus

$$(12) \qquad \begin{cases} A = \dfrac{(p + P)R^3 r^3}{4K(R^3 - r^3)}, \\ B = -\dfrac{PR^3 + pr^3}{2K(1 + 3\vartheta)(R^3 - r^3)}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (9) und (12) bestimmen jetzt die Verschiebung eines

*) Da $1 + \vartheta$ nicht verschwindet; nach § 68, (14) müſste sonst $\mu = 1$ sein, was niemals zutrifft.

jeden Teilchens vollständig. Für die räumliche Dilatation (negative Kompression) erhalten wir

$$(13)\qquad \sigma = 3B = -\frac{3}{2}\,\frac{PR^3 + pr^3}{K(1+3\vartheta)(R^3 - r^3)};$$

dieselbe enthält nicht die Variable ϱ, ist also für jedes Körperelement die gleiche. Aus (10) wird noch

$$(14)\qquad X_x = \frac{1}{R^3 - r^3}\left[(p+P)R^3 r^3 \varrho^{-3} + PR^3 + pr^3\right].$$

2. Besonders bemerkenswert ist der Fall, wo

$$P = -p < 0$$

ist, d. h. wo auf die innere und äufsere Seite der Hohlkugel der gleiche, gegen die Körpermasse gerichtete Druck vorhanden ist. In diesem Falle wird

$$A = 0, \quad B = -\frac{P}{2K(1+3\vartheta)},$$

also

$$(15)\qquad \tau = -\frac{P}{2K(1+3\vartheta)}, \quad \sigma = -\frac{3P}{2K(1+3\vartheta)}.$$

Die verhältnismäfsige lineare Verschiebung wie die räumliche Kontraktion sind hier von den beiden Radien ganz unabhängig und dem Drucke proportional.

Auch wenn wir $r = 0$ nehmen, die Hohlkugel also in eine Vollkugel übergehen lassen*), bleiben die Verhältnisse dieselben. Eine Hohlkugel wird also durch einen gleichen inneren und äufseren Druck genau ebenso deformiert, wie der entsprechende Teil einer Vollkugel, auf welche von aufsen her derselbe Druck einwirkt.

Sind P und $-p$ verschieden, so bleibt zwar die räumliche Kompression an allen Stellen die gleiche, aber nicht die verhältnismäfsige lineare Verschiebung. Auch ändert sich der Druck gemäfs (14).

Das allgemeine Problem der Deformation einer elastischen Hohlkugel, auf deren beide Oberflächen beliebig gerichtete und beliebig verteilte Drucke wirken, läfst sich mit Hilfe von Kugelfunktionen lösen. Man sehe hierüber Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik, T. II, deutsche Übersetzung, p. 272 ff.

§ 70.

Untersuchungen über das Gleichgewicht eines elastischen prismatischen Stabes: das de St. Vénant'sche Problem.

1. Die Aufgabe, Gleichgewicht und Bewegung eines elastischen Körpers für gegebene äufsere Kräfte und Oberflächenbedingungen durch

---

*) Der auf die innere, verschwindende Fläche ausgeübte Druck wird dann irrelevant.

Integration der allgemeinen Elastizitätsgleichungen zu bestimmen, führt schon bei einfachen Fällen auf die gröfsten Schwierigkeiten. Andrerseits ist es höchst wünschenswert, dafs solche Probleme mit Benutzung jener Elastizitätsgleichungen gelöst werden, da die gewöhnlichen Lösungen, welche auf elementaren, näherungsweisen Betrachtungen beruhen, nicht immer mit den theoretisch strengen übereinstimmen. De St. Vénant*) suchte den Schwierigkeiten durch ein umgekehrtes Verfahren zu begegnen; er ging von gewissen vorgelegten Gleichgewichtszuständen aus und suchte die Kräfte zu bestimmen, welche zur Herstellung derselben notwendig sind. Auf diese Weise gelingt es in der That, einige praktisch wichtige Probleme zu erledigen.

Der zu untersuchende Körper sei homogen; er bilde im ursprünglichen Zustande ein gerades Prisma (resp. einen geraden Cylinder), dessen Grundflächen ganz willkürlich seien. Auf die Punkte im Innern des Körpers sollen keine äufseren Kräfte wirken, insbesondere soll die Schwere nicht in Betracht gezogen werden. Von den begrenzenden Flächen sollen nur die beiden Grundflächen der Wirkung äufserer Kräfte unterworfen sein; an den Seitenflächen soll also immer der Normaldruck Null herrschen. Aufserdem soll der Körper in einem Punkte der einen Grundfläche so befestigt sein, dafs das Körperelement, welches diesen Punkt umgiebt, weder eine Verschiebung noch eine Drehung erleiden kann. Dies ist erreicht, wenn die Lage dieses Punktes, eines durch denselben gehenden Linienelementes und eines das letztere in sich fassenden Flächenelementes fest gegeben ist.

Wir denken uns den Körper im ursprünglichen Zustande in unendlich viele Elementarprismen (Fasern) zerlegt, deren Seitenkanten denen des ganzen Prismas parallel laufen. Das de St. Vénant'sche Problem lautet nun:

Ein Prisma von den beschriebenen Eigenschaften und der angegebenen Befestigung möge sich in einem Gleichgewichtszustande befinden, bei welchem zwischen zwei benachbarten Fasern nirgends ein Druck statthat**). Wie müssen die an den Grundflächen angreifenden Druckkräfte beschaffen sein, damit sie ein derartiges Gleichgewicht herstellen?

Ein spezielles Beispiel dieser Art lernten wir in § 68, 3 kennen. Wenn ein prismatischer Körper in der einen Grundfläche passend befestigt, also mit einem gleichmäfsigen Gegendruck gegen den inneren Druck versehen, an der anderen aber einem gleichmäfsigen Druck (Zug) ausgesetzt wird, so ist die Deformation im Gleichgewichtszustande eine derartige, dafs nur in der Längsrichtung Druckkräfte wirken, zwischen zwei Längs-

*) Mém. s. l. torsion des prismes, 1855; M. s. l. flexion des prismes, 1856; Liouv. Journ. (2), B. I. Vgl. mit dem Folgenden die Darstellung bei Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper, Leipzig 1862.

**) Es sei nochmals daran erinnert, dafs die Deformation in ihrer Gesamtheit nur sehr kleine Dimensionen haben darf.

fasern also kein Druck stattfindet. Wir werden diesen Gleichgewichtszustand als Spezialfall des allgemeinen Problems wieder antreffen.

2. Der befestigte Punkt der einen Grundfläche werde als Nullpunkt des Koordinatensystems, die Richtung des befestigten Linienelementes als x-Achse angenommen; die z-Achse laufe den Kanten des Prismas parallel und ihre nach der andern Grundfläche gehende Hälfte werde als die positive angesehen. Voraussetzungsmäfsig müssen dann für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ auch die Komponenten u, v, w der Verrückung verschwinden. Die Komponenten der Verschiebung eines benachbarten Punktes der Grundfläche nach der x, y, z-Richtung sind, da hier $dz = 0$ zu nehmen ist,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 dy,$$
$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 dy,$$
$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 dx + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 dy.$$

Da kein Punkt des Flächenelementes, welches den Nullpunkt umgiebt, eine Verschiebung in der z-Richtung erfahren soll, so mufs die letzte Komponente verschwinden, d. h. es mufs

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 = 0$$

sein. Da das in die x-Achse fallende benachbarte Linienelement nicht gedreht werden soll, so mufs die zweite Komponente für einen Punkt dieses Elementes, d. h. für $dy = 0$ verschwinden, es mufs also

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = 0$$

sein. Es sind daher für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ die Bedingungen zu erfüllen:

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} u &= 0, & v &= 0, & w &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial w}{\partial y} &= 0. \end{aligned}\right.$$

Die Grenzbedingungen § 68, (26) können wir nicht nur auf die **Grenzflächen** des Prismas, sondern auch auf die **Seitenflächen** der **einzelnen Fasern** anwenden. Für die Seitenflächen dieser Fasern wie des Prismas müssen die Normaldrucke verschwinden. Die (nach aufsen gehende) Normale n steht alsdann immer, von infinitesimalen Unterschieden in der Richtung abgesehen, auf der z-Achse senkrecht, während

$$\cos(n, x) = \sin(n, y)$$

ist. Setzen wir

$$(2) \qquad (n, x) = \lambda,$$

so haben wir für jene Seitenflächen

$$(3)\quad \begin{cases} X_x \cos\lambda + X_y \sin\lambda = 0, \\ Y_x \cos\lambda + Y_y \sin\lambda = 0, \\ Z_x \cos\lambda + Z_y \sin\lambda = 0. \end{cases}$$

3. Den beiden ersten der Gleichungen (3) wird durch die Annahme

$$(4)\quad X_x = X_y = Y_y = 0$$

genügt. Dieselbe sagt aus, dafs zwei auf einem Querschnitte des Prismas gelegene Teilchen überhaupt keinen Druck, weder einen normalen (X_x, Y_y) noch einen seitlichen (X_y) aufeinander ausüben. Unter dieser Annahme wollen wir allein das Problem weiter behandeln.

Fügt man die Relationen (4) in § 68, (23) ein, so erhält man

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \vartheta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \vartheta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases}$$

Aus den beiden ersten dieser Gleichungen folgt weiter durch Subtraktion

$$(6)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

und durch Addition

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)(1 + 2\vartheta) + 2\vartheta \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

oder infolge von (6)

$$(7)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\vartheta}{1 + 2\vartheta} \frac{\partial w}{\partial z}$$

oder nach § 68, (14)

$$(8)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\mu \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Die dritte Gleichung von § 68, (23) liefert dann weiter

$$(9)\quad Z_z = -2K \frac{\partial w}{\partial z}\left(1 + \frac{\vartheta}{1 + 2\vartheta}\right) = -2K(1 + \mu)\frac{\partial w}{\partial z} = -E\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Die sehr einfachen Relationen (8) und (9) hätten auch unmittelbar hingeschrieben werden können. Da eine Normaldruckkraft nur in der Richtung der z-Achse wirksam ist, so können die Dilatationen nur § 68, 3 und 4 entsprechend beschaffen sein.

Aus (8) folgt

$$(10)\quad \sigma = \frac{\partial w}{\partial z}(1 - 2\mu) = \frac{\partial w}{\partial z}\frac{1}{1 + 2\vartheta}.$$

Aus der dritten Gleichung (5) und (6) folgern wir weiter durch Differentiation

$$(11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \end{cases}$$

also auch

$$(12)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Aus den Elastizitätsgleichungen § 68, (24) wird daher im Falle des Gleichgewichtes

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0. \end{cases}$$

Von den Grenzbedingungen (3) bleibt nur die dritte zu befriedigen, die nach § 68, (23) in

$$(14)\qquad \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos\lambda + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\sin\lambda = 0$$

übergeht. Zu (13) und (14) treten noch die Gleichungen (8) und die letzte Gleichung (5), die wir hier nochmals hersetzen:

$$(15)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\mu\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Die Gleichungen (13) und (15) überschreiten an Zahl bereits die gesuchten Gröfsen u, v, w; das Problem ist also überbestimmt, und seine thatsächliche Lösbarkeit mufs der Besonderheit der Gleichungen zugeschrieben werden.

4. Differentiieren wir die beiden ersten Gleichungen (13) nach x, resp. nach y, die erste von (15) dagegen zweimal nach z, so erhalten wir nach Elimination von u und v die Beziehungen

$$(16)\qquad \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial x^2} = \mu\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial z \partial y^2} = \mu\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}.$$

Differentiieren wir die dritte Gleichung (13) nach z und benutzen (16), so erhalten wir

$$2(1+\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = 0,$$

also, wenn

$$(17)\qquad \frac{\partial w}{\partial z} = w'$$

gesetzt wird,

$$(18)\qquad \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} = 0.$$

Durch Differentiation der beiden ersten Gleichungen (13) nach y, resp. nach x erhalten wir

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial z^2} = -\frac{\partial^3 w}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$$

und aus der letzten Gleichung (15) durch zweimalige Differentiation nach z

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial z^2} = 0.$$

Daher ist

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\,\partial z^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x\,\partial z^2} = 0 \tag{19}$$

und

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x\,\partial y} = 0. \tag{20}$$

Aus (18) und (20) geht hervor, dafs w' in x, y, z eine ganze Funktion ist, in der die einzelnen Variabeln nur in der ersten Potenz vorkommen; wegen (20) kann selbst das Produkt xy darin nicht auftreten. Wir können daher zunächst schreiben

$$\frac{\partial w}{\partial z} = w' = a_0 + a_1 x + a_2 y + z\,(b_0 + b_1 x + b_2 y), \tag{21}$$

und durch Integration folgt hieraus

$$w = z\,(a_0 + a_1 x + a_2 y) + \frac{z^2}{2}\,(b_0 + b_1 x + b_2 y) + f(x, y), \tag{22}$$

worin die Koeffizienten und die Funktion f vorläufig willkürlich sind.

Setzen wir w aus (22) in die letzte Gleichung (13) ein, so ergiebt sich jedoch für $f(x, y)$ die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} + 2\,(b_0 + b_1 x + b_2 y) = 0. \tag{23}$$

Es liegt nahe, durch Absonderung einer ganzen Funktion von $f(x, y)$ an Stelle des letzteren eine Funktion einzuführen, welche einer einfacheren Differentialgleichung genügt. In der That überzeugt man sich sofort, dafs, wenn

$$f(x, y) = \Omega(x, y) - \left(b_0\,\frac{x^2 + y^2}{2} + b_1 x y^2 + b_2 x^2 y\right) \tag{24}$$

gesetzt wird, Ω der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0 \tag{25}$$

Genüge leistet.

Hiernach ist

$$\left\{\begin{aligned} w = {} & z\,(a_0 + a_1 x + a_2 y) + \frac{z^2}{2}\,(b_0 + b_1 x + b_2 y) \\ & - \left(b_0\,\frac{x^2 + y^2}{2} + b_1 x y^2 + b_2 x^2 y\right) + \Omega. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Damit den Gleichungen (1) Genüge geschieht, mufs für $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$

$$\Omega_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)_0 = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)_0 = 0 \tag{27}$$

sein.

Aus der ersten Gleichung (15) folgt nunmehr

$$(28)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\mu\,[a_0 + a_1 x + a_2 y + z\,(b_0 + b_1 x + b_2 y)],$$

also

$$(29)\qquad \begin{cases} u = -\mu\left[a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + a_2 xy + z\left(b_0 x + \frac{b_1}{2}x^2 + b_2 xy\right)\right] + f_1(y, z), \\ v = -\mu\left[a_0 y + a_1 xy + \frac{a_2}{2}y^2 + z\left(b_0 y + b_1 xy + \frac{b_2}{2}y^2\right)\right] + f_2(x, z). \end{cases}$$

Führt man diese Werte in (12), dann in die beiden ersten Gleichungen (13) ein, so erkennt man, daſs f_1 und f_2 ganze Funktionen sind, welche in y, resp. in x höchstens vom zweiten, in z höchstens vom dritten Grade sind. Man erhält nämlich mittels (12)

$$(30)\qquad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = \mu\,(a_1 + b_1 z), \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = \mu\,(a_2 + b_2 z),$$

also

$$(31)\qquad \begin{cases} f_1 = \frac{\mu y^2}{2}(a_1 + b_1 z) + \varphi_1(z)\,y + \psi_1(z), \\ f_2 = \frac{\mu x^2}{2}(a_2 + b_2 z) + \varphi_2(z)\,x + \psi_2(z); \end{cases}$$

dann durch Einführung in (13) unter Benutzung von (25)

$$(32)\qquad \begin{cases} \frac{\partial^2 f_1}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}\,y + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = -a_1 - b_1 z, \\ \frac{\partial^2 f_2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}\,x + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = -a_2 - b_2 z, \end{cases}$$

also

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial z^2} = -a_1 - b_1 z, \qquad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial z^2} = -a_2 - b_2 z,$$

d. h.

$$(33)\qquad \begin{cases} \varphi_1 = c_1 + c_2 z, \quad \varphi_2 = d_1 + d_2 z, \\ \psi_1 = -\frac{a_1}{2}z^2 - \frac{b_1}{6}z^3 + c + c_3 z, \quad \psi_2 = -\frac{a_2}{2}z^2 - \frac{b_2}{6}z^3 + d + d_3 z. \end{cases}$$

Beachtet man noch die Gleichungen (1), so wird aus (29)*)

$$(34)\qquad \begin{cases} u = -\mu\left[a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + a_2 xy + z\left(b_0 x + \frac{b_1}{2}x^2 + b_2 xy\right)\right] \\ \quad + \frac{\mu y^2}{2}(a_1 + b_1 z) + y\,(c_1 + c_2 z) + c_3 z - \frac{a_1}{2}z^2 - \frac{b_1}{6}z^3, \\ v = -\mu\left[a_0 y + a_1 xy + \frac{a_2}{2}y^2 + z\left(b_0 y + b_1 xy + \frac{b_2}{2}y^2\right)\right] \\ \quad + \frac{\mu x^2}{2}(a_2 + b_2 z) + d_2 xz + d_3 z - \frac{a_2}{2}z^2 - \frac{b_2}{6}z^3. \end{cases}$$

Durch Einführung in die letzte Gleichung (15) findet man

$$(35)\qquad c_1 = 0, \qquad d_2 = -c_2.$$

*) Es ergiebt sich nämlich mittels (1), daſs $c = 0$, $d = 0$, $d_1 = 0$ ist.

Durch die gefundenen Werte für u, v, w wird den Gleichungen (13), (15), (1) vollständig genügt. u und v sind in x, y, z ganze Funktionen; w ist nur in z eine ganze Funktion, während x und y noch in einer von der Begrenzung des Prismas abhängigen Funktion Ω vorkommen.

5. Die Grenzgleichung (14), in welcher λ aus der Gleichung der Kontour eines Querschnittes zu berechnen ist, nimmt jetzt die Gestalt an

$$(36)\left\{\begin{aligned}&\left[-b_0(1+\mu)x-\frac{b_1}{2}(\mu x^2+(2-\mu)y^2)-b_2(2+\mu)xy+c_2y+c_3+\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right]\cos\lambda\\&+\left[-b_0(1+\mu)y-b_1(2+\mu)xy-\frac{b_2}{2}(\mu y^2+(2-\mu)x^2)-c_2x+d_3+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right]\sin\lambda=0.\end{aligned}\right.$$

Nun ist aber, wenn mit n die nach aufsen gehende Normalrichtung der Grenzkurve bezeichnet wird,

$$(37)\qquad \frac{\partial\Omega}{\partial x}\cos\lambda+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\sin\lambda=\frac{\partial\Omega}{\partial x}\frac{dx}{dn}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\frac{dy}{dn}=\frac{d\Omega}{dn},$$

d. h. die Gleichung (36) bestimmt den Differentialquotienten von Ω an der Grenze nach der Normalrichtung.

Die Bedingungen (25), die erste (27) und (36) für Ω sind wesentlich identisch mit denjenigen, welche in § 44, 3 zur Bestimmung einer Potentialfunktion als hinreichend nachgewiesen wurden; wegen (27) insbesondere bleibt keine Konstante willkürlich. Wir können daher sagen, dafs Ω durch die angegebenen Bedingungen eindeutig bestimmt ist.

Die Konstanten c_3 und d_3 sind durch die Gleichung des Querschnittes bestimmt, falls die übrigen Konstanten willkürlich angenommen werden. Mittels jener Gleichung kann man nämlich in (36) y und λ als Funktionen von x allein darstellen, worauf (36) identisch befriedigt sein mufs; wenn also Ω (als Funktion der Konstanten und von x, y) dargestellt ist, so müssen sich c_3 und d_3 berechnen lassen*).

6. Aus (36) geht hervor, dafs $\frac{d\Omega}{dn}$ und damit auch Ω die Konstanten b_0, b_1, b_2, c_2, c_3, d_3 linear enthalten. Die vier ersten dieser Konstanten sind bis jetzt als willkürlich und namentlich als von der Form des Querschnittes unabhängig anzunehmen. Ist dies wirklich der Fall, so müssen sich die Gleichungen (25) und (36), nachdem Ω in

$$(38)\qquad \Omega=b_0\Omega_0+b_1\Omega_1+b_2\Omega_2+c_2\Omega_3$$

zerlegt**) ist, in vier zerfällen lassen, indem die Faktoren von b_0, b_1, b_2, c_2 einzeln der Null gleich gesetzt werden. Dies führt jedoch auf einen Widerspruch. Die Gleichung, welche sich durch Nullsetzen des Faktors von b_0 in (36) ergiebt, lautet nämlich

---

*) Enthält eine Gleichung nur eine Unbekannte x, so kann man diese, noch mit einem Faktor multipliziert, ausrechnen; man findet etwa $Mx=N$. Soll nun die Gleichung identisch befriedigt sein, so mufs $M=0$, $N=0$ sein, und mittels dieser Gleichungen lassen sich zwei Buchstabenausdrücke, welche in ihnen vorkommen, durch die übrigen darstellen.

**) c_3 und d_3 denkt man sich, wie vorhin angegeben, durch die übrigen bestimmenden Gröfsen ausgedrückt. Eine weitere Konstante ist in (38) wegen der Willkürlichkeit von b_0 u. s. w. nicht beizufügen.

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial x} \cos\lambda + \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} \sin\lambda = (1 + \mu)(x\cos\lambda + y\sin\lambda)$$

oder

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial \Omega_0}{\partial y}\frac{dy}{dn} = (1+\mu)\left(x\frac{dx}{dn} + y\frac{dy}{dn}\right)$$

oder

$$\frac{d\Omega_0}{dn} = \frac{1+\mu}{2}\frac{d}{dn}(x^2+y^2)$$

oder nach ausgeführter Integration

$$\Omega_0 = \frac{1+\mu}{2}(x^2+y^2) + \text{Const.} \tag{39}$$

Aus (25) folgt aber

$$\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial y^2} = 0, \tag{40}$$

und dieser Gleichung genügt der Wert von Ω_0 aus (39) nicht. Wir beseitigen diesen Widerspruch dadurch, dafs wir

$$b_0 = 0 \tag{41}$$

setzen.

Nach alledem erhalten wir für u, v, w, wenn wir noch c statt c_2, d statt c_3, e statt d_3 schreiben, aus (34) und (26):

$$\tag{42} \left\{\begin{aligned} u &= -\mu\left[a_0 x + \frac{a_1}{2}(x^2-y^2) + a_2 xy + z\left(\frac{b_1}{2}(x^2-y^2) + b_2 xy\right)\right] \\ &\quad + cyz + dz - \frac{a_1}{2}z^2 - \frac{b_1}{6}z^3, \\ v &= -\mu\left[a_0 y + a_1 xy - \frac{a_2}{2}(x^2-y^2) + z\left(b_1 xy - \frac{b_2}{2}(x^2-y^2)\right)\right] \\ &\quad - cxz + ez - \frac{a_2}{2}z^2 - \frac{b_2}{6}z^3, \\ w &= z(a_0 + a_1 x + a_2 y) + \frac{z^2}{2}(b_1 x + b_2 y) - xy(b_1 y + b_2 x) + \Omega, \end{aligned}\right.$$

während sich (36) auf

$$\tag{43} \left\{\begin{aligned} &\left[-\frac{b_1}{2}(\mu x^2 + (2-\mu)y^2) - b_2(2+\mu)xy + cy + d + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right]\cos\lambda \\ &+\left[-b_1(2+\mu)xy - \frac{b_2}{2}(\mu y^2 + (2-\mu)x^2) - cx + e + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right]\sin\lambda = 0 \end{aligned}\right.$$

reduziert.

Hierin sind d und e durch die Gleichung des Querschnittes bestimmt, während die übrigen sechs Konstanten a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c unabhängig sind und die spezielle Natur des Problems bestimmen.

7. Für die Druckkomponenten berechnen wir unter Ersetzung von ϑ und K durch μ und E nach § 68, (23) die Ausdrücke

$$
(44)\begin{cases}
X_x = X_y = Y_y = 0, \\
Z_z = -E\,[a_0 + a_1 x + a_2 y + z\,(b_1 x + b_2 y)], \\
X_z = -\dfrac{E}{2(1+\mu)}\Big[-\dfrac{b_1}{2}(\mu x^2+(2-\mu)y^2)-b_2(2+\mu)xy+cy+d+\dfrac{\partial\Omega}{\partial x}\Big], \\
Y_z = -\dfrac{E}{2(1+\mu)}\Big[-b_1(2+\mu)xy-\dfrac{b_2}{2}(\mu y^2+(2-\mu)x^2)-cx+e+\dfrac{\partial\Omega}{\partial y}\Big].
\end{cases}
$$

Setzt man hierin einmal $z = 0$, dann $z = l$, wenn l die Länge des Prismas bezeichnet, so erhält man die Druckkräfte, welche in einem Punkte der beiden Endflächen thätig sind. Soll das Gleichgewicht wirklich statthaben, so müssen diesen Komponenten gleiche, umgekehrt gerichtete entgegengesetzt werden. Hierdurch sind die Kräfte bestimmt, welche das Prisma in einen vorgelegten, den vorausgeschickten Bedingungen entsprechenden Zustand versetzen.

8. In Betreff der Auswertung der gefundenen Resultate, zu welcher wir jetzt schreiten, gelten folgende Bemerkungen. Die Gleichungen (42) u. s. w. enthalten sechs Konstanten, a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c, über welche willkürlich verfügt werden kann. Wir dürfen uns nun die gesamte Deformation aus sechs einzelnen zusammengesetzt denken, die wir erhalten, wenn wir je fünf jener Konstanten der Null gleichsetzen. Dann bleibt jedesmal nur eine Konstante zurück, welche nur die Gröfse, nicht die Art der Deformation bestimmt. In der Folge werden wir dies Verfahren sachentsprechend etwas modifizieren, wozu die Symmetrie des Vorkommens von a_1 und a_2, b_1 und b_2 einlädt.

Die Hauptschwierigkeit, die bei einzelnen Problemen in Wegfall kommt, besteht in der Ermittlung der von der Form des Querschnittes abhängigen Gröfsen Ω, d, e; nur für wenige Fälle läfst sich die Rechnung durchführen.

Aufser der Ermittlung der Drucke, welche auf die Grundflächen ausgeübt werden müssen, um eine bestimmte Deformation hervorzurufen, interessiert uns noch die Gestalt, welche eine zu den Seitenkanten parallele Gerade und ein zu dieser senkrechter Querschnitt durch die Deformation annehmen. Die Koordinaten des im ursprünglichen Zustande in x, y, z befindlichen Punktes sind nach der Deformation

$$
(45) \qquad x' = x + u, \quad y' = y + v, \quad z' = z + w.
$$

Will man nun die Gleichung irgend einer deformierten Kurve oder Fläche haben, so braucht man nur aus (42) und (45) u, v, w zu eliminieren, auf diese Weise x, y, z durch x', y', z' auszudrücken und die gefundenen Werte für x, y, z in die ursprüngliche Gleichung der Kurve oder Fläche einzuführen.

In unseren speziellen Fällen können wir uns hierbei einige Vernachlässigungen gestatten. Bei der Berechnung der Gestalt der deformierten Längsgeraden dürfen wir in den ohnehin sehr kleinen Gröfsen u und v die Gröfse z durch die wenig von ihr verschiedene z' ersetzen; der daraus

resultierende Fehler wird nur von höherer Ordnung klein sein. Die Gleichungen

(46) $$x' = x + u, \quad y' = y + v$$

geben nach jener Ersetzung die Gleichungen der deformierten Längsgeraden, weil für sie x und y Konstanten sind.

Als Gleichung des deformierten Querschnittes, für welchen z als Konstante anzusehen ist, darf

(47) $$z' = z + w$$

angenommen werden, nachdem in w vorher x und y durch x' und y' ersetzt wurden.

9. Setzen wir alle willkürlichen Konstanten aufser a_0 gleich Null, so gehen die Gleichungen (42) über in

(48) $$\begin{cases} u = -\mu a_0 x + dz, \\ v = -\mu a_0 y + cz, \\ w = \quad a_0 z \quad + \Omega. \end{cases}$$

In diesen Ausdrücken ist aber

$$d = e = 0, \quad \Omega = 0$$

zu setzen; denn hierdurch wird Gleichung (43) nebst den übrigen Bedingungen, welchen Ω zu genügen hat, identisch befriedigt. Daher wird

(49) $$\begin{cases} u = -\mu a_0 x, \\ v = -\mu a_0 y, \\ w = \quad a_0 z. \end{cases}$$

Aus (44) folgt weiter

(50) $$Z_z = E a_0, \quad \text{also konstant}, \quad X_z = Y_z = 0.$$

Die Deformation wird durch den auf alle Punkte der freien Grundfläche gleichmäfsig ausgeübten Normaldruck oder Zug Ea_0 hervorgerufen. Wir erkennen in ihr diejenige wieder, von welcher wir bei der Entwicklung der Elastizitätstheorie ausgingen; sie möge als einfache Ausdehnung bezeichnet werden. Längsgeraden bleiben gerade, ebene Querschnitte eben.

10. Wir wollen weiter annehmen, dafs alle willkürlichen Konstanten bis auf c verschwinden. Aus (42), (43) und (44) wird

(51) $$\begin{cases} u = \quad cyz + dz, \\ v = -cxz + ez, \\ w = \quad \Omega, \\ \left(cy + d + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right) \cos\lambda + \left(-cx + e + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right) \sin\lambda = 0, \\ Z_z = 0, \\ X_z = -\frac{E}{2(1+\mu)}\left(cy + d + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right), \\ Y_z = -\frac{E}{2(1+\mu)}\left(-cx + e + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Diese Gleichungen nehmen eine wesentlich einfachere Gestalt an, wenn wir den Koordinatenanfangspunkt in der xy-Ebene, d. h. den befestigten Punkt, geeignet wählen. Setzen wir nämlich

$$(52)\qquad x = \xi + \frac{e}{c}, \quad y = \eta - \frac{d}{c},$$

so erhalten wir, wenn auch Ω entsprechend transformiert wird,

$$(53)\begin{cases} u = c\eta z, \quad v = -c\xi z, \quad w = \Omega, \\ \left(c\eta + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)\cos\lambda + \left(-c\xi + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)\sin\lambda, \\ Z_z = 0, \quad X_z = -\frac{E}{2(1+\mu)}\left(c\eta + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right), \quad Y_z = -\frac{E}{2(1+\mu)}\left(-c\xi + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Die Verschiebung eines Punktes in der Richtung der Längsachse des Prismas ist von z unabhängig, d. h. alle Teilchen, welche derselben Faser angehören, erfahren in dieser Richtung die gleiche Verschiebung. Da c eine sehr kleine Gröfse sein mufs, um u und v sehr klein zu machen, so stellen die Ausdrücke für u und v nach § 52, 3, wo Drehungen um sehr kleine Winkel behandelt werden, eine Drehung des ganzen Querschnittes um die neue z-Achse dar, deren Gröfse z proportional ist. Die gegenseitige Drehung gleichweit voneinander abstehender Querschnitte ist die gleiche. Man kann sich also jeden Querschnitt in seiner Ebene um einen Winkel gedreht denken, welcher seinem Abstande von der befestigten Grundfläche proportional ist, und dann an ihm die nötigen Deformationen in der Längsrichtung anbringen. Die Gröfsen der letzteren, sowie die Lage der Drehungsachse — der neuen z-Achse — im Prisma hängen lediglich von der Gestalt des Querschnittes und der zu c proportionalen Gröfse der Drehung ab. Die gesamte Deformation wird als Torsion bezeichnet. Um sie hervorzurufen, brauchen an den Grundflächen keine Normalkräfte angebracht zu werden; es sind nur seitliche Kräfte nötig, welche sich eventuell auf Kräftepaare reduzieren können. Da die Längenausdehnungen und die Flächeninhalte der Querschnitte keine Änderungen erfahren, so bleibt das Volumen des Körpers ungeändert. Dies wird auch analytisch evident, wenn man den Ausdruck für die räumliche Dilatation

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

bildet; derselbe ist gleich Null.

Bemerkenswert ist noch, dafs die Gleichungen (51) die Elastizitätskonstanten nur in der Kombination

$$\frac{E}{2(1+\mu)} = K$$

enthalten. Die Torsion ist also nur von *einer* Konstanten K abhängig*).

*) Gewöhnlich bezeichnet man die Gröfse $\frac{K\pi}{2}$ als Torsionskoeffizienten.

Die Gleichung eines deformierten Querschnittes ist

$$z' = z + \Omega,$$

worin z als Konstante, x und y an Stelle von x' und y' als Variable anzusehen sind. Die Gleichungen einer deformierten Längsgeraden sind in Bezug auf das zweite Koordinatensystem

$$\xi' = \xi + c\eta\zeta', \quad \eta' = \eta - c\xi\zeta',$$

worin ξ und η Konstante sind. Jede Längsgerade bleibt also nach der Deformation eine Gerade.

Für $\xi = \eta = 0$ wird auch $\xi' = \eta' = 0$, d. h. die Längsgerade, welche die Drehungsachse für alle Querschnitte darstellt, bleibt ungeändert. Jede Kreiscylinderfläche, welche dieselbe zur Achse hat, wird bis auf verschwindend kleine Gröfsen höherer Ordnung in sich selbst transformiert; genau genommen geht sie, wie leicht nachzuweisen, in ein einschaliges Hyperboloid über.

11. Am einfachsten und klarsten treten die Torsionsverhältnisse bei dem Kreiscylinder hervor, dessen eine Grundfläche in ihrem Mittelpunkte befestigt ist. Ist r der Radius des Cylinders, so wird

$$\cos\lambda = \frac{x}{r}, \quad \sin\lambda = \frac{y}{r},$$

und die vierte Gleichung (51) geht über in

$$dx + ey + x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0. \tag{54}$$

Wegen der eindeutigen Bestimmung von Ω durch die Bedingungen genügt es, einen passenden Wert für dasselbe zu erraten. Der Gleichung (54) genügt

$$\Omega = -dx - ey + \text{Const.};$$

aus (27) geht aber hervor, dafs

$$d = e = 0, \quad \Omega = 0 \tag{55}$$

ist. Wir haben daher die einfachen Gleichungen

$$\begin{cases} u = cyz, \quad v = -cxz, \quad w = 0; \\ Z_z = 0, \quad X_z = -\dfrac{Ecy}{2(1+\mu)}, \quad Y_z = \dfrac{Ecx}{2(1+\mu)}. \end{cases} \tag{56}$$

Hier erfahren sämtliche Querschnitte nur eine Drehung um die Cylinderachse, keine Deformation. Die äufsere Gestalt des Cylinders bleibt ganz ungeändert. Denkt man sich den Cylinder aus unendlich vielen, gleich dicken Kreisschichten zusammengesetzt, so erhält man die Deformation, indem man jede Schicht gegen die vorhergehende um denselben unendlich kleinen Winkel um die Achse dreht.

Die Werte für X_z und Y_z zeigen, dafs auf alle Punkte der Grundflächen die gleiche drehende Kraft auszuüben ist. Man kann sich die eine Grundfläche vollständig in allen Punkten befestigt denken, während an der anderen, ebenfalls mit ihr unveränderlich verbunden, eine feste

Platte angebracht zu denken ist, auf welche ein Drehungsmoment in Bezug auf die Cylinderachse ausgeübt wird.

Die Beobachtung des Torsionswiderstandes eines cylindrischen Drahtes kann zur Bestimmung der Konstante

$$K = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

dienen; wird aufserdem E durch Längenausdehnung bestimmt, so kann die zweite Konstante μ berechnet werden.

12. Lassen wir alle willkürlichen Konstanten aufser a_1 verschwinden, so wird zunächst aus (43)

$$\left(d + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right)\cos\lambda + \left(e + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)\sin\lambda = 0$$

oder

$$d\frac{dx}{dn} + e\frac{dy}{dn} + \frac{d\Omega}{dn} = 0,$$

woraus

$$\Omega = -dx - ex + \text{Const.}$$

folgt. Aus (27) schliefsen wir weiter, dafs

$$d = e = 0, \quad \Omega = 0 \tag{57}$$

ist.

Aus (42) und (44) wird hiernach

$$\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{a_1}{2}\left[\mu(x^2 - y^2) + z^2\right],\\ v &= -a_1\mu xy,\\ w &= a_1 xz;\\ Z_z &= -Ea_1 x, \quad X_z = Y_z = 0. \end{aligned}\right. \tag{58}$$

Um der Vorstellung einen festeren Anhalt zu gewähren, denken wir uns, ohne deshalb die Schwere in Betracht zu ziehen, die positive x-Achse vertikal nach oben, die y- und z-Achse also horizontal gerichtet. Die Kräfte, welche den durch (58) definierten Deformationszustand des Prismas hervorrufen, kann man dann folgendermafsen erzeugen. Im Nullpunkte ist die eine Grundfläche an einer vertikalen, unverschiebbaren Platte befestigt; die gesamte Grundfläche soll immer mit der Platte in Berührung bleiben, während seitliche Verschiebungen auf ihr möglich sind. Dies stimmt zu (58), da für $z = 0$ auch $w = 0$ wird. Mit der anderen Grundfläche ist eine zweite Platte so verbunden, dafs sie im Punkte $x = 0$, $y = 0$, $z = l$ immer mit ihr im Zusammenhange bleibt; im übrigen soll die Grundfläche sie nur berühren, während seitliche Verschiebungen wieder zulässig sind. An dieser Platte soll ein Drehungsmoment angreifen, dessen Achse durch den Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = l$ geht und zur y-Achse parallel läuft. Diese Vorrichtung erzeugt mit grofser Annäherung die Deformation (58), wenn dem Drehungsmoment eine entsprechende Stärke und Richtung verliehen wird; vernachlässigt

werden dabei allerdings die Änderungen, welche die Druckkräfte durch die kleinen Verschiebungen der Grundfläche längs der Platte erleiden. Soll a_1 positiv sein, so mufs das Drehungsmoment die oberen Fasern zu verlängern, die unteren zu verkürzen streben. In der That überzeugt man sich unmittelbar davon, dafs diese Anordnung in jedem Punkte der Grundfläche die Kraft Z_z gemäfs (58) begründet und dafs die Verschiebung w dem entsprechend ausfällt. Die ganze Deformation ist eine Biegung*) (erster Art). Das System erscheint im allgemeinen nach unten gebogen.

Alle Punkte des Prismas, für welche ursprünglich $x = 0$ oder $y = 0$ ist, erleiden keine seitliche Verschiebung, da hier $v = 0$ wird. Gerade, welche parallel zu den Seitenkanten des Prismas in den Ebenen $x = 0$ oder $y = 0$ laufen, werden in ihrer Vertikalebene gebogen.

Besonders interessiert uns die Deformation der Geraden, welche im ursprünglichen Zustande die z-Achse bildet. Für sie ist

$$u = -\frac{a_1 z^2}{2}, \quad v = 0, \quad w = 0.$$

Ihre Länge erfährt — wie diejenige aller Geraden der Ebene $x = 0$ — keine Änderung. Sie erscheint nach unten gebogen derart, dafs ein Punkt von ihr desto tiefer liegt, je gröfser sein z ist. Die Kurve, in welche die z-Achse deformiert wird, liegt in der Ebene $y = 0$; sie hat die Gleichung

$$x' = -\frac{a_1}{2} z^2 \tag{59}$$

und ist somit eine Parabel. Freilich könnte man sie wegen der Geringfügigkeit der Krümmung auch recht wohl mit einem Kreisbogen identifizieren.

13. Für $z = l$ haben wir

$$x' = -\frac{a_1 l^2}{2}. \tag{60}$$

Diese Depression des Endpunktes jener Achse bezeichnet man als den Biegungspfeil; er ist dem Quadrate der Länge des Prismas proportional.

Ist das Prisma ein rechtwinkliges Parallelepipedon, dessen Kanten teils horizontal, teils vertikal laufen, dessen Höhe a, dessen Breite b ist und welches im Mittelpunkte der einen Grundfläche befestigt ist, so können wir leicht das Gesamtdrehungsmoment M berechnen, welches auf die freie Grundfläche einwirken mufs. Zu diesem Zwecke haben wir nur auf Grundlage von (58) die Drehungsmomente, welche in den einzelnen Punkten angreifen, zu summieren. Wir erhalten

---

*) Diese Art der Biegung ist von derjenigen beträchtlich verschieden, welche ein am einen Ende befestigter Stab durch ein am andern Ende angehängtes Gewicht erleidet.

$$M = 2Ea_1 \int_0^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} x\,dx\,dy = \frac{Ea_1 a^2 b}{4},$$

also

$$a_1 = \frac{4M}{Ea^2 b}. \tag{61}$$

Hieraus schliefsen wir nach (60), dafs der Biegungspfeil dem Drehungsmomente direkt, der Breite und dem Quadrate der Höhe umgekehrt proportional ist.

14. Ein Querschnitt des Prismas, welcher im ursprünglichen Zustande die Gleichung $z = C$ hat, erhält nach der Deformation die Gleichung

$$z' = C + a_1 x C,$$

bleibt also eben. Dagegen wird seine Kontur deformiert.

Zunächst findet eine Kompression, resp. eine Ausdehnung in der Breitenrichtung für Teile des Prismas statt, welche in der Längenrichtung eine Ausdehnung, resp. eine Kompression erfahren. Für positive x hat nämlich v das umgekehrte, für negative das gleiche Zeichen wie y.

Besonders merkwürdig ist die Deformation, welche eine horizontale Gerade in der Breitenrichtung erfährt. Aus der ersten Gleichung (58) geht hervor, dafs die Senkung eines Punktes desto geringer ausfällt, je gröfser y ist; für relativ kleine x und z kann sogar eine Erhebung über das ursprüngliche Niveau stattfinden. Die Gestalt einer ursprünglich horizontalen Ebene wird sattelförmig; in der Längsrichtung ist sie nach unten konkav gekrümmt, in der Breitenrichtung aber konvex. Für die y-Achse insbesondere ist

$$u = \frac{a_1 \mu y^2}{2}. \tag{62}$$

Der aufwärts gerichtete Biegungspfeil der hierdurch indizierten Krümmung verhält sich bei gleicher Entfernung vom Nullpunkte zu dem abwärts gerichteten (60) wie

$$\mu : 1,$$

also ebenso wie beim Zuge die seitliche Ausdehnung zur Längenausdehnung.

Die Gleichung der ursprünglichen Ebene $x = 0$ wird nach der Deformation

$$x' = \frac{a_1}{2}(\mu y^2 - z^2); \tag{63}$$

sie stellt, wie man schon an ihren parabolischen Durchschnitten mit den Ebenen $y = 0$ und $z = 0$ erkennt, ein hyperbolisches Paraboloid dar.

15. Lassen wir alle willkürlichen Konstanten aufser b_1 verschwinden, so erhalten wir aus (42), (43) und (44)

$$
(64)\quad \begin{cases}
u = -\frac{\mu b_1 z}{2}(x^2 - y^2) + dz - \frac{b_1}{6} z^3, \\
v = -\mu b_1 xyz + ez, \\
w = \frac{b_1 x}{2}(z^2 - 2y^2) + \Omega; \\
\left[-b_1(\mu x^2 + (2-\mu)y^2) + d + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right]\cos\lambda \\
\quad + \left[-b_1(2+\mu)xy + e + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right]\sin\lambda = 0, \\
Z_z = -Eb_1 xz, \\
X_z = -\frac{E}{2(1+\mu)}\left[-\frac{b_1}{2}(\mu x^2 + (2-\mu)y^2) + d + \frac{\partial \Omega}{\partial x}\right], \\
Y_z = -\frac{E}{2(1+\mu)}\left[-b_1(2+\mu)xy + e + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right].
\end{cases}
$$

Diese Deformation, die wir als Biegung der zweiten Art bezeichnen wollen, ist von nicht ganz einfachem Charakter und entspricht keiner im Experiment auszuführenden Anordnung vollständig. Immerhin kommt sie der Biegung, welche ein horizontaler, als masselos zu denkender Stab durch ein am freien Ende angehängtes Gewicht erfährt, während das andere Ende befestigt ist, näher, als die vorher besprochene Biegung der ersten Art. Dies zeigt die folgende Interpretation des angegebenen Experimentes. Wie beim vorigen Falle denken wir uns an der freien Endfläche eine Platte angebracht, auf welche ein Drehungsmoment einwirkt. Dieses Drehungsmoment ist dem angreifenden Gewichte und der Gröfse $\sin\lambda$ proportional, wo λ den Winkel bezeichnet, den die Endfläche mit der xy-Ebene bildet. Nimmt man nun — was bei der Kleinheit der gesamten Biegung zulässig ist — an, dafs eine Längsgerade des Prismas in einen Kreisbogen deformiert sei, so wird λ, und bei der Kleinheit dieses Winkels auch $\sin\lambda$, der Koordinate z proportional. Kombiniert man dieses Resultat mit denjenigen von Nr. 12, so gelangt man zu dem in (64) enthaltenen Werte von Z_z. Freilich müssen noch seitliche Komponenten angebracht werden, um die Aufgabe dem de St. Vénant'schen Problem anzupassen.

Für den Biegungspfeil finden wir in unserem Falle

$$
(65)\qquad x' = -dl + \frac{b_1 l^3}{\sigma},
$$

ein Wert, der für hinreichend grofse l der dritten Potenz dieser Gröfse nahezu proportional wird. Dies entspricht denn auch den wirklichen Verhältnissen bei der soeben erörterten Erzeugung der Biegung.

16. Begnügen wir uns mit einer näherungsweise richtigen Abschätzung des Einflusses der äufseren Kräfte (die den Druckkräften an der freien Grundfläche entgegengesetzt sind), so können wir, von der Deformation der Grundfläche absehend, im allgemeinen folgende Vereinfachung eintreten lassen: Wir ersetzen jene Kräfte durch drei Kräftekomponenten

X, Y, Z, welche in dem Schwerpunkte der homogen gedachten Fläche angreifen, und durch drei Drehungsmomente in Bezug auf Parallele zu den Koordinatenachsen, welche durch den Schwerpunkt gelegt sind, M_x, M_y, M_z.

Zur Vereinfachung des Problems möge angenommen werden, dafs der festgelegte Punkt der anderen Grundfläche ihr Schwerpunkt sei. Die x- und y-Achse mögen mit den beiden Hauptträgheitsachsen der Grundfläche zusammenfallen. Auch mögen die Grundflächen in Bezug auf beide Achsen symmetrisch sein.

Unter diesen Umständen hat man für die folgenden, jedesmal über einen beliebigen Querschnitt ausgedehnten Integrale:

$$(66)\quad \begin{cases} \int x\,dx\,dy = \int y\,dx\,dy = 0, \quad \int xy\,dx\,dy = 0, \\ \int x^2 y\,dx\,dy = \int xy^2\,dx\,dy = \int x^3\,dx\,dy = \int y^3\,dx\,dy = 0, \end{cases}$$

während

$$(67)\quad \int dx\,dy = f, \quad \int y^2\,dx\,dy = K, \quad \int x^2\,dx\,dy = L$$

ist, worin f den Flächeninhalt des Querschnittes, K und L die beiden Hauptträgheitsmomente für den Schwerpunkt bezeichnen. Die Richtigkeit der Gleichungen (66) erhellt schon daraus, dafs sich je zwei Elemente der Integrale gegenseitig zerstören.

Von Wichtigkeit für die folgende Betrachtung sind ferner die beiden Integrale

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial x}\,dx\,dy \quad \text{und} \quad \int \frac{\partial \Omega}{\partial y}\,dx\,dy,$$

welche wir analog zu § 43, (8) behandeln. Wir wenden nämlich diese Relation auf zwei Variabeln an und setzen statt φ und ψ x und Ω. So erhalten wir wegen (25)

$$(68)\quad \int \frac{\partial \Omega}{\partial x}\,dx\,dy = -\int x\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\cos\lambda + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\sin\lambda\right)d\sigma$$

und ebenso

$$(69)\quad \int \frac{\partial \Omega}{\partial y}\,dx\,dy = -\int y\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x}\cos\lambda + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\sin\lambda\right)d\sigma.$$

$d\sigma$ bezeichnet hierin ein Element des Umfanges des Querschnittes, und über letzteren ist die Integration zu erstrecken.

Der Wert für

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}\cos\lambda + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\sin\lambda$$

ist aber auf dem Umfange durch die Gleichung (43) bestimmt. Setzen wir

$$(70)\begin{cases}\varphi_1(x,y)=\frac{b_1}{2}[\mu x^2+(2-\mu)y^2]+b_2(2+\mu)xy-cy-d,\\ \varphi_2(x,y)=b_1(2+\mu)xy+\frac{b_2}{2}[\mu y^2+(2-\mu)x^2]+cx-e,\end{cases}$$

so können wir schreiben

$$(71)\qquad \int\frac{\partial\Omega}{\partial x}\,dx\,dy=-\int x\,[\varphi_1(x,y)\cos\lambda+\varphi_2(x,y)\sin\lambda]\,d\sigma.$$

Nach § 43, (4) können wir die rechte Seite wieder in ein Flächenintegral verwandeln und erhalten

$$(72)\qquad\begin{cases}\int\frac{\partial\Omega}{\partial x}\,dx\,dy=\int\left[\frac{\partial\,[x\varphi_1(x,y)]}{\partial x}+\frac{\partial\,[x\varphi_2(x,y)]}{\partial y}\right]dx\,dy,\\ \int\frac{\partial\Omega}{\partial y}\,dx\,dy=\int\left[\frac{\partial\,[y\varphi_1(x,y)]}{\partial x}+\frac{\partial\,[y\varphi_2(x,y)]}{\partial y}\right]dx\,dy.\end{cases}$$

Durch Einführung der Werte (70) und Benutzung der vorhergehenden Relationen ergiebt sich schliefslich

$$(73)\qquad\begin{cases}\int\frac{\partial\Omega}{\partial x}\,dx\,dy=\frac{b_1}{2}[(2-\mu)K+(5\mu+4)L]-df,\\ \int\frac{\partial\Omega}{\partial y}\,dx\,dy=\frac{b_2}{2}[(2-\mu)L+(5\mu+4)K]-ef.\end{cases}$$

17. Die Gröfsen X, Y, Z, M_x, M_y, M_z stellen sich, da

$$X_x=Y_y=X_y=0$$

ist, offenbar folgendermafsen dar:

$$(74)\qquad\begin{cases}X=-\int X_z\,dx\,dy,\\ Y=-\int Y_z\,dx\,dy,\\ Z=-\int Z_z\,dx\,dy,\\ M_x=-\int Z_z y\,dx\,dy,\\ M_y=\int Z_z x\,dx\,dy,\\ M_z=-\int(xY_z-yX_z)\,dx\,dy.\end{cases}$$

Führen wir hierin die Werte (44) ein, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Resultate der vorigen Nummer, wenn wir noch

$$(75)\qquad\int\left(x\,\frac{\partial\Omega}{\partial y}-y\,\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)dx\,dy=M$$

setzen,

$$(76)\qquad \begin{cases} X = Eb_1\, L, \\ Y = Eb_2\, K \\ Z = Ea_0\, f, \end{cases}$$

und

$$(77)\qquad \begin{cases} M_x = Ea_2\, K + Eb_2\, Lz, \\ M_y = - Ea_1\, L - Eb_1\, Kz, \\ M_z = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\left[- c(K+L) + M\right]. \end{cases}$$

Demnach gelten bei symmetrischen Querschnitten näherungsweise die folgenden, durch das Vorhergehende meistenteils bewahrheiteten Resultate:

Die in der Längsrichtung des Prismas angreifende Kraftkomponente erzeugt lediglich eine Dehnung, eine zu ihr senkrechte wirkt bei einer Biegung der zweiten Art mit. Ein Drehungsmoment um die Längsachse verursacht Torsion; Drehungsmomente um hierzu senkrechte Achsen sind bei Biegungen beider Arten thätig.

Wir schliefsen hiermit die Diskussion des de St. Vénant'schen Problems ab, obgleich sich dieselbe bedeutend erweitern läfst. Eine eingehendere Behandlung findet man bei Clebsch, Theorie der Elastizität fester Körper. Wir begnügen uns damit, die wichtigsten Elementardeformationen, welche in der Wirklichkeit auftreten, Ausdehnung, Torsion und Biegung, nach ihren strengen Gesetzen kennen gelernt zu haben.

§ 71.

Endliche Formänderung eines unendlich dünnen Stabes.

1. Die Gleichungen § 68, (24) beruhen auf der wesentlichen Voraussetzung, dafs die Verschiebungen u, v, w sehr kleine Gröfsen sind. Es treten aber in der Wirklichkeit auch Fälle ein, in denen diese Voraussetzung unmöglich wird. Namentlich bei der Biegung dünner Stäbe kommen sehr beträchtliche Formänderungen vor. Wir wollen daher das de St. Vénant'sche Problem einer erneuten Untersuchung unterwerfen, bei der wir die Querdimensionen des Prismas im Vergleich zu der Länge als verschwindend klein annehmen*). Die Gleichungen § 68, (24) dürfen nicht auf den ganzen Körper in Anwendung gebracht werden; doch gelten sie für jeden unendlich kleinen

*) Auch hier sollen äufsere Kräfte nur auf die eine Grundfläche einwirken, während die andere, wie im vorigen Paragraphen angegeben, befestigt ist. — Der vorliegende Gegenstand wurde von Poisson, jedoch, nach den Einwendungen von de St. Vénant, in nicht ganz zutreffender Weise behandelt. Die genaue Theorie wurde von Kirchhoff gegeben (Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes, Ges. W., p. 285).

Abschnitt desselben, da in einem solchen die gegenseitigen Verschiebungen unendlich klein sind, wenn auch die Gesamtverschiebungen gegen die Anfangslage sehr bedeutende sein können.

2. Im ursprünglichen Zustande bildet die Gesamtheit der Schwerpunkte aller Querschnitte des Prismas eine Gerade, welche den Seitenkanten parallel läuft, die Schwerpunktslinie. Wir denken uns das Prisma wie in § 70 befestigt, wobei wir sogleich den einen Endpunkt der Schwerpunktslinie als festen Punkt annehmen. Wir können jeden Punkt der Schwerpunktslinie durch seine Entfernung s vom festen Endpunkte im ursprünglichen Zustande bestimmen. Der Punkt s habe im Zustande der Deformation die Koordinaten ξ, η, ζ in einem Koordinatensysteme, welches dem Systeme x, y, z in § 70 entsprechend gelegt ist. Dabei mögen die ξ- und η-Achse in die Richtungen der Hauptträgheitsachsen der undeformierten Querschnitte fallen; auch mögen durchgehends die Querschnitte zu diesen Achsen als symmetrisch vorausgesetzt werden.

Die Koordinaten eines Punktes des Prismas, welcher in unendlicher Nähe des Punktes s liegt, seien (ebenfalls im Zustande der Deformation) x', y', z'. Mit dem Punkte s als Nullpunkt denken wir uns ein neues Koordinatensystem (x, y, z) konstruiert, dessen z-Achse in die Richtung des betreffenden Linienelementes der deformierten Schwerpunktslinie fällt. Bei der geringen Deformation, welche ein unendlich kleiner Teil des Prismas erfährt, dürfen wir die ursprünglichen Hauptträgheitsachsen auch nach der Deformation noch als aufeinander und dem zugehörigen Elemente der Schwerpunktslinie senkrecht annehmen. Die x- und y-Achse mögen in die Hauptträgheitsachsen des Querschnittes s so fallen, dafs sie im ursprünglichen Zustande der ξ- und η-Achse parallel werden.

Der Punkt x', y', z' möge in diesem System im ursprünglichen Zustande des Prismas die Koordinaten x, y, z, im deformierten aber die veränderten $x + u$, $y + v$, $z + w$ besitzen. Es ist klar, dafs für dieses System x, y, z, welches nur für einen unendlich kleinen Teil des Prismas in Anwendung kommt, die Gleichungen § 68, (24) sowie § 70, (42) u. s. w. volle Anwendung finden.

Zum Übergange von den Koordinaten x, y, z zu den festen x', y', z' haben wir die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} x' = \xi + \alpha_1 (x + u) + \alpha_2 (y + v) + \alpha_3 (z + w), \\ y' = \eta + \beta_1 (x + u) + \beta_2 (y + v) + \beta_3 (z + w), \\ z' = \zeta + \gamma_1 (x + u) + \gamma_2 (y + v) + \gamma_3 (z + w), \end{cases}$$

worin die α, β, γ in bekannter Weise die Kosinus der Winkel zwischen den x, y, z-Achsen und den ξ, η, ζ-Achsen*) bezeichnen. Diese Gröfsen sind natürlich für verschiedene Punkte s verschieden und als Funktionen

*) Oder, was dasselbe ist, den x', y', z'-Achsen.

von s zu betrachten; sie sind in der weiteren Untersuchung als Variabeln zu behandeln.

3. Die Gleichungen (1) bestimmen zunächst nur den Zustand je eines der Elemente, in welche das Prisma ganz willkürlich durch benachbarte Querschnitte geteilt wurde. Um die Kontinuität zwischen benachbarten Elementen herzustellen, gehen wir von folgender Betrachtungsweise aus. Zu einem dem Punkte x', y', z' unendlich benachbarten, auf derselben Längsfaser gelegenen Punkte kann man in doppelter Weise gelangen: entweder betrachtet man ihn als einen Punkt desselben Elementes, oder als den entsprechenden Punkt des benachbarten. Im ersten Falle ist der Nachbarpunkt als

$$x' + \frac{\partial x'}{\partial z} dz, \quad y' + \frac{\partial y'}{\partial z} dz, \quad z' + \frac{\partial z'}{\partial z} dz,$$

im zweiten als

$$x' + \frac{\partial x'}{\partial s} ds, \quad y' + \frac{\partial y'}{\partial s} ds, \quad z' + \frac{\partial z'}{\partial s} ds$$

zu bezeichnen. Da aufserdem $dz = ds$ zu setzen ist, so ergeben sich als Bedingungen des kontinuierlichen Zusammenhangs der benachbarten Elemente die Gleichungen

$$(2) \qquad \frac{\partial x'}{\partial z} = \frac{\partial x'}{\partial s}, \quad \frac{\partial y'}{\partial z} = \frac{\partial y'}{\partial s}, \quad \frac{\partial z'}{\partial z} = \frac{\partial z'}{\partial s}.$$

Setzt man in (2) die Werte für x', y', z' aus (1) ein, so erhält man, da ξ, η, ζ, α_1 u. s. w. nur von s abhängen, während x, y, z voneinander unabhängig sind,

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \alpha_3 \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{d\xi}{ds} + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial s} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial s} + \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial s} \\ &\qquad + \frac{d\alpha_1}{ds}(x+u) + \frac{d\alpha_2}{ds}(y+v) + \frac{d\alpha_3}{ds}(z+w), \\ &\beta_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \beta_3 \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{d\eta}{ds} + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial s} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial s} + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial s} \\ &\qquad + \frac{d\beta_1}{ds}(x+u) + \frac{d\beta_2}{ds}(y+v) + \frac{d\beta_3}{ds}(z+w), \\ &\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \gamma_3 \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{d\zeta}{ds} + \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial s} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial s} + \gamma_3 \frac{\partial w}{\partial s} \\ &\qquad + \frac{d\gamma_1}{ds}(x+u) + \frac{d\gamma_2}{ds}(y+v) + \frac{d\gamma_3}{ds}(z+w). \end{aligned} \right.$$

$d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ sind die Projektionen des deformierten Elementes ds auf die festen Koordinatenachsen. Im allgemeinen Falle wird dasselbe nach der Deformation seine Länge geändert haben, also zu $ds(1+\sigma)$ geworden sein, worin σ eine unendlich kleine Gröfse — im allgemeinen erster Ordnung — bedeutet. Wir haben daher

$$(4) \qquad \frac{d\xi}{ds} = \alpha_3(1+\sigma), \quad \frac{d\eta}{ds} = \beta_3(1+\sigma), \quad \frac{d\zeta}{ds} = \gamma_3(1+\sigma).$$

Multipliziert man nun die Gleichungen (3) der Reihe nach mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und addiert sie jedesmal, so erhält man unter Anwendung bekannter Relationen (§ 52, (3), (4), (8), (9), (10), (23), (24), (25) — an Stelle von $\delta\alpha', \delta\beta', \delta\gamma'$ setzen wir $d\alpha', d\beta', d\gamma'$ —) die Gleichungen

$$
(5) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial u}{\partial s} - \dfrac{d\gamma'}{ds}(y+v) + \dfrac{d\beta'}{ds}(z+w), \\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial s} - \dfrac{d\alpha'}{ds}(z+w) + \dfrac{d\gamma'}{ds}(x+u) \\[2mm] \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial w}{\partial s} - \dfrac{d\beta'}{ds}(x+u) + \dfrac{d\alpha'}{ds}(y+v) + \sigma, \end{cases}
$$

worin

$$
(6) \quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha'}{ds} = \alpha_3 \dfrac{d\alpha_2}{ds} + \beta_3 \dfrac{d\beta_2}{ds} + \gamma_3 \dfrac{d\gamma_2}{ds}, \\[2mm] \dfrac{d\beta'}{ds} = \alpha_1 \dfrac{d\alpha_3}{ds} + \beta_1 \dfrac{d\beta_3}{ds} + \gamma_1 \dfrac{d\gamma_3}{\partial s}, \\[2mm] \dfrac{d\gamma'}{ds} = \alpha_2 \dfrac{d\alpha_1}{ds} + \beta_2 \dfrac{d\beta_1}{ds} + \gamma_2 \dfrac{d\gamma_1}{ds} \end{cases}
$$

zu setzen ist.

Der Unterschied zwischen den Gröſsen $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$ und $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial s}$ ist der folgende. Die Verschiebungen u, v, w werden nicht von der ursprünglichen Lage des Elementes gerechnet; sie sind die relativen Verschiebungen gegen den als fest angenommenen Punkt ξ, η, ζ. $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$ beziehen sich auf die Änderungen der Verschiebungen, falls man sich mehr oder weniger vom Fixpunkte ξ, η, ζ entfernt, $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial s}$ dagegen auf diejenigen, welche bei einer Verlegung von ξ, η, ζ eintreten, wenn x, y, z beibehalten werden.

Wählt man als Längeneinheit eine Strecke, welche zu der Länge des Stabes in einem endlichen Verhältnisse steht, so kann man x, y, z als unendlich kleine Gröſsen erster Ordnung, u, v, w als solche zweiter Ordnung auffassen.

Die Differentialquotienten $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial s}$ sind ihrem Zahlenwerte nach (die Dimension ist verschieden) im allgemeinen von derselben Gröſsenordnung, wie u, v, w selbst; dagegen besitzen $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$, wie schon aus (5) hervorgeht, die Gröſsenordnung von x, y, z, sind also gegen u, v, w an Zahlenwert unendlich groſs. Auch die unmittelbare Betrachtung des Gegenstandes zeigt, daſs die Änderungen von u, v, w bei einem Fortschreiten in der Achsenrichtung, bezogen auf denselben festen Punkt im Prisma, unendlich groſs sind im Vergleich zu den Änderungen, welche die u, v, w erfahren, wenn man zugleich den Bezugspunkt entsprechend verlegt.

Berücksichtigt man auſserdem die Kleinheit von u, v, w gegen x, y, z,

so kann man an Stelle von (5), bei Vernachlässigung von Gröfsen höherer Kleinheit, auch das Gleichungssystem

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = -y\dfrac{d\gamma'}{ds} + z\dfrac{d\beta'}{ds}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} = -z\dfrac{d\alpha'}{ds} + x\dfrac{d\gamma'}{ds}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = -x\dfrac{d\beta'}{ds} + y\dfrac{d\alpha'}{ds} + \sigma \end{cases}$$

setzen.

4. Mit den Gleichungen (7) setzen wir die Werte in Vergleich, welche sich aus § 70, (42) für $\frac{\partial u}{\partial z}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ ergeben.

Wir finden, wenn wir zunächst die Glieder zweiter Dimension in x, y, z gegen die Glieder erster Dimension als sehr klein vernachlässigen,

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = cy - a_1 z + d, \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} = -cx - a_2 z + e, \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = a_0 + a_1 x + a_2 y. \end{cases}$$

Sollen sich diese Gleichungen mit den durch die Kontinuität geforderten Gleichungen (7) vertragen, so mufs

$$(9)\qquad \begin{cases} d = e = 0, \\ \dfrac{d\alpha'}{ds} = a_2, \quad \dfrac{d\beta'}{ds} = -a_1, \quad \dfrac{d\gamma'}{ds} = -c, \\ \sigma = a_0 \end{cases}$$

genommen werden.

Wir ersehen hieraus, dafs σ, wie schon seiner Definition entspricht, der Längenausdehnung, $\frac{d\gamma'}{ds}$ der Torsion, $\frac{d\beta'}{ds}$ und $\frac{d\alpha'}{ds}$ der Biegung erster Art in der xz- und der yz-Ebene proportional sind.

Die Notwendigkeit, dafs d und e gegen die übrigen Glieder in (8) verschwindend klein werden, rührt lediglich von der unendlichen Kleinheit des Querschnittes her; würden x und y endliche Gröfsen annehmen, so würde die ganze Betrachtung hinfällig werden.

Nach § 70, (76) und (77), worin wir Glieder mit z vernachlässigen, können wir an Stelle der vier letzten Gleichungen (9) auch schreiben

$$(10)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha'}{ds} = \dfrac{M_x}{EK}, \quad \dfrac{d\beta'}{ds} = \dfrac{M_y}{EL}, \quad \dfrac{d\gamma'}{ds} = \dfrac{2(1+\mu)M_z}{E(K+L-M')} = \dfrac{M_z}{EN}, \\ \sigma = \dfrac{Z}{Ef}, \end{cases}$$

wenn cM' an Stelle von M und weiter N mit unmittelbar ersichtlicher Bedeutung eingeführt wird.

5. Die gemachte Annahme, dafs die Glieder mit den Koeffizienten b_1 und b_2 in (8) vernachlässigt werden dürfen, ist nicht immer stichhaltig; diese Koeffizienten selbst können mitunter einen so bedeutenden Wert erreichen, dafs die Glieder berücksichtigt werden müssen. Die so erweiterten Gleichungen (7) vertragen sich nur dann mit den Relationen (5), wenn $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial s}$ keine zu vernachlässigenden Gröfsen sind, wie dies ausnahmsweise vorkommen kann. In diesem Falle entwickeln wir $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$ vollständig nach § 70, (42), leiten aus denselben Gleichungen $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial s}$ her (hierbei sind x, y, z als Konstanten, a_0, a_1 u. s. w. als Variabeln zu behandeln; die Glieder dritter Ordnung werden auch hier vernachlässigt) und setzen diese Ausdrücke nebst den in (9) zusammengestellten in (5) ein. Die Koeffizientenvergleichung liefert dann die Beziehungen

$$b_1 = \frac{d a_1}{d s}, \qquad b_2 = \frac{d a_2}{d s} \tag{11}$$

oder nach (9) und § 70, (76)

$$\frac{d^2 \alpha'}{d s^2} = \frac{Y}{EK}, \qquad \frac{d^2 \beta'}{d s^2} = -\frac{X}{EL}. \tag{12}$$

6. Wir wenden uns nunmehr der wirklichen Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen für das deformierte Prisma zu. Auf die einzelnen Teile desselben mögen keine äufseren Kräfte wirken; nur die Grundflächen mögen Druckkräften ausgesetzt sein. Wir zerlegen das Prisma wieder durch Querschnitte in unendlich kleine Teile, für welche wir die Gleichgewichtsbedingungen direkt aufstellen wollen. Dieselben bestehen darin, dafs die Kraftkomponenten, welche auf den Schwerpunkt des Teilchens einwirken, und die Drehungsmomente in bezug auf Achsen, welche durch denselben gehen, sich gegenseitig zerstören. Dabei ist zu beachten, dafs nur Kräfte, welche auf die begrenzenden Querschnitte einwirken, diese sechs Gröfsen erzeugen, da die Seitenflächen keinen Kraftwirkungen ausgesetzt sind.

Zu diesem Zwecke müssen wir die Kraftkomponenten X', Y', Z' und die Drehungsmomente M_x', M_y', M_z' hinschreiben, welche sich auf das System x', y', z' beziehen; die Gröfsen X, Y, Z, M_x, M_y, M_z beziehen sich nach wie vor auf das System x, y, z. Wir haben

$$\begin{cases} X' = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z, \\ Y' = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z, \\ Z' = \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z, \\ M_x' = \alpha_1 M_x + \alpha_2 M_y + \alpha_3 M_z, \\ M_y' = \beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z, \\ M_z' = \gamma_1 M_x + \gamma_2 M_y + \gamma_3 M_z. \end{cases} \tag{13}$$

Damit Gleichgewicht stattfindet, müssen die ersten drei der Gröſsen (13) von s unabhängig sein; denn nur dann heben die beiderseits angreifenden Kraftkomponenten ihre Wirkung gegenseitig auf. Wir haben also

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{d}{ds}(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z) = 0, \\ \frac{d}{ds}(\beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z) = 0, \\ \frac{d}{ds}(\gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z) = 0. \end{cases}$$

Für die Drehungsmomente modifiziert sich die Betrachtung. Die Kräfte X und $-X$, Y und $-Y$, welche (von unendlich kleinen Gröſsen abgesehen) auf die gegenüberliegenden Querschnitte einwirken, erzeugen nämlich Kräftepaare in bezug auf die y- und x-Achse mit dem Hebelarm ds. Die Projektionen derselben nach der x', y', z'-Achse, die den drei letzten Gleichungen (13) entsprechend gebildet werden, sind

$$(\alpha_2 X - \alpha_1 Y)\,ds, \quad (\beta_2 X - \beta_1 Y)\,ds, \quad (\gamma_2 X - \gamma_1 Y)\,ds.$$

Das Bestehen des Gleichgewichtes erfordert daher die Erfüllung der Gleichungen

$$M_x' + \frac{dM_x'}{ds}\,ds - M_x' + (\alpha_2 X - \alpha_1 Y)\,ds = 0$$

u. s. w.

oder

$$(15)\quad \begin{cases} \frac{d}{ds}(\alpha_1 M_x + \alpha_2 M_y + \alpha_3 M_z) + \alpha_2 X - \alpha_1 Y = 0, \\ \frac{d}{ds}(\beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z) + \beta_2 X - \beta_1 Y = 0, \\ \frac{d}{ds}(\gamma_1 M_x + \gamma_2 M_y + \gamma_3 M_z) + \gamma_2 X - \gamma_1 Y = 0. \end{cases}$$

In (14) führen wir die angedeuteten Operationen aus, multiplizieren die Gleichungen der Reihe nach mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und addieren jedesmal; dieselben Operationen nehmen wir mit (15) vor. So erhalten wir

$$(16)\quad \begin{cases} \frac{dX}{ds} - \frac{d\gamma'}{ds} Y + \frac{d\beta'}{ds} Z = 0, \\ \frac{dY}{ds} - \frac{d\alpha'}{ds} Z + \frac{d\gamma'}{ds} X = 0, \\ \frac{dZ}{ds} - \frac{d\beta'}{ds} X + \frac{d\alpha'}{ds} Y = 0 \end{cases}$$

und

$$(17)\quad \begin{cases} \frac{dM_x}{ds} - \frac{d\gamma'}{ds} M_y + \frac{d\beta'}{ds} M_z - Y = 0, \\ \frac{dM_y}{ds} - \frac{d\alpha'}{ds} M_z + \frac{d\gamma'}{ds} M_x + X = 0, \\ \frac{dM_z}{ds} - \frac{d\beta'}{ds} M_x + \frac{d\alpha'}{ds} M_y = 0. \end{cases}$$

7. Integriert liefern die Gleichungen (14) die Relationen

$$(18)\qquad \begin{cases} \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z = A, \\ \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z = B, \\ \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z = C, \end{cases}$$

worin A, B, C Konstanten sind, welche die auf einen Querschnitt wirkenden Kraftkomponenten nach den Achsen der x', y', z' darstellen. Man berechnet aus ihnen durch jeweilige Multiplikation mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ und Addition

$$(19)\qquad \begin{cases} X = \alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C, \\ Y = \alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C, \\ Z = \alpha_3 A + \beta_3 B + \gamma_3 C. \end{cases}$$

Diese Werte führen wir in (17) ein und ersetzen aufserdem die Gröfsen M_x, M_y, M_z durch ihre Werte nach (10); auch setzen wir in Anlehnung an eine frühere Bezeichnung

$$(20)\qquad \frac{d\alpha'}{ds} = p, \quad \frac{d\beta'}{ds} = q, \quad \frac{d\gamma'}{ds} = r.$$

So erhalten wir

$$(21)\qquad \begin{cases} K\dfrac{dp}{ds} + (N - L)\,qr - \dfrac{1}{E}(\alpha_2 A + \beta_2 B + \gamma_2 C) = 0, \\ L\dfrac{dq}{ds} + (K - N)\,rp + \dfrac{1}{E}(\alpha_1 A + \beta_1 B + \gamma_1 C) = 0, \\ N\dfrac{dr}{ds} + (L - K)\,pq = 0. \end{cases}$$

Falls $A = B = 0$ ist, zeigen diese Gleichungen, bei geeigneter Änderung der Buchstaben, vollkommene Übereinstimmung mit den Gleichungen § 61, (3), welche die Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt bestimmen. Wir verdanken diese Vergleichung Kirchhoff. Ebenso wie jene Gleichungen nur im Falle zweier gleichen Hauptträgheitsmomente integrabel sind, werden auch die Gleichungen (21) im allgemeinen nur bei Annahme gleicher Hauptträgheitsmomente des Querschnittes integrabel.

8. Falls nur Kräftepaare auf die Querschnitte einwirken, also nur Biegung und Torsion in Thätigkeit sind, so wird

$$X = Y = Z = 0,$$

also auch nach (18)

$$A = B = C = 0.$$

Die Gleichungen (21) gehen über in

$$(22)\qquad \begin{cases} K\dfrac{dp}{ds} + (N - L)\,qr = 0, \\ L\dfrac{dq}{ds} + (K - N)\,rp = 0, \\ N\dfrac{dr}{ds} + (L - K)\,pq = 0, \end{cases}$$

welche den stets integrabeln Gleichungen § 60, (1) entsprechen, also mittels elliptischer Funktionen integriert werden können.

Wir beschränken uns auf den Fall, dafs die beiden Hauptträgheitsmomente des Querschnittes gleich sind, dafs also

(23) $$K = L$$

ist. Hier kommen die Rechnungen von § 60, 6 zur Anwendung. Wir finden, dafs r und

(24) $$p^2 + q^2 = k^2$$

Konstanten sind, und weiter (§ 60, (25) und (26))

(25) $$\begin{cases} p = k \sin \dfrac{(K-N)r(s-s_0)}{K}, \\ q = k \cos \dfrac{(K-N)r(s-s_0)}{K}. \end{cases}$$

Nach § 60, (29) ist dann

(26) $$\begin{cases} \gamma_1 = k_1 \sin \dfrac{(K-N)r(s-s_0)}{K}, \\ \gamma_2 = k_1 \cos \dfrac{(K-N)r(s-s_0)}{K}, \\ \gamma_3 = k_2, \quad k_1^2 + k_2^2 = 1, \end{cases}$$

wo k_1 und k_2 weitere, durch die angegebene Relation verbundene Konstanten sind.

Diese Resultate genügen, um die Gleichungen der deformierten Schwerpunktslinie aufzustellen. Es ist nämlich

(27) $$\gamma_1 = \frac{d\xi}{ds}, \quad \gamma_2 = \frac{d\eta}{ds}, \quad \gamma_3 = \frac{d\zeta}{ds},$$

und man findet

(28) $$\begin{cases} \xi = -k_3 \cos \dfrac{(K-N)r(s-s_0)}{K} + k_4, \\ \eta = k_3 \sin \dfrac{(K-N)r(s-s_0)}{K} + k_5, \\ \zeta = k_2 s + k_6, \end{cases}$$

worin k_3, k_4, k_5, k_6 neue Konstanten sind, von denen k_3 mit den früheren in einfacher Beziehung steht. Durch die Bedingung, dafs für $s = 0$ auch $\xi = \eta = \zeta = 0$ wird, sind drei Konstanten bestimmt. Legt man ferner die ξ-Achse so, dafs für $s = 0$ auch $\frac{d\xi}{ds} = 0$ wird, so mufs

$$s_0 = 0, \quad k_5 = 0, \quad k_6 = 0, \quad k_4 = k_3$$

sein. Die anderen Konstanten ergeben sich aus den weiteren Grenzbedingungen, welche sich auf die Kräftepaare beziehen, die an der freien Grundfläche angreifen.

Man erkennt in (28) die Gleichungen einer Schraubenlinie, deren Achse der ζ-Achse parallel läuft.

9. Leicht durchzuführen ist die Rechnung auch in dem folgenden, besonders interessanten Falle: Das Prisma werde in der $x'z'$-Ebene durch eine Zugkraft gebogen, welche der z'-Achse parallel ist.

Wir haben hier

$$\beta_1 = \beta_3 = \alpha_2 = \gamma_2 = 0, \quad \beta_2 = 1, \tag{29}$$

so dafs auch nach (6) und (20)

$$p = r = 0 \tag{30}$$

wird.

Bezeichnet φ den Winkel, welchen das Element ds mit der positiv gerichteten z'-Achse bildet, so ist

$$\alpha_1 = \cos\varphi, \quad \alpha_3 = \sin\varphi, \quad \gamma_1 = -\sin\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\varphi \tag{31}$$

und daher nach (6) und (20)

$$q = \frac{d\varphi}{ds}. \tag{32}$$

Es tritt also, wie selbstverständlich, nach (10) nur ein Drehungsmoment

$$M_y = EL\frac{d\varphi}{ds} \tag{33}$$

auf. Da ferner

$$A = B = 0$$

und C die einzig wirksame Zugkraft in der z'-Richtung ist, so folgt aus (19)

$$X = -C\sin\varphi, \quad Y = 0, \quad Z = C\cos\varphi. \tag{34}$$

Die Gleichungen (21) liefern nur die einzige Relation

$$EL\frac{d^2\varphi}{ds^2} = C\sin\varphi, \tag{35}$$

welche sich leicht integrieren läfst, da sie mit der Gleichung § 17, (1), welche die Bewegung des kreisförmigen Pendels bestimmt, wesentlich identisch ist.

Indem wir beiderseits mit $\frac{d\varphi}{ds}$ multiplizieren und integrieren, erhalten wir zunächst

$$\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 = c - \frac{2C}{EL}\cos\varphi, \tag{36}$$

worin c eine Konstante ist. Diese Gleichung bestimmt die Krümmung der Kurve als Funktion des Winkels φ, da $\frac{d\varphi}{ds}$ der reciproke Wert des Krümmungsradius ist (vgl. die Entwicklung in § 1, 6).

Eine weitere Integration liefert

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{c - \frac{2C}{EL}\cos\varphi}}. \tag{37}$$

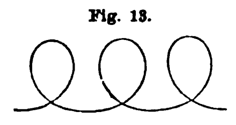
Ohne auf die leicht auszuführende Konstantenbestimmung weiter einzugehen, suchen wir durch Vergleich mit dem Pendelproblem (§ 17)

eine Vorstellung von der Gestalt des gebogenen Prismas zu gewinnen. Hierbei macht es keinen wesentlichen Unterschied, ob C positiv oder negativ ist, ob also die Zugkraft in der Richtung der positiven oder negativen z'-Achse wirkt; denn die Umkehrung der Zugrichtung vermag, bei geeigneter Umänderung der übrigen bestimmenden Gröfsen, nach der umgekehrten Seite hin dieselbe Deformationsgestaltung zu liefern. Der Länge s entspricht beim Pendelprobleme die Zeit, der Neigung φ eines Elementes der Schwerpunktslinie gegen die z'-Achse der Winkel, um welche sich das Pendel von seiner Anfangsrichtung entfernt hat. Um die volle Analogie herzustellen, müssen wir uns ein Prisma von unendlicher Länge denken. Da die Kraft C nach der z'-Richtung in jedem Elemente die gleiche ist, so können wir uns, ohne an der Gestaltung des vorhandenen Teiles etwas zu ändern, das Prisma ins Unendliche verlängert denken. So kann die Schwerpunktslinie eines gespannten Bogens als ein Teil einer schlangenförmigen, ins Unendliche fortlaufenden Linie gedacht werden. Der Krümmung der Schwerpunktslinie entspricht die Winkelgeschwindigkeit des Pendels. Dem Nullwerden der Krümmung, d. h. im allgemeinen einem Wendepunkte, entspricht das Nullwerden der Geschwindigkeit des Pendels, d. h. im allgemeinen die Umkehrung seiner Bewegungsrichtung.

Die Pendelbewegung ist, einen einzigen Fall ausgenommen, eine periodische. Dementsprechend wird φ für wachsende s periodisch die gleichen Werte annehmen, d. h. die Gestalt der Schwerpunktslinie wird als eine schlangenförmige bezeichnet werden dürfen. Die Geraden, welche periodisch entsprechende Punkte verbinden, werden der z-Achse parallel sein.

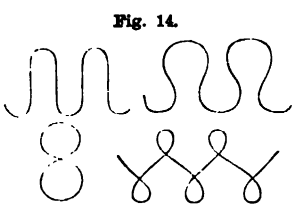
Den beiden Hauptbewegungsarten des Pendels, der rotatorischen und der oszillierenden, entsprechen zwei Gestaltungstypen der Schwerpunktslinie. Bei dem ersten treten keine Wendungspunkte auf, die Kurve windet sich immer in derselben Richtung. Sie bildet, was physisch natürlich nur näherungsweise herzustellen ist, eine fortlaufende Reihe von Schleifen (Fig. 13). Sie wird durch Zug im engeren Sinne erzeugt.

Fig. 13.



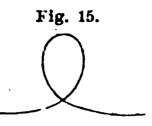
Der zweite Typus weist periodisch wiederkehrende Wendepunkte auf. Wird er durch Druck erzeugt, so bildet die Schlangenlinie keine Schleifen; Zug bringt eine Linie mit Schleifen hervor, welche wechselweise auf beiden Seiten der z'-Achse liegen (Fig. 14). Im speziellen Falle können sich die aufeinanderfolgenden Windungen decken.

Fig. 14.



Der asymptotischen Näherung des Pendels an seinen höchsten Punkt entspricht eine Kurve, welche eine Schleife

bildet und die z'-Achse auf beiden Seiten dieser zur Asymptote hat (Fig. 15).


Fig. 15.

Sowie die Pendelbewegung sich bei sehr kleiner Amplitude der harmonischen nähert, so geht die Schwerpunktslinie bei schwacher Krümmung durch Druck in die gewöhnliche Sinuslinie über.

§ 72.

Die Fourier'sche Reihe.

1. Es erscheint wünschenswert, an dieser Stelle eine rein mathematische Entwicklung einzuschalten, von der wir in der Folge mehrfach Gebrauch zu machen haben.

Eine Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

besitzt bekanntlich einen Konvergenzkreis, d. h. sie konvergiert für alle x, deren absoluter Betrag unterhalb einer gewissen Gröſse r liegt, oder welche bei der gewöhnlichen geometrischen Darstellung der komplexen Gröſsen in einer Ebene innerhalb eines Kreises liegen, welcher mit dem Radius r um den Nullpunkt beschrieben ist. Auſserhalb dieses Kreises findet überall Divergenz statt, während die Reihe für Punkte auf der Kreislinie selbst teils konvergieren, teils divergieren kann.

Eine Reihe

$$b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots$$

konvergiert daher für solche x, welche auſserhalb eines Kreises liegen, welcher mit einem Radius r_1 um den Nullpunkt beschrieben ist; für Punkte der Kreislinie selbst ist die Konvergenz wieder zweifelhaft.

Eine Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \qquad (1)$$
$$+ \frac{b_2}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \cdots$$

konvergiert für alle Punkte innerhalb eines Kreisringes, dessen innerer Kreis den Radius r_1, dessen äuſserer den Radius r besitzt; auf den beiden Grenzlinien ist die Konvergenz zweifelhaft. Der Konvergenzkreisring kann sich im speziellen Falle über die ganze Ebene, die Punkte $x = 0$ und $x = \infty$ ausgenommen, erstrecken; es ist dann $r_1 = 0$, $r = \infty$. In andern Fällen erscheint der Ring begrenzt $(r_1 < r)$, während für $r < r_1$ überhaupt keine Konvergenz statthat. Besonders bemerkenswert ist der Fall, wo $r = r_1$ wird, der Kreisring sich also auf eine Kreislinie zusammen-

zieht. Sind die beiden einzelnen Reihen, aus welchen (1) zusammengesetzt ist, für $|x| = r$, einzelne Punkte etwa ausgenommen, noch konvergent, so konvergiert auch (1) auf dieser Kreislinie.

Die Reihe (1) stellt innerhalb ihres Konvergenzgebietes eine analytische Funktion dar, d. h. sie läfst sich für die Umgebung eines jeden ihrer Punkte in eine einfache Potenzreihe umwandeln. Am Rande des Konvergenzgebietes braucht dies nicht mehr der Fall zu sein, und für $r = r_1$ repräsentiert daher (1) im allgemeinen keine analytische Funktion.

2. Es seien nun für alle x-Werte, welche auf einem um den Nullpunkt als Mittelpunkt beschriebenen Kreise liegen, dessen Radius wir der Einfachheit halber der Einheit gleichsetzen wollen, willkürlich zugeordnete Werte $y = f(x)$ gegeben. Dabei soll über diese y-Werte keinerlei Voraussetzung gemacht werden; es soll $f(x)$ keine analytische Funktionalbeziehung ausdrücken, sondern nur andeuten, dafs einem jeden x ein bestimmtes y zugeordnet ist. Wir werfen nun die Frage auf: Läfst sich eine Reihe (1) konstruieren, welche auf dem mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschriebenen Kreise die vorgeschriebenen Werte y annimmt?

Innerhalb ihres Konvergenzbezirkes ist, wie erwähnt, (1) eine analytische Funktion, und eine solche ist eindeutig bestimmt, wenn man ihre Werte für die Punkte einer noch so kleinen, zusammenhängenden endlichen Linie kennt. Kommt also der Kreis mit dem Radius 1 innerhalb des Konvergenzbezirks zu liegen, so mufs jene Frage verneint werden, wenn nicht die gegebene Reihe von y-Werten ganz bestimmte Eigenschaften besitzt; denn ein beliebig kleines Stück dieser Reihe bestimmt die übrigen Werte von (1). Indessen kann jener Kreis mit dem Radius 1 an den Rand des Konvergenzbezirks rücken, ja der letztere kann sich überhaupt auf diese Kreislinie reduzieren. Alsdann sind die gemachten Schlüsse nicht mehr zutreffend. In der That wird aus den folgenden Untersuchungen hervorgehen, dafs die Werte auf dem Einheitskreise nur derart zu sein brauchen, dafs die y-Reihe stetig zusammenhängt, d. h. dafs zwei unendlich benachbarten x-Punkten auf dem Einheitskreise auch zwei unendlich benachbarte y-Werte entsprechen; Ausnahmen sind für einzelne Punkte zulässig. Damit ist nicht vorausgesetzt, dafs y längs jenes Kreises als analytische Funktion von x definiert ist; es braucht nicht möglich zu sein, $f(x)$ in der Nachbarschaft dieser x-Punkte in eine Potenzreihe zu entwickeln und es kann $f(x)$ möglicherweise überhaupt keine Differentialquotienten besitzen.

3. Durch eine einfache Substitution wollen wir jetzt der Untersuchung ein etwas verändertes Aussehen geben. Wir setzen in (1)

$$x = e^{i\varphi} \tag{2}$$

und erhalten eine Reihe von der Form

$$(3)\quad \begin{cases} a_0 + a_1 e^{i\varphi} + a_2 e^{2i\varphi} + \cdots + b_1 e^{-i\varphi} + b_2 e^{-2i\varphi} + \cdots \\ \quad = a_0 + (a_1 + b_1)\cos\varphi + (a_2 + b_2)\cos 2\varphi + \cdots \\ \qquad + i\,[(a_1 - b_1)\sin\varphi + (a_2 - b_2)\sin 2\varphi + \cdots] \\ \quad = c_0 + c_1 \cos\varphi + c_2 \cos 2\varphi + \cdots \\ \qquad + d_1 \sin\varphi + d_2 \sin 2\varphi + \cdots, \end{cases}$$

worin c und d ebenso unabhängig voneinander sind, wie die a und b.

Ist

$$|x| = 1,$$

so ist φ reell. Der Kreislinie mit dem Radius 1, auf welcher y gegeben sein sollte, entspricht also nach Einführung von φ die Achse der reellen Zahlen. Infolge der Periodizität von $e^{i\varphi}$ ist dies Entsprechen derart, dafs durch (2) jener Kreis unendlich vielmal auf jener Achse abgebildet wird. Teilt man z. B. auf letzterer das Stück von $-\pi$ bis $+\pi$ ab und trägt diese Strecke nach rechts und links unendlich oft ab, so entspricht jedem so erhaltenen Teile der Achse jener ganze Kreis. Bemerkt man noch, dafs die c und d in einen reellen und rein imaginären Teil zerlegt werden können und dafs der reelle und rein imaginäre Teil von (3) getrennt behandelt werden können, so kommt schliefslich das Problem auf das folgende hinaus:

Die *reellen* Koeffizienten einer Reihe

$$(4)\quad \begin{cases} S = A_0 + A_1 \cos\varphi + A_2 \cos 2\varphi + \cdots \\ \qquad + B_1 \sin\varphi + B_2 \sin 2\varphi + \cdots \end{cases}$$

sollen derart bestimmt werden, dafs die Reihe für alle reellen φ von $-\pi$ bis $+\pi$ bestimmt vorgelegte, übrigens stetig aneinanderschliefsende reelle Werte annimmt. Für andere reelle φ werden sich dieselben Werte wiederholen.

Im allgemeinen wird die Reihe (4) nur für reelle oder für solche φ konvergieren, welche nur einen Parallelstreifen auf der einen Seite der Achse der reellen Geraden ausmachen; (4) wird also nicht immer eine analytische Funktion darstellen.

Eine Reihe von der Form (4) heifst eine Fourier'sche Reihe*).

---

*) Die Erkenntnis, dafs eine willkürliche stetige Funktion (mit einer später zu bezeichnenden Beschränkung) durch eine trigonometrische Reihe dargestellt werden kann, verdankt man Fourier (Bull. des sciences p. la soc. philomat., B. 1, p. 112); in wirklich exakter Weise wurde der Gegenstand zuerst von Lejeune-Dirichlet (Crelle's Journal, B. 4, p. 157) erledigt. Zahlreiche neuere Mathematiker bemühten sich, diese Untersuchungen teils in anderer Weise durchzuführen, teils auf Fälle auszudehnen, die noch unerledigt geblieben waren. Für die mechanischen Entwicklungen sind die letztgedachten Fälle irrelevant. Eingehende Litteraturangaben findet man bei Riemann, Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe, Ges. Werke p. 213, und bei Harnack, Vereinfachung der Beweise in der Theorie der Fourier'schen Reihe, Math. Ann. B. 19, p. 235. Die Dirichlet'sche

4. Wir wollen zunächst nachweisen, dafs eine Reihe (4), wenn die A_k und B_k positiv sind und beständig gegen die Null hin abnehmen*), für alle reellen Werte von φ konvergiert, mit der möglichen Ausnahme von $\varphi = 2k\pi$.

Multiplizieren wir nämlich (4) mit $2\sin\frac{\varphi}{2}$ und beachten, dafs

$$2\cos n\varphi \sin\frac{\varphi}{2} = \sin(n+\tfrac{1}{2})\varphi - \sin(n-\tfrac{1}{2})\varphi,$$

$$2\sin n\varphi \sin\frac{\varphi}{2} = -\cos(n+\tfrac{1}{2})\varphi + \cos(n-\tfrac{1}{2})\varphi$$

ist, so erhalten wir

$$(5)\left\{\begin{aligned} 2S\sin\frac{\varphi}{2} = (A_0-A_1)\sin\frac{\varphi}{2} + (A_1-A_2)\sin\frac{3\varphi}{2} + (A_2-A_3)\sin\frac{5\varphi}{2} + \cdots \\ + B_1\cos\frac{\varphi}{2} - (B_1-B_2)\cos\frac{3\varphi}{2} - (B_2-B_3)\cos\frac{5\varphi}{2} - \cdots. \end{aligned}\right.$$

Nun ist aber

$$(A_0-A_1)+(A_1-A_2)+(A_2-A_3)+\cdots+(A_n-A_{n+1}) = A_0 - A_{n+1},$$

und für unendlich wachsende n nähert sich diese Reihe, da A_{n+1} gegen die Null hin abnimmt, dem Werte A_0, so dafs

$$(A_0-A_1)+(A_1-A_2)+(A_2-A_3)+\cdots$$

eine konvergente Reihe ist; die Glieder dieser Reihe sind alle positiv. Werden nun diese Glieder mit $\sin\frac{\varphi}{2}$, $\sin\frac{3\varphi}{2}$ u. s. w. multipliziert, so erfahren sie, abgesehen von einem möglichen Wechsel des Zeichens, im allgemeinen eine Verminderung, sicher keine Vergröfserung, und die Reihe bleibt daher konvergent. Eine analoge Betrachtung ist für den zweiten Teil der rechten Seite von (5) möglich. Wir schliefsen hieraus, dafs auch S selbst eine konvergente Reihe ist, wenn nicht $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$, d. h. $\varphi = 2k\pi$ ist.

5. Nehmen wir nun an, eine Funktion $f(x)$ sei für die reellen x von $-\pi$ bis $+\pi$, also auch für $x = 0$, in eine Reihe der Form

$$(6)\qquad\left\{\begin{aligned} f(x) = a_0 + a_1\cos x + a_2\cos 2x + \cdots \\ + b_1\sin x + b_2\sin 2x + \cdots \end{aligned}\right.$$

entwickelbar. Wir sind dann berechtigt, beide Seiten einmal mit $\cos nx\,dx$, das andere mal mit $\sin nx\,dx$ zu multiplizieren und dann von $-\pi$ bis $+\pi$ zu integrieren**). Da für $m \gtrless n$

Untersuchung ist auch in den von Meyer herausgegebenen Vorlesungen D.'s über bestimmte Integrale enthalten.

*) Es genügt, wenn dies von einer gewissen Stelle ab der Fall ist, da eine endliche Anzahl von Gliedern nie über die Konvergenz einer unendlichen Reihe entscheidet.

**) Die Zulässigkeit der Integration steht hier aufser Frage, da eine Reihe (6) nirgends unendliche Werte besitzt.

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos (m+n)x + \cos (m-n)x]\, dx = 0,$$

für $m = n$ aber

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 mx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos 2mx + 1]\, dx = \pi,$$

ferner für $m \gtrless n$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [\cos (m-n)x - \cos (m+n)x]\, dx = 0,$$

für $m = n$

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 mx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [1 - \cos 2mx] = \pi,$$

endlich allgemein

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \sin mx \cos nx\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} [\sin (m+n)x + \sin (m-n)x]\, dx = 0$$

ist, so fallen bei dieser Operation rechts alle Glieder bis auf eines weg, und wir erhalten

$$(7)\qquad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\, dx, \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cos nx\, dx, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \sin nx\, dx. \end{cases}$$

Wir ersehen aus dieser Entwicklung erstens, in welcher Form sich die Koeffizienten der trigonometrischen Reihe darstellen, und zweitens, dafs es für $f(x)$ nur eine — wenn überhaupt eine — trigonometrische Entwicklung giebt; denn die Koeffizienten sind durch (7) in völlig eindeutiger Weise bestimmt. Dagegen beweist die Entwicklung nicht, dafs sich jede stetige Funktion $f(x)$ als eine Reihe von der Form (6) darstellen läfst; auch ist nicht gezeigt, dafs jede Fourier'sche Reihe mit den Koeffizienten (7) den Wert $f(x)$ liefert. Möglicherweise könnte nämlich $f(x)$ überhaupt nicht durch eine Fourier'sche Reihe darstellbar sein und die ganze Untersuchung würde dann hinfällig. Auch haben wir über die Konvergenz der problematischen Reihe nichts bewiesen.

Nach alledem können wir uns die eingehende Behandlung der Frage nicht ersparen: welchen Wert repräsentiert eine Fourier'sche Reihe mit den Koeffizienten (7)? Die Frage nach der Konvergenz ist hierin eingeschlossen. Wir verfahren hierbei wesentlich nach den grundlegenden Untersuchungen von Lejeune-Dirichlet.

6. Wir fragen also: Welchen Wert besitzt eine Reihe

$$(8)\quad \begin{cases} S = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots \\ \qquad + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \cdots, \end{cases}$$

deren Koeffizienten durch die Gleichungen (7) definiert sind? Über die Funktion $f(x)$, deren Werte nur für reelle x von $-\pi$ bis $+\pi$ gegeben zu sein brauchen, machen wir vorläufig keine beschränkende Voraussetzungen und behalten es der weiteren Untersuchung vor, solche eventuell einzuführen.

Setzen wir die Werte (7) in (8) ein, so wird hieraus, wenn wir jetzt ξ als Integrationsvariable einführen,

$$(9)\quad \begin{cases} S_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\,d\xi \Big[\frac{1}{2} + \cos\xi\cos x + \cos 2\xi \cos 2x + \cdots + \cos n\xi \cos nx \\ \qquad + \sin\xi \sin x + \sin 2\xi \sin 2x + \cdots + \sin n\xi \sin nx\Big], \end{cases}$$

worin n ins Unendliche wachsen soll. Wir machen hierdurch eine beschränkende Voraussetzung in Bezug auf die Zuordnung der Glieder der Reihe, die bei einer nicht unbedingt konvergenten Reihe von Wichtigkeit ist, übrigens in unserem speziellen Falle thatsächlich keinen Einfluſs übt; wir setzen nämlich fest, daſs stets von der Sinus- und Kosinusreihe gleichviele Glieder zu nehmen sind.

Für (9) können wir noch schreiben

$$(10)\quad S_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\,d\xi \Big[\frac{1}{2} + \cos(\xi - x) + \cos 2(\xi - x) + \cdots + \cos n(\xi - x)\Big].$$

Nun erhält man, wenn ausmultipliziert wird und die einzelnen Produkte von Sinus und Kosinus in eine Summe verwandelt werden,

$$2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\tfrac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi\right)$$

$$= \sin\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2} + \sin\frac{3\varphi}{2} - \sin\frac{3\varphi}{2} + \sin\frac{5\varphi}{2} - \cdots - \sin\left(n - \tfrac{1}{2}\right)\varphi + \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\varphi$$

$$= \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right)\varphi,$$

also

$$(11)\quad \tfrac{1}{2} + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cdots + \cos n\varphi = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Daher wird aus (10)

(12) $$S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\xi)\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\xi - x)}{\sin\frac{1}{2}(\xi - x)}\,d\xi.$$

Setzen wir

(13) $$2n + 1 = h, \quad \frac{\xi - x}{2} = \vartheta,$$

so geht (12) über in

(14) $$S_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x + 2\vartheta)\,\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta,$$

ein Integral, welches noch in die Summe der beiden

(15) $$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi-x}{2}} f(x + 2\vartheta)\,\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta$$

und

(16) $$\frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi+x}{2}}^{0} f(x + 2\vartheta)\,\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi+x}{2}} f(x - 2\vartheta)\,\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta$$

zerlegt werden kann.

Da voraussetzungsmäſsig

$$-\pi \leq x \leq \pi$$

ist, so haben die oberen Grenzen von (15) und (16) die Gröſsen 0 und π zu extremen Werten. Indem wir noch

$$f(x \pm 2\vartheta) = \varphi(\vartheta)$$

setzen, haben wir uns schlieſslich nur mit der Auswertung eines Integrals

(17) $$T = \int_0^c \varphi(\vartheta)\,\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta$$

zu beschäftigen, worin

(18) $$0 < c \leq \pi$$

ist und h nach (13) eine ungerade, ins Unendliche wachsende ganze Zahl darstellt.

7. Um zur Auswertung von (17) zu gelangen, beschäftigen wir uns vorerst mit dem spezielleren Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta.$$

Nach (11) können wir wieder

(18a) $\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{\sin(2n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} = 1 + 2\cos 2\vartheta + 2\cos 4\vartheta + \cdots + 2\cos 2n\vartheta$

setzen, und die Integration führt alsdann unmittelbar zu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}, \tag{19}$$

einerlei, welchen ganzzahligen Wert n besitzt.

Wir wollen jedoch unser Integral noch von einem anderen Gesichtspunkte aus betrachten. Wir zerlegen es nach dem Schema

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{h}} + \int_{\frac{\pi}{h}}^{\frac{2\pi}{h}} + \cdots + \int_{\frac{n\pi}{h}}^{\frac{\pi}{2}}. \tag{20}$$

Während $\sin\vartheta$ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ positiv bleibt und immer zunimmt, sein reciproker Wert also abnimmt, erlangt $\sin h\vartheta$ für jedes der Intervalle 0 bis $\frac{\pi}{h}$, $\frac{\pi}{h}$ bis $\frac{2\pi}{h}$, $\cdots$ $\frac{(n-1)\pi}{h}$ bis $\frac{n\pi}{h}$ die gleichen absoluten Werte, jedoch das eine Mal mit positivem, das andere Mal mit negativem Zeichen. Die Teilintegrale haben daher wechselnde Zeichen. Setzen wir für die absoluten Werte derselben die Gröſsen $\varrho_0, \varrho_1, \ldots \varrho_n$, also

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} = \varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 + \cdots \pm \varrho_n, \tag{21}$$

so ist

$$\varrho_\nu > \varrho_{\nu+1}; \tag{22}$$

denn es sind jeweilig beim letzteren Integral dieselben Werte von $\sin h\vartheta$ mit kleineren von $\frac{1}{\sin\vartheta}$ zu multiplizieren als beim ersteren. Bei dem letzten Teilintegrale, dessen Intervall nur den halben Umfang der übrigen besitzt, gilt (21) in verstärktem Maſse.

Aus (21) und (22) folgt, daſs für $2m < n$

$$\frac{\pi}{2} < \varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 - \cdots + \varrho_{2m}, \quad \frac{\pi}{2} > \varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 - \cdots - \varrho_{2m-1} \tag{23}$$

ist.

8. Wir machen jetzt die Annahme, daſs $0 < c \leq \frac{\pi}{2}$ sei und daſs die Funktion $\varphi(\vartheta)$ für $0 \leq c \leq \frac{\pi}{2}$ stetig sei, in diesem Intervalle, während ϑ wächst, niemals zunehme, und immer positiv bleibe. Bei (17) nehmen wir die Zerlegung

$$\int_0^c = \int_0^{\frac{\pi}{h}} + \int_{\frac{\pi}{h}}^{\frac{2\pi}{h}} + \cdots + \int_{\frac{s\pi}{h}}^{c} \tag{24}$$

vor, wo

$$\frac{s\pi}{h} < c \leq \frac{(s+1)\pi}{h}$$

sein möge. Da $\frac{\varphi(\vartheta)}{\sin\vartheta}$ mit wachsendem ϑ beständig abnimmt, so gelten für die Teilintegrale, deren absolute Werte mit

$$R_0, \; R_1, \; \ldots . \, R_s$$

bezeichnet werden mögen, dieselben Bemerkungen wie für die ϱ_ν; wir haben

$$T = R_0 - R_1 + R_2 - \cdots \pm R_s \tag{25}$$

und

$$R_\nu > R_{\nu+1}. \tag{26}$$

Außerdem ist ersichtlich, daſs das Integral

$$\pm R_\nu = \int_{\frac{\nu\pi}{h}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{h}} \varphi(\vartheta) \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta$$

zwischen den Grenzen

$$\varphi\left(\frac{\nu\pi}{h}\right) \int_{\frac{\nu\pi}{h}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{h}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta \quad \text{und} \quad \varphi\left(\frac{(\nu+1)\pi}{h}\right) \int_{\frac{\nu\pi}{h}}^{\frac{(\nu+1)\pi}{h}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta$$

liegt, oder daſs

$$\varphi\left(\frac{\nu\pi}{h}\right) \varrho_\nu \geqq R_\nu \geqq \varphi\left(\frac{(\nu+1)\pi}{h}\right) \varrho_\nu \tag{27}$$

ist.

Ist $2m < s$, so haben wir daher

$$\left\{\begin{aligned} T &> (\varrho_0 - \varrho_1)\varphi\left(\frac{\pi}{h}\right) + (\varrho_2 - \varrho_3)\varphi\left(\frac{3\pi}{h}\right) + \cdots \\ &\qquad + (\varrho_{2m-2} - \varrho_{2m-1})\varphi\left(\frac{(2m-1)\pi}{h}\right), \\ T &< \varrho_0\varphi(0) - (\varrho_1 - \varrho_2)\varphi\left(\frac{2\pi}{h}\right) - (\varrho_3 - \varrho_4)\varphi\left(\frac{4\pi}{h}\right) - \cdots \\ &\qquad - (\varrho_{2m-1} - \varrho_{2m})\varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right). \end{aligned}\right. \tag{28}$$

Da die Differenzen $\varrho_0 - \varrho_1$, $\varrho_1 - \varrho_2$ u. s. w. sämtlich positiv sind, die Gröſsen

$$\varphi(0), \quad \varphi\left(\frac{\pi}{h}\right), \quad \cdots \varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right)$$

aber eine Reihe von niemals zunehmenden, im allgemeinen abnehmenden Werten bilden, so gelten in verstärktem Maſse die Ungleichheiten

$$(29) \quad \begin{cases} T > [\varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 + \cdots + \varrho_{2m-2} - \varrho_{2m-1}]\, \varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right), \\ T < [\varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 - \varrho_3 + \cdots - \varrho_{2m-1} + \varrho_{2m}]\, \varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right) \\ \qquad + \varrho_0 \left[\varphi(0) - \varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right)\right]. \end{cases}$$

Bei Beachtung von (23) wird hieraus

$$(30) \quad \begin{cases} T > \left(\frac{\pi}{2} - \varrho_{2m}\right) \varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right), \\ T < \left(\frac{\pi}{2} + \varrho_{2m}\right) \varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right) + \varrho_0 \left[\varphi(0) - \varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right)\right]. \end{cases}$$

Wenn n und somit auch $h = 2n + 1$ ins Unendliche wächst, so kann auch m einen beliebig hohen Wert annehmen. Wir können nun m so wählen, daſs es zwar an sich unendlich groſs, gegen n jedoch noch verschwindend klein ist. Alsdann ist

$$\varphi\left(\frac{2m\pi}{h}\right) = \varphi(0) - \varepsilon$$

zu setzen, wo ε unter jeder Grenze klein gedacht werden darf. Aus (30) wird, wenn ε verschwindet, da ϱ_0 endlich ist*),

$$(31) \qquad \left(\frac{\pi}{2} - \varrho_{2m}\right) \varphi(0) < T < \left(\frac{\pi}{2} + \varrho_{2m}\right) \varphi(0).$$

Die Gröſse

$$\varrho_{2m} = \int_{\frac{2m\pi}{h}}^{\frac{(2m+1)\pi}{h}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta$$

läſst sich aber folgendermaſsen in Grenzen einschlieſsen:

$$\frac{1}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{h}} \int_{\frac{2m\pi}{h}}^{\frac{(2m+1)\pi}{h}} \sin h\vartheta\, d\vartheta < \varrho_{2m} < \frac{1}{\sin\frac{2m\pi}{h}} \int_{\frac{2m\pi}{h}}^{\frac{(2m+1)\pi}{h}} \sin h\vartheta\, d\vartheta$$

oder

---

*) Es ist nämlich $\varrho_0 = \int_0^{\frac{\pi}{h}} \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta < \left[\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\right]_{\vartheta=0} \int_0^{\frac{\pi}{h}} d\vartheta < \frac{h\pi}{h} < \pi.$

Daſs $\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}$ für $\vartheta = 0$ einen Maximalwert erreicht, geht aus (18a) hervor.

$$\frac{2}{h\sin\frac{(2m+1)\pi}{h}} < \varrho_{2m} < \frac{2}{h\sin\frac{2m\pi}{h}}$$

oder beim Übergang zur Grenze

$$(32) \qquad \frac{2}{(2m+1)\pi} < \varrho_{2m} < \frac{2}{2m\pi}.$$

Für unendlich wachsende m wird also

$$(33) \qquad \lim \varrho_{2m} = 0,$$

und (31) geht in die für $n = \infty$, $0 < c \leqq \frac{\pi}{2}$ geltende Gleichung

$$(34) \qquad T = \int_0^c \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} = \frac{\pi}{2}\varphi(0)$$

über.

Es ist zweckmäfsig, sich von dem überraschenden Resultate, dafs von der in hohem Grade willkürlichen, durchaus nicht analytischen Funktion $\varphi(\vartheta)$ nur der einzige Wert $\varphi(0)$ für die Bestimmung von T in Betracht kommt, eine anschauliche Vorstellung zu machen. Die Sache ist in der That sehr einfach. Während $\sin h\vartheta$ in einem der abgegrenzten Intervalle seine positiven, hierauf in dem folgenden die gleichen negativen Werte durchläuft, hat sich $\frac{\varphi(\vartheta)}{\sin\vartheta}$ im allgemeinen nur unendlich wenig geändert. Je zwei aufeinanderfolgende Teile des Integrals heben sich daher auf. Dies trifft nicht mehr zu in der Umgebung von $\vartheta = 0$, da hier $\sin\vartheta$ unendlich klein, also $\frac{\varphi(\vartheta)}{\sin\vartheta}$ unendlich grofs wird. Hieraus folgt, dafs nur der Wert $\varphi(0)$ ausschlaggebend ist. Alles Übrige erklärt sich leicht.

9. Das gefundene Resultat können wir sofort erweitern. Ist $\varphi(\vartheta)$ eine zwischen 0 und c niemals zunehmende Funktion, welche jedoch auch negativ werden kann, so kann eine Konstante C immer so grofs gewählt werden, dafs in jenem Intervalle stets

$$\varphi(\vartheta) + C > 0$$

ist. Alsdann haben wir für unendliche n

$$\int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}[\varphi(\vartheta) + C] = \frac{\pi}{2}[\varphi(0) + C]$$

und

$$\int_0^c C\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta} = C\frac{\pi}{2},$$

also wieder

$$\int_0^c \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}d\vartheta = \frac{\pi}{2}\varphi(0).$$

Ist $\varphi(\vartheta)$ eine Funktion, welche in jenem Intervalle niemals abnimmt, so ist

$$\int_0^c \frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,[-\varphi(\vartheta)]\,d\vartheta = \frac{\pi}{2}\,[-\varphi_0],$$

so dafs auch hier nach Umkehrung des Zeichens (34) in Geltung bleibt.

Ist

$$0 < b < c \leqq \frac{\pi}{2},$$

so ist für unendliche h bei den bisher über $\varphi(\vartheta)$ gemachten Annahmen*)

$$\int_b^c \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = \int_0^c \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta - \int_0^b \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta$$

$$= \frac{\pi}{2}\,\varphi(0) - \frac{\pi}{2}\,\varphi(0)$$

oder

$$\int_b^c \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = 0. \tag{35}$$

10. Es sei jetzt allgemein $\varphi(\vartheta)$ eine Funktion, welche zwischen 0 und c stetig ist, aber beliebig oft zu- und abnimmt. Die Werte $\vartheta = c_1$, $c_2, \ldots$ mögen die Stellen bezeichnen, an welchen der Übergang vom Zuzum Abnehmen oder umgekehrt stattfindet; behält $\varphi(\vartheta)$ zwischen dem Zu- und Abnehmen auf einer Strecke den gleichen Wert, so kann der Grenzpunkt beliebig auf dieser angenommen werden. Es ist

$$\int_0^c \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = \int_0^{c_1} \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta + \int_{c_1}^{c_2} \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta + \cdots$$

oder, da nach (35) alle rechts stehenden Integrale aufser dem ersten verschwinden, nach (34)

$$\int_0^c \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = \frac{\pi}{2}\,\varphi(0).$$

Wenn $\varphi(\vartheta)$ auf endlichem Raume unendlich viele Maxima und Minima besitzt, so wird diese Betrachtung hinfällig; aus den Schlufsbemerkungen von Nr. 8 erkennt man, dafs dann das Resultat (34) im allgemeinen nicht aufrecht erhalten werden kann.

Führt $\varphi(\vartheta)$ an einer Stelle einen endlichen Stetigkeitssprung aus, so kann man wiederum an derselben eine Zerlegung vornehmen, worauf dasselbe Resultat erhalten wird; unendlich viele Stellen dieser

*) Wenn $\varphi(\vartheta)$ für $\vartheta < b$ gar nicht oder nicht geeignet gegeben ist, so kann man es von 0 bis b willkürlich ergänzt denken; übrigens ist hier das abzuleitende Resultat nach früheren Bemerkungen selbstverständlich.

Art sind im allgemeinen nicht zulässig. Sogar das stellenweise Unendlichwerden von $\varphi(\vartheta)$ kann unter Umständen ohne Einfluſs sein; doch gehen wir hierauf nicht ein, da diese Verhältnisse für die mechanischen Probleme nicht in Betracht kommen.

Das Gesamtresultat geht dahin, daſs (34) für $c \leq \frac{\pi}{2}$ gilt, wenn $\varphi(\vartheta)$ zwischen 0 und c eine beliebige, nur immer endlich bleibende Funktion ist, welche in diesem Intervalle nicht unendlich viele Maxima und Minima oder unendlich viele Stetigkeitsunterbrechungen aufweist.

11. Wir dehnen jetzt die Betrachtung auf den Fall aus, daſs c die Grenze $\frac{\pi}{2}$ überschreitet und nur $\leq \pi$ bleibt. Alsdann ist

$$\int_0^c \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, h\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta + \int_{\frac{\pi}{2}}^c \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta.$$

Das erste der rechts stehenden Integrale hat den Wert

$$\frac{\pi}{2}\varphi(0).$$

Das zweite wird durch die Substitution von $\pi - \vartheta$ an Stelle von ϑ in

$$-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi - c} \varphi(\pi - \vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta$$

umgewandelt. Dieser Ausdruck hat aber — man vertausche die Integrationsgrenzen — für $c = \pi$ den Wert $\frac{\pi}{2}\varphi(\pi)$, für $c < \pi$ aber den Wert Null. Wir erlangen so das Resultat:

Für unendliche $h = 2n + 1$ und $c < \pi$ ist

$$\int_0^c \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}\varphi(0), \tag{36}$$

für $c = \pi$ aber

$$\int_0^\pi \varphi(\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta = \frac{\pi}{2}[\varphi(0) + \varphi(\pi)]. \tag{37}$$

Sollte $\varphi(\vartheta)$ in $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi$ selbst einen endlichen Stetigkeitssprung ausführen, so ist für $\varphi(0)$ und $\varphi(\pi)$ jedesmal der Wert zu wählen, zu dem man gelangt, wenn man sich 0 oder π von einem Punkte der Strecke 0 bis π aus nähert.

12. Durch diese Resultate gelangen wir endlich zur Summation der Fourier'schen Reihe. Nach (14), (15), (16) ist ihre Summe, wenn n ins Unendliche wächst,

$$(38)\quad S = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta + \int\limits_0^{\frac{\pi+x}{2}} f(x-2\vartheta)\frac{\sin h\vartheta}{\sin\vartheta}\,d\vartheta = S_1 + S_2.$$

Ist $-\pi < x < \pi$, so folgt aus (36)

$$S_1 = \tfrac{1}{2} f(x+0), \quad S_2 = \tfrac{1}{2} f(x-0).$$

Wir unterscheiden $x+0$ und $x-0$ für den Fall, dafs $f(x)$ im Punkte x einen endlichen Stetigkeitssprung ausführt; wir gelangen zu dem einen oder dem andern Werte, wenn wir uns dem Punkte x in der negativen oder positiven Richtung nähern.

Ist $f(x)$ im Punkte x stetig, so haben wir, wie zu erwarten,

$$(39)\qquad S = f(x).$$

Führt dagegen $f(x)$ im Punkte x einen endlichen Sprung aus, so wird

$$(40)\qquad S = \tfrac{1}{2}\,[f(x+0) + f(x-0)],$$

d. h. die Reihe liefert das arithmetische Mittel der beiden Werte, zu welchen man im Punkte x, von verschiedenen Seiten herkommend, gelangt.

Für $x = \pi$ wird nach (37)

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = \tfrac{1}{2}\,[f(-\pi) + f(\pi)],$$

also

$$(41)\qquad S = \tfrac{1}{2}\,[f(-\pi) + f(\pi)],$$

und für $x = -\pi$

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\,[f(-\pi) + f(\pi)], \quad S_2 = 0,$$

so dafs auch hier (41) gilt.

Die Gleichung (39) bleibt daher für $x = -\pi$ oder $x = \pi$ nur bestehen, wenn

$$(42)\qquad f(-\pi) = f(\pi)$$

ist.

Die Fourier'sche Reihe, deren Koeffizienten durch (7) gegeben sind, hat also in der That, wenn $f(x)$ zwischen $x = -\pi$ und $x = \pi$ stetig und von unendlich vielen Maximis und Minimis frei ist, den Wert $f(x)$, mit eventueller Ausnahme der Punkte $-\pi$ und $+\pi$.

13. Bei dem Grenzübergange, welchen wir ausführten, mufsten (vgl. (9)) von der Kosinus- und der Sinusreihe gleich viele Glieder genommen werden. Es bleibt hiernach dahingestellt, ob beide Teile der Fourier'schen Reihe für sich allein konvergieren, oder ob beide nur zusammen bei der angegebenen Zuordnung ein bestimmtes Resultat liefern. Dafs ersteres der Fall ist, dafs wir also beide Reihenteile getrennt summieren dürfen, zeigt folgende einfache Betrachtung. Wir können setzen

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \tag{43}$$

wo dann die beiden Teile von $f(x)$ eine gerade und eine ungerade Funktion vorstellen. Da $\cos kx$ eine gerade, $\sin kx$ eine ungerade Funktion ist, so wird die Fourier'sche Entwicklung für

$$\frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{keine Sinus,}$$

diejenige für

$$\frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad \text{keine Kosinus}$$

enthalten. Beide müssen aber für sich allein konvergieren. Summiert man beide, so erhält man die Entwicklung von $f(x)$, deren beide Teile also einzeln konvergent sind. In den Punkten $x = \pm\pi$ kann die Übereinstimmung mit $f(x)$ aufhören.

14. Setzt man die Fourier'sche Reihe über $-\pi$ und $+\pi$ hinaus fort, so wiederholen sich ihre Werte periodisch; sie stellt eine periodische Funktion dar, welche im allgemeinen nicht analytisch ist und im allgemeinen nur für reelle Argumente Gültigkeit besitzt. Der große Wert, welchen diese Entwicklung hat, besteht in der Möglichkeit, jede beliebige reelle, stetig zusammenhängende, von unendlich vielen Maximis und Minimis freie Wertereihe durch einen hinschreibbaren Ausdruck als Funktion einer Größe x darzustellen; die Grenzen $-\pi$ und $+\pi$ können hierbei mittels einer Substitution $kx + k_1$ an Stelle von x in beliebige andere, im Endlichen gelegene, umgewandelt werden. Die Gleichung einer beliebig aus freier Hand hingezeichneten Linie, der Kontur eines Gebirgszugs u. s. w. läßt sich also mathematisch ausdrücken. In der Folge wird ferner die speziellere Aufgabe an uns herantreten, eine reelle periodische Funktion zu konstruieren, welche für ein Periodenintervall willkürlich vorgelegte Werte annimmt; dieselbe ist durch die Fourier'sche Reihe unmittelbar gelöst.

§ 73.

Unendlich kleine Schwingungen unendlich dünner Saiten und Membranen; die Wellenbewegung.

1. Den Untersuchungen über die Bewegung elastisch fester Körper schicken wir einen besonders leicht zu behandelnden Spezialfall voraus, der infolge gewisser hier zulässiger Vereinfachungen geradezu von der Theorie der Elastizität unabhängig wird und recht wohl schon früher hätte behandelt werden können. Wir lernen hierbei einen Bewegungstypus kennen, den man als Wellenbewegung bezeichnet und der uns in der Folge in mannigfachen Variationen häufig wiederbegegnen wird.

Ein elastischer Stab von verschwindend kleiner Dicke setzt einer Biegung einen verschwindend kleinen Widerstand entgegen, und zwar nimmt dieser Widerstand in stärkerem Maße ab, als der Widerstand gegen

Längendehnung. Wir können uns einen Stab von verschwindender Dicke vorstellen, bei welchem der Widerstand gegen Biegung überhaupt vernachlässigt werden kann*). Ein solcher Stab kommt in seinen Eigenschaften einem Faden nahe, wie er in § 64 besprochen wurde; nur ist er in der Längsrichtung als elastisch anzusehen. Wir nennen einen solchen unbedingt biegsamen, als Linie aufzufassenden Stab eine Saite und eine unendlich dünne Platte von derselben Eigenschaft eine Membran.

Wenn eine Saite in ihren Endpunkten befestigt ist, so daſs sie im Gleichgewichtszustande eine gerade Linie bildet, so kann sie Longitudinalschwingungen, d. h. Schwingungen in ihrer Längsrichtung ausführen. Da dieselbe mit den später zu besprechenden Longitudinalschwingungen elastischer, nicht verschwindend dünner Stäbe wesentlich identisch sind, so werden wir sie erst an späterer Stelle behandeln. Ähnlich verhält es sich mit den Torsionsschwingungen. Auſserdem kann aber die Saite auch Transversalschwingungen, d. h. Schwingungen in einer zur Längsrichtung normalen Richtung ausführen, und diese sollen uns, soweit sie unendlich klein sind, gerade an dieser Stelle beschäftigen.

Man könnte die Ansicht hegen, daſs diese Transversalschwingungen, wie sie bei Klavier- und Violinsaiten erzeugt werden, ihre Ursache in der Längsdehnung haben, welche mit der Entfernung der Saite aus der Gleichgewichtslage notwendig verbunden ist. Dies ist jedoch irrig. Die Längsdehnung, welche die Saite durch seitliche Entfernung eines ihrer Punkte aus der Gleichgewichtslage um eine unendlich kleine Strecke erfährt, ist nämlich unendlich klein zweiter Ordnung**), vermag also keine in Betracht kommende Kraft zu erzeugen.

Wirkt an dem einen Ende der Saite eine Zugkraft, die etwa durch ein angehängtes Gewicht erzeugt werden kann, während das andere Ende unbeweglich befestigt ist, so wird die Saite in den Zustand der Spannung versetzt. In allen Punkten der Saite herrscht, wie aus § 70, (50) hervorgeht, dieselbe Spannung, d. h. negative Druckkraft. Wird nun die Saite in transversaler Richtung aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt, so wird in solchen Teilen derselben, welche ihre Richtung geändert haben, eine transversale Komponente der Spannung erzeugt, welche allerdings unendlich klein von der ersten Ordnung ist, aber bei der unendlich kleinen Entfernung der Saite aus der Gleichgewichtslage doch ausreicht, um die transversalen Schwingungen zu begründen.

Die Theorie der transversal schwingenden Saiten wird hiernach von

*) Die Querdimensionen müssen auch gegen die vorkommenden Verschiebungen unendlich klein sein.

**) Die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete b unendlich klein von der ersten Ordnung ist, unterscheidet sich von der anderen, endlichen Kathete a nur um eine unendlich kleine Gröſse zweiter Ordnung. Es ist nämlich

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = a\left(1 + \frac{b^2}{2a^2}\right) = a + \frac{b^2}{2a}.$$

der eigentlichen Elastizitätstheorie ganz unabhängig; die Elastizitätskonstanten spielen in ihr gar keine Rolle. Eine ungespannte Saite schwingt überhaupt nicht transversal. Dagegen vermag ein ganz unelastischer Faden, wenn er nur gespannt ist und am einen Ende behufs der geringen Verlängerung nachzugeben vermag, Transversalschwingungen auszuführen. Wird eine elastische Saite dadurch gespannt, dafs man sie über ihre normale Länge ausdehnt und dann mit den Endpunkten befestigt, so kommt natürlich die Elastizitätskonstante E indirekt zur Geltung, da die Stärke der Spannung bei gegebener Verlängerung von ihr abhängt.

2. Wir legen die z-Achse in die Richtung der ruhenden Saite; dieselbe erstrecke sich von $z = 0$ bis $z = l$; s gebrauchen wir hier als gleichbedeutend mit z. u, v, w seien wieder die Verschiebungen in der Richtung der x, y, z-Achse. Die unendlich kleinen Schwingungen mögen eben sein und in der xz-Ebene vor sich gehen. Im allgemeinen Falle läfst sich nämlich die Bewegung in zwei ebene Komponenten der gleichen Art zerlegen, die einzeln behandelt werden können.

Von den Verschiebungen längs der z-Richtung sehen wir hier gänzlich ab. Die Saite sei bereits im Ruhezustande einer (auf den ganzen Querschnitt bezogenen) Spannung τ ausgesetzt, welche, wie schon erwähnt, in jedem Querschnitt die gleiche ist. Entfernt sich die Saite aus der Ruhelage, so bleibt doch bei stetig sich ändernder Bewegung die Neigung eines Elementes ds gegen die z-Achse stets unendlich klein, der Kosinus des Neigungswinkels entfernt sich also von der Einheit nur um eine unendlich kleine Gröfse zweiter Ordnung. Wenn daher auch genau genommen die Spannung nur in der Richtung der z-Achse konstant ist, so werden wir sie doch unter Vernachlässigung einer unendlich kleinen Gröfse zweiter Ordnung in der Richtung jedes Elementes ds der bewegten Saite als konstant ansehen dürfen*).

Die Komponente der Spannung nach der x-Achse ist in einem Punkte s

$$-\tau \frac{\partial u}{\partial s};$$

auf die beiden Endpunkte s und $s + ds$ eines Elementes wirken daher nach dieser Richtung die beiden Spannungen

$$-\tau \frac{\partial u}{\partial s} \quad \text{und} \quad \tau + \frac{\partial}{\partial s}\left(\tau \frac{\partial u}{\partial s}\right) ds = \tau + \tau \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} ds$$

ein, so dafs das Element durch die Kraft

$$\tau \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} ds$$

in Bewegung gesetzt wird.

---

*) Dafs auch durch die Verlängerung der Saite infolge der Deformation die Spannung nur um eine zu vernachlässigende Gröfse geändert wird, geht aus den Auseinandersetzungen der vorigen Nummer hervor.

Bezeichnet nun ε die Masse, welche die Längeneinheit der homogenen Saite besitzt, so ergiebt sich die einfache Bewegungsgleichung

$$\varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \tag{1}$$

zu welcher für $s = 0$ und $s = l$ die Grenzbedingung

$$u = 0 \tag{2}$$

tritt. Wir setzen noch*)

$$a^2 = \frac{\tau}{\varepsilon}, \tag{3}$$

wodurch (1) in

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} \tag{4}$$

übergeht.

3. Die partielle Differentialgleichung (4) ist leicht nach einer öfters angewandten Methode zu integrieren. Man überzeugt sich, dafs

$$u = \varphi\,(s \pm at), \tag{5}$$

worin φ eine beliebige Funktion bezeichnet, die Gleichung (4) befriedigt, und dafs das gleiche von einer Summe von Ausdrücken (5) gilt. Das allgemeinste Integral von (4), welches zwei willkürliche Funktionen φ_1 und φ_2 enthält, ist

$$u = \varphi_1\,(s + at) + \varphi_2\,(s - at). \tag{6}$$

Durch die Grenzbedingung $u = 0$ für $s = 0$ und $s = l$ wird die Willkürlichkeit von φ_1 und φ_2 etwas beschränkt. Bevor wir jedoch diesen Umstand näher untersuchen, wollen wir eine (5) entsprechende Bewegung einer eingehenderen Betrachtung unterwerfen.

4. Indem wir jetzt von dem speziell vorgelegten Probleme absehen, nehmen wir an, dafs eine beiderseits unendliche, gerade Reihe von Punkten gegeben sei, welche durch ihren Abstand von einem festen Nullpunkte fixiert seien. Diese Punkte mögen einer Bewegung unterworfen werden, welche durch

$$u = \varphi\,(s - at) \tag{7}$$

definiert ist, wobei es uns ganz gleichgültig ist, in welcher Richtung die Verschiebung u stattfindet; es kann sich ebensowohl um longitudinale wie transversale Bewegungen handeln.

Das Charakteristische der Bewegung (7) ist, dafs in allen Punkten s kongruente Bewegungsvorgänge statthaben, nur zu verschiedenen Zeiten. Die Bewegung, welche im Punkte $s = 0$ zur Zeit t statthat, findet im Punkte s zur Zeit $t + \frac{s}{a}$ statt; denn es ist

$$\varphi\,(-at) = \varphi\left(s - a\left(t + \frac{s}{a}\right)\right). \tag{8}$$

---

*) Wie leicht zu begründen, ist die Dimension von $\tau : l t^{-2} m$, von $\varepsilon : l^{-1} m$, von $a^2 : l^2 t^{-2}$, also von $a : l t^{-1}$.

Man kann die Sache so auffassen, dafs dieselbe — übrigens ganz willkürliche — Bewegung die Reihe der Punkte s mit der Geschwindigkeit a in der positiven Richtung durchläuft. Ersetzen wir in (7) a durch $-a$, so wird nur die Richtung der Fortpflanzung umgekehrt. Man bezeichnet die durch (7) definierte Bewegung als fortschreitende Wellenbewegung, a aber als ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit.

Am charakteristischsten tritt vielleicht die Wellenbewegung zu Tage, wenn φ so gewählt wird, dafs es im allgemeinen Null und nur für ein sehr kleines Intervall von Null verschieden ist. Dann befinden sich die Punkte der s-Linie im allgemeinen in Ruhe, während eine momentane Bewegung sie der Reihe nach durchläuft.

Die Bewegung der schwingenden Saite stellt sich nach (6) als die Kombination zweier Wellenbewegungen mit gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit, aber entgegengesetzter Fortpflanzungsrichtung dar; doch wird der Charakter dieser Bewegung erst ein bestimmterer werden, wenn wir die noch nicht berücksichtigten Grenzbedingungen in Rechnung ziehen.

5. Da für $s = 0$ und $s = l$ die Gröfse u bei beliebigem t verschwinden soll, so mufs

$$\varphi_1(at) + \varphi_2(-at) = 0, \tag{9}$$

$$\varphi_1(l + at) + \varphi_2(l - at) = 0 \tag{10}$$

sein. Aus (9) folgt, wenn jetzt x eine beliebige Variable bezeichnet,

$$\varphi_2(x) = -\varphi_1(-x), \tag{11}$$

aus (10) aber, das jetzt in

$$\varphi_1(l + at) = \varphi_1(-l + at) \tag{12}$$

übergeht, dafs

$$\varphi_1(x + 2l) = \varphi_1(x), \tag{13}$$

dafs also $\varphi_1(x)$ eine Funktion mit der additiven Periode $2l$ ist. Aus (6) wird mithin, wenn wir φ statt φ_1 schreiben,

$$u = \varphi(s + at) - \varphi(-s + at), \tag{14}$$

worin φ die additive Periode $2l$ besitzt.

Aus dem letzten Umstande folgt das wichtige Resultat, dafs die Bewegung sich periodisch wiederholt; die Periode ist

$$T = \frac{2l}{a} = 2l\sqrt{\frac{\varepsilon}{\tau}}. \tag{15}$$

Man kann die Zeit T als die Schwingungsdauer der Saite bezeichnen; dieselbe ist der Saitenlänge und der Quadratwurzel aus ihrer linearen Dichtigkeit*) direkt, der Quadratwurzel aus der Spannung aber umgekehrt proportional.

Dafs im übrigen (14) noch eine bis auf ihre Periodizität willkürliche Funktion φ enthält, erklärt sich durch die unendliche Mannig-

*) D. h. der Masse, welche die Längeneinheit der Saite besitzt.

faltigkeit der Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten, welche man den Punkten der Saite erteilen kann.

6. Man kann die Frage aufwerfen, ob die Saite aufser den beiden Endpunkten noch andere Punkte besitzt, welche dauernd in der Ruhelage verharren. Ist $s = l_0$ ein solcher, so mufs für beliebige t

$$\varphi(l_0 + at) = \varphi(-l_0 + at),$$

also

$$\varphi(x + 2l_0) = \varphi(x) \tag{16}$$

sein. φ mufs also die weitere Periode $2l_0$ besitzen. Nach einem einfachen funktionaltheoretischen Satze kann aber φ nur dann die beiden reellen Perioden $2l$ und $2l_0$ haben, wenn beide in einem rationalen Verhältnis stehen; andernfalls würde sich nachweisen lassen, dafs φ eine unendlich kleine Periode besitzen, d. h. konstant sein müfste. Aus dem Vorhandensein der beiden reellen Perioden $2l$ und $2l_0$ folgt dann leicht weiter, dafs auch der gröfste gemeinsame Teiler $2l_1$ dieser beiden Gröfsen eine Periode von φ sein mufs. Ist l_1 etwa der $n$te Teil von l, so teilt sich die Saite in n gleiche Teile, zwischen denen ruhende Punkte, sogenannte Knotenpunkte, liegen. Dies ergiebt sich unmittelbar nach (14) aus dem Vorhandensein der Periode $2l_1$; es ist nämlich für den $k$ten dieser Punkte

$$u = \varphi(kl_1 + at) - \varphi(-kl_1 + at) = \varphi(kl_1 + at) - \varphi(-kl_1 + 2kl_1 + at) = 0.$$

Weiter folgt, dafs in dem ersten, dritten, fünften u. s. w., andrerseits in dem zweiten, vierten, sechsten u. s. w. Teile jeweilig gleichzeitig die gleiche Bewegung stattfindet. Aber auch die Bewegungen in je zwei aufeinanderfolgenden Teilen stehen in einfacher Beziehung zueinander. Für je zwei Punkte, welche von dem $k$ten Teilpunkte nach rechts und links um die Strecke s_1 abstehen, haben wir die Transversalverschiebungen

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi(kl_1 + s_1 + at) - \varphi(-kl_1 - s_1 + at), \\ u_2 &= \varphi(kl_1 - s_1 + at) - \varphi(-kl_1 + s_1 + at) \\ &= \varphi(-kl_1 - s_1 + at) - \varphi(kl_1 + s_1 + at), \end{aligned}$$

d. h. es ist

$$u_1 = -u_2. \tag{17}$$

Zwei von einem Knotenpunkte gleichweit entfernte Punkte der Saite haben somit gleichzeitig gleiche und entgegengesetzte Bewegung. In zwei aufeinanderfolgenden der n Teile einer Saite herrscht also entgegengesetzte Bewegung derart, dafs im übrigen in Bezug auf den zwischenliegenden Knotenpunkt Symmetrie stattfindet.

Aus dem Vorhandensein der kleineren Periode von $\varphi(x)$ folgt unmittelbar, dafs sich auch die Gesamtbewegung zeitlich in einer kürzeren Periode wiederholt, als der in (15) angegebenen. Man findet für diese Periode

$$T_n = \frac{2l}{an} = \frac{2l}{n}\sqrt{\frac{\varepsilon}{T}}. \tag{18}$$

7. Obgleich sich die Bewegung (14) zunächst nur auf die Punkte der Saite bezieht, also $0 \leqq s \leqq l$ vorausgesetzt wird, so liefert doch (14) auch für beliebige s Resultate; wir können uns, ohne an dem Verlaufe von 0 bis l etwas zu ändern, die Saite beiderseits ins Unendliche fortgesetzt denken. Die Punkte $0, \pm l, \pm 2l$ u. s. w. sind Knotenpunkte; doch können die einzelnen Strecken von der Länge l wieder in eine ganze Zahl gleicher Teile geteilt erscheinen, die durch Knotenpunkte getrennt sind. In je zwei aufeinanderfolgenden Teilstrecken herrscht stets symmetrisch entgegengesetzte Bewegung, während in je zwei durch eine dritte getrennten Teilstrecken die gleiche Bewegung herrscht. Sowie sich die Bewegung räumlich nach je einer Strecke von der Länge $2l$, resp. $\frac{2l}{n}$ wiederholt, so wiederholt sie sich auch zeitlich nach der Zeitdauer T, resp. T_n.

Eine Bewegung von dem Charakter der soeben beschriebenen bezeichnet man im allgemeinen als die Bewegung in stehenden Wellen. Charakteristisch für sie ist das Vorhandensein unbeweglicher Knotenpunkte und die erörterte räumliche und zeitliche Periodizität. Gemäfs (14) entsteht die Bewegung in stehenden Wellen durch zwei fortschreitende Wellenbewegungen, welche sich einander in geeigneter Weise durchsetzen.

8. Von einer ganz anderen Seite her lernen wir die soeben besprochenen Bewegungsvorgänge kennen, wenn wir die Funktion φ nach § 72 in eine trigonometrische Reihe entwickeln; die Eigenschaften von φ machen dies in jedem wirklich eintretenden Falle möglich. Wir finden

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(x) &= a_0 + a_1 \cos\frac{\pi x}{l} + a_2 \cos\frac{2\pi x}{l} + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin\frac{\pi x}{l} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + \cdots, \end{aligned}\right.$$

worin nach § 72, (7)*)

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l} \varphi(x)\,dx, \\ a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} \varphi(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{+l} \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \end{aligned}\right.$$

zu setzen ist.

*) Man braucht nur in (19) $\frac{lx}{\pi}$ an Stelle von x zu setzen, um dies zu erkennen; es ist $\int_{-\pi}^{+\pi} \varphi\left(\frac{lx}{\pi}\right) dx = \frac{\pi}{l}\int_{-l}^{+l} \varphi(x)\,dx$ u. s. w.

Hiernach wird aus (14)

$$u = a_1 \left[\cos\frac{\pi(s+at)}{l} - \cos\frac{\pi(-s+at)}{l}\right]$$
$$+ a_2 \left[\cos\frac{2\pi(s+at)}{l} - \cos\frac{2\pi(-s+at)}{l}\right] + \cdots$$
$$+ b_1 \left[\sin\frac{\pi(s+at)}{l} - \sin\frac{\pi(-s+at)}{l}\right] + \cdots$$

oder

$$(21)\qquad u = -2a_1 \sin\frac{\pi s}{l}\sin\frac{\pi a t}{l} - 2a_2 \sin\frac{2\pi s}{l}\sin\frac{2\pi a t}{l} - \cdots$$
$$+ 2b_1 \sin\frac{\pi s}{l}\cos\frac{\pi a t}{l} + 2b_2 \sin\frac{2\pi s}{l}\cos\frac{2\pi a t}{l} + \cdots.$$

Setzt man, was zulässig ist,

$$(22)\qquad \begin{cases} -2a_n = A_n \cos\dfrac{n\pi a t_n}{l}, \\ -2b_n = A_n \sin\dfrac{n\pi a t_n}{l}, \end{cases}$$

so wird aus (21)

$$(23)\qquad u = A_1 \sin\frac{\pi s}{l}\sin\frac{\pi a(t-t_1)}{l} + A_2 \sin\frac{2\pi s}{l}\sin\frac{2\pi a(t-t_2)}{l} + \cdots$$
$$= \sum_1^\infty {}_n\, A_n \sin\frac{n\pi s}{l}\sin\frac{n\pi a(t-t_n)}{l}.$$

Infolge der Willkürlichkeit von φ sind die A_n und t_n willkürliche Konstanten, von denen die A_n nur so gewählt zu sein brauchen, daſs die Reihe auf der rechten Seite von (23) durchgehends hinreichend kleine Werte liefert*).

Die Interpretation der Gleichung (23), welche an Allgemeinheit hinter (14) nicht zurücksteht, ist eine sehr einfache. Die Bewegung setzt sich im allgemeinsten Falle aus unendlich vielen Einzelbewegungen (eventuell auch einer endlichen Zahl solcher) zusammen, die durch die einzelnen Glieder der Reihe in (23) definiert sind und somit die Gleichung

$$(24)\qquad u_n = A_n \sin\frac{n\pi s}{l}\sin\frac{n\pi a(t-t_n)}{l}$$

besitzen. Infolge der Einzelbewegung (24) führt jeder Punkt der Saite

*) Das Problem der schwingenden Saite wurde zuerst von d'Alembert allgemein gelöst; er fand die Integralgleichung (14). Euler bearbeitete den Gegenstand von neuem und stellte namentlich fest, daſs die Funktion φ nicht ein analytisch hinschreibbarer Ausdruck seiner Variabeln sein müsse. Dan. Bernoulli fand bald hierauf das Integral in einem Ausdruck von dem Charakter der Gleichung (23). Hieran knüpfte sich ein langjähriger Streit, der sich um die Frage drehte, ob die Bernoulli'sche Lösung den gleichen Grad von Allgemeinheit besitze, wie die d'Alembert'sche. Erst durch die Fourier'schen Untersuchungen über trigonometrische Reihen wurde klargestellt, daſs beide Lösungen wesentlich identisch sind. Ausführlicheres über die Geschichte des Problems giebt Riemann in der in § 72 angeführten Abhandlung.

eine harmonische Bewegung aus (vgl. § 8), deren Schwingungsdauer $T_n = \frac{2l}{na}$ und deren Amplitude $A_n \sin \frac{n\pi s}{l}$ ist; die Punkte $s = \frac{kl}{n}$ sind demnach Knotenpunkte.

Ihre weiteste Elongation von der Ruhelage erfahren alle Punkte der Saite gleichzeitig; die Kurve der weitesten Elongation, in der die Geschwindigkeit Null wird, ist durch

$$(25) \qquad u_n = A_n \sin \frac{n\pi s}{l}$$

dargestellt, ist also eine Sinuslinie.

Die einfachste der Bewegungen (24) ist

$$(26) \qquad u_1 = A_1 \sin \frac{\pi s}{l} \sin \frac{\pi a(t - t_1)}{l},$$

bei der keine Knotenpunkte aufser in den Endpunkten der Saite entstehen. Die gröfste Elongation von der Gleichgewichtslage erfahren die Punkte, welche in der Mitte zwischen je zwei Knotenpunkten liegen; es sind dies die sog. Schwingungsbäuche.

9. Jede harmonische Bewegung, deren Schwingungsdauer innerhalb gewisser Grenzen liegt, bringt in unserem Ohre, falls sie durch ein geeignetes Medium in später zu besprechender Weise in dasselbe übertragen wird, die Empfindung eines Tones hervor. Die Höhe des Tones hängt lediglich von der Schwingungsdauer, die Stärke von der Amplitude und der Gröfse der schwingenden Masse ab. Eine schwingende Saite bringt demgemäfs, wenn sie eine geeignete Länge und Spannung besitzt, im allgemeinen unendlich viele Töne hervor. Der tiefste derselben, der die längste Schwingungsdauer T_1 besitzt, heifst ihr Grundton, die übrigen, deren Schwingungsdauer $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ u. s. w. von T_1 ist, heifsen ihre Obertöne*). Das Intensitätsverhältnis der einzelnen Töne hängt u. a. von der Art des Anschlags ab und bedingt teilweise die Klangfarbe. Die weitere Untersuchung des hier begonnenen Gegenstandes gehört in das Gebiet der speziellen Akustik.

10. Wir behandeln noch die Transversalschwingungen einer quadratförmigen, längs der vier Grenzlinien gleichmäfsig gespannten Membran. Der Nullpunkt des Koordinatensystems liege im Mittelpunkte der Membran; die Seitenlinien mögen der x- und y-Achse parallel laufen, ihre Länge sei l. Es handelt sich um die Verrückungen w in der Richtung der z-Achse.

Wäre die Membran nur in zwei Gegenseiten gleichmäfsig gespannt, so müfste die Bewegungsgleichung genau dieselbe wie diejenige einer Saite sein. Indem wir die Wirkungen der Spannungen nach zwei zu

*) Der erste Oberton ist nach bekannter Bezeichnung die erste Oktave, der zweite die Duodezime, der dritte die zweite Oktave des Grundtons u. s. w.

einander senkrechten Richtungen einfach summieren, erhalten wir gemäfs (4) die partielle Differentialgleichung der Bewegung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{27}$$

in der a^2 der Spannung direkt, der Masse der Flächeneinheit der Membran umgekehrt proportional ist. Hierzu tritt die Grenzbedingung, dafs für $x = \pm \frac{l}{2}$ und $y = \pm \frac{l}{2}$

$$w = 0 \tag{28}$$

werden mufs.

Die Gleichung (27) kann analog zu § 47, (1) und (7) allgemein integriert werden; doch enthält das Integral unendlich viele willkürliche Funktionen. Um zu brauchbareren Ausdrücken zu gelangen, gehen wir von der Annahme aus, dafs die Transversalbewegung eines Membranpunktes sich aus unendlich vielen harmonischen Bewegungen zusammensetzen lasse. Wir setzen speziell

$$w = \sum_{m,n} a_{m,n} \cos pt \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{n\pi y}{l}, \tag{29}$$

wo die Summe über beliebige ganzzahlige m und n ausgedehnt werden kann. (29) befriedigt in der That (27) und (28), wenn p mit m und n durch die Beziehung

$$p^2 = \frac{\pi^2 a^2 (m^2 + n^2)}{l^2} \tag{30}$$

verknüpft ist. Zugleich hat noch (29) die Besonderheit, dafs für $t = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0$$

wird, was im allgemeinen nicht der Fall zu sein brauchte. Die $a_{m,n}$ sind ganz willkürlich, nur mufs bei unendlich vielen Gliedern die Konvergenz und hinreichende Kleinheit der Reihe gesichert sein.

Man übersieht sogleich, dafs selbst in dem behandelten Spezialfalle die Reihe der erzeugten Töne eine doppelt unendliche ist und dafs diese im allgemeinen keinen harmonischen*) Zusammenklang liefern. Den tiefsten Ton erhält man für

$$m = n = 1, \quad p = \frac{\pi a}{l}\sqrt{2}, \tag{31}$$

den nächsten für

$$m = 2, \quad n = 1 \text{ oder } m = 1, \quad n = 2, \; p = \frac{\pi a}{l}\sqrt{5}, \tag{32}$$

so dafs schon die Schwingungszahlen dieser beiden in irrationalem Verhältnis stehen.

---

*) Damit zwei Töne einen harmonischen Zusammenklang ergeben, müssen die Beträge ihrer Schwingungsdauer in einem einfachen, rationalen Verhältnisse stehen.

11. Jedem einzelnen Tone der Membran entsprechen gewisse Knotenlinien, welche bei der Schwingung in Ruhe bleiben; man erhält ihre Gleichung, indem man

$$(33)\qquad \sum_{m,n} a_{m,n} \cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi y}{l} = 0$$

setzt, wobei über diejenigen m und n zu summieren ist, für welche bei bestimmt vorgelegtem p die Gleichung (30) erfüllt ist.

Wegen der Willkürlichkeit der $a_{m,n}$ nehmen die Knotenlinien je nach der Erregung der Membran eine sehr verschiedene Gestalt an. Nur wenn einem p nur eine Kombination von m- und n-Werten entspricht, beschränkt sich die linke Seite von (33) auf ein einziges Glied. Dies kann nur für $m = n$ zutreffen, wo dann die Knotenlinien den Seiten der Membran parallel laufen und letztere in m^2 kongruente Quadrate zerlegen.

§ 74.

Schwingungen eines unendlich dünnen Prismas.

1. Wir wenden uns jetzt der Aufgabe zu, die Bewegung eines homogenen unendlich dünnen*) Prismas (Stabes) zu untersuchen, welches in einem Punkte einer Grundfläche auf die in § 70 und § 71 beschriebene Weise befestigt ist und durch eine dem de St. Vénant'schen Probleme entsprechende Deformation aus der normalen Lage abgelenkt, nunmehr aber sich selbst ohne Einwirkung äußerer Kräfte überlassen wurde. Hierbei beschränken wir uns auf unendlich kleine Bewegungen und führen alle in § 70, 16 angegebenen Vereinfachungen ein; auch die Koordinatensysteme**) legen wir entsprechend. Es genügt, die Bewegungen eines Punktes der Schwerpunktslinie zu verfolgen.

2. Wenn wir von Gleichungen des Gleichgewichtes zu solchen der Bewegung übergehen wollen, so brauchen wir nur, wie dies schon öfters geschah, in jene Kräfte einzuführen, welche geeignet sind, die vorhandenen Beschleunigungen aufzuheben. Bezeichnet ε die Dichtigkeit des homogenen Prismas, so sind

$$(1)\qquad -\varepsilon\, dx\, dy\, ds\,\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2},\qquad -\varepsilon\, dx\, dy\, ds\,\frac{\partial^2 y'}{\partial t^2},\qquad -\varepsilon\, dx\, dy\, ds\,\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}$$

---

*) Der Widerstand gegen Biegung soll hier nicht vernachlässigt, das Prisma soll also nicht als Saite betrachtet werden.

**) x', y', z' sind die Koordinaten eines Punktes des Prismas im festen Koordinatensystem, ξ, η, ζ die Koordinaten eines Punktes der Schwerpunktslinie im gleichen System, x, y, z die Koordinaten eines Punktes des Prismas in einem System, welches den Punkt ξ, η, ζ zum Nullpunkte hat und dessen z-Achse mit der Tangente an die Schwerpunktslinie zusammenfällt, vor der Deformation, $x + u$, $y + v$, $z + w$ dieselben nach der Deformation, s ist die Länge der nicht deformierten Schwerpunktslinie vom Nullpunkte bis zum Punkte ξ, η, ζ.

die Kraftkomponenten, welche die Beschleunigung des Massenelementes $dx\,dy\,ds$, das den Punkt x', y', z' umgiebt, annullieren.

In die Ausdrücke (1) führen wir die Werte § 71, (1) ein, vernachlässigen jedoch die unendlich kleinen Gröfsen höherer Ordnung u, v, w gegen x, y, z und setzen aufserdem $z = 0$, da wir trotzdem durch entsprechende Wahl von s den Punkt x', y', z' mit jedem Punkte des Prismas identifizieren können. Hiernach haben wir

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + x\,\dfrac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + y\,\dfrac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^2 y'}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + x\,\dfrac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + y\,\dfrac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2}, \\ \dfrac{\partial^2 z'}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + x\,\dfrac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} + y\,\dfrac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2}. \end{cases}$$

Unter Benutzung dieser Werte bilden wir die aus (1) hervorgehenden Kraftkomponenten und Drehungsmomente, welche auf ein durch zwei unendlich benachbarte Querschnitte ausgeschnittenes Element des Prismas einwirken. Die ersteren sind bei Ausdehnung der Integrationen über den ganzen Querschnitt

$$(3)\qquad -\varepsilon\,ds\int\frac{\partial^2 x'}{\partial t^2}\,dx\,dy = -\varepsilon\,ds\int\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + x\,\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial t^2} + y\,\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial t^2}\right)dx\,dy$$

u. s. w.

Benutzt man die Gleichungen § 70, (66), so erhält man für die Kraftkomponenten die Werte

$$(4)\qquad -\varepsilon f ds\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad -\varepsilon f ds\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad -\varepsilon f ds\,\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},$$

worin f wieder den Flächeninhalt des Querschnittes bedeutet. Man kann sich also die Masse des Elementes im Punkte ξ, η, ζ der Schwerpunktslinie konzentriert denken.

Für die Drehungsmomente um Achsen, welche durch Punkt ξ, η, ζ parallel zu den Achsen der x', y', z' gelegt sind, erhalten wir

$$-\varepsilon\,ds\int\left[\frac{\partial^2 z'}{\partial t^2}(y'-\eta) - \frac{\partial^2 y'}{\partial t^2}(z'-\zeta)\right]dx\,dy$$
$$= -\varepsilon\,ds\int\left[\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + x\,\frac{\partial^2 \gamma_1}{\partial t^2} + y\,\frac{\partial^2 \gamma_2}{\partial t^2}\right)(\beta_1 x + \beta_2 y) - \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + x\,\frac{\partial^2 \beta_1}{\partial t^2} + y\,\frac{\partial^2 \beta_2}{\partial t^2}\right)(\gamma_1 x + \gamma_2 y)\right]dx\,dy$$

u. s. w.,

oder unter Benutzung von § 70, (66) und (67)

$$(5)\qquad \begin{cases} -\varepsilon\,ds\left[L\left(\beta_1\,\dfrac{\partial^2\gamma_1}{\partial t^2} - \gamma_1\,\dfrac{\partial^2\beta_1}{\partial t^2}\right) + K\left(\beta_2\,\dfrac{\partial^2\gamma_2}{\partial t^2} - \gamma_2\,\dfrac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2}\right)\right], \\ -\varepsilon\,ds\left[L\left(\gamma_1\,\dfrac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2} - \alpha_1\,\dfrac{\partial^2\gamma_1}{\partial t^2}\right) + K\left(\gamma_2\,\dfrac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2} - \alpha_2\,\dfrac{\partial^2\gamma^2}{\partial t^2}\right)\right], \\ -\varepsilon\,ds\left[L\left(\alpha_1\,\dfrac{\partial^2\beta_1}{\partial t^2} - \beta_1\,\dfrac{\partial^2\alpha_1}{\partial t^2}\right) + K\left(\alpha_2\,\dfrac{\partial^2\beta_2}{\partial t^2} - \beta_2\,\dfrac{\partial^2\alpha_2}{\partial t^2}\right)\right]. \end{cases}$$

3. Die Ausdrücke (5) vereinfachen sich noch infolge der gemachten Voraussetzung, dafs die Entfernungen der Punkte des Prismas aus der ursprünglichen Lage unendlich klein sind. Es sind daher auch die Neigungen der Achsen x, y, z gegen resp. die Achsen x', y', z' nur unendlich klein. Dabei ist zu beachten, dafs sich die Kosinus unendlich kleiner Winkel nur um eine unendlich kleine Gröfse zweiter Ordnung von der Einheit unterscheiden, während ihre Sinus unendlich kleine Gröfsen erster Ordnung sind. Wir setzen daher

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1. \tag{6}$$

Ferner ist*)

$$\alpha_3 = -\gamma_1 = \frac{d\xi}{ds}, \qquad \beta_3 = -\gamma_2 = \frac{d\eta}{ds}$$

oder, da wir hier für die Schwerpunktslinie

$$\xi = u, \quad \eta = v, \quad \zeta = s + w \tag{7}$$

nehmen dürfen und ds der Richtung nach mit dz bis auf einen unendlich kleinen Winkel höherer Ordnung zusammenfällt,

$$\alpha_3 = -\gamma_1 = \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad \beta_3 = -\gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial z}. \tag{8}$$

Bezeichnet ψ den Winkel, um welchen der Querschnitt von der positiven x-Achse nach der positiven y-Achse hin gedreht erscheint, so ist

$$-\alpha_2 = \beta_1 = \psi \tag{9}$$

zu setzen.

Hiernach nehmen die Kraftkomponenten (4) und die Drehungsmomente (5) die Gestalt an

$$\begin{cases} -\varepsilon f ds \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ -\varepsilon f ds \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ -\varepsilon f ds \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{cases} \tag{10}$$

und

$$\begin{cases} -\varepsilon ds \left[L\left(-\psi \dfrac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\dfrac{\partial u}{\partial z}\right) - K \dfrac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2}\right], \\ -\varepsilon ds \left[L \dfrac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} + K\left(-\psi \dfrac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\right], \\ -\varepsilon ds (L + K) \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \end{cases} \tag{11}$$

4. Die gefundenen Ausdrücke sind in den Gleichungen § 71, (14) und (15) den auf das Prismenelement einwirkenden Kraftkomponenten und

*) Die Winkel, welche die Achsen des x, y, z-Systems bilden, sind nahezu rechte, ihre Kosinus also unendlich kleine Gröfsen erster Ordnung. Wenn man nun unendlich kleine Gröfsen zweiter Ordnung gegen solche erster Ordnung vernachlässigt, so wird aus $\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3 + \gamma_1\gamma_3 = 0$ die Relation $\alpha_1 + \gamma_3 = 0$; ebenso findet man $\beta_3 + \gamma_3 = 0$. Das Weitere ergiebt sich unmittelbar.

Drehungsmomenten zuzufügen. So gelangen wir zu den Bewegungsgleichungen (in denen die rechten Seiten noch dem Vorhergehenden entsprechend umzugestalten sind)

$$(11a)\quad \begin{cases} \varepsilon f \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(\alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z), \\ \varepsilon f \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(\beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z), \\ \varepsilon f \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(\gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z) \end{cases}$$

und

$$(12)\quad \begin{cases} \varepsilon\left[L\left(-\psi \frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\frac{\partial u}{\partial z}\right) - K\frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2}\right] \\ \quad = \frac{\partial}{\partial s}(\alpha_1 M_x + \alpha_2 M_y + \alpha_3 M_z) + \alpha_2 X - \alpha_1 Y = 0, \\ \varepsilon\left[L\left(\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial t^2} + K\left(-\psi \frac{\partial^3 v}{\partial z \partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right]\right. \\ \quad = \frac{\partial}{\partial s}(\beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z) + \beta_2 X - \beta_1 Y = 0, \\ \varepsilon(L+K)\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(\gamma_1 M_x + \gamma_2 M_y + \gamma_3 M_z) + \gamma_2 X - \gamma_1 Y = 0. \end{cases}$$

5. Zur Auswertung der Gleichungen (11a) und (12) gelangen wir in folgender Weise. Voraussetzungsmäſsig sind die Verrückungen, welche ein Punkt des Prismas im Laufe der Bewegung erfährt, nur unendlich kleine; insofern entspricht unsere Aufgabe ganz dem de St. Vénant'schen Probleme. Dagegen können hier die Gröſsen a_0, b_1 u. s. w. nicht mehr für das ganze Prisma als Konstante gelten. Während z. B. im Gleichgewichtszustande bei der Längenausdehnung jedes Teilchen die gleiche Dilatation erfährt, können im Bewegungszustande die einzelnen Teile sehr verschiedene Dilatationen besitzen. Wir werden daher a_0, a_1, b, u. s. w. in Bezug auf x, y, z allerdings als Konstante behandeln, dagegen als von s abhängig betrachten. Trotzdem werden wir bei der Differentiation wieder dz und ds schlieſslich identifizieren, da hierdurch nur Fehler höherer Ordnung eintreten.

Wenn ein Körper unter Einfluſs einzelner, gesondert wirkender Kräfte gewisse unendlich kleine Bewegungen ausführt, so ist das Resultat der Gesamtheit jener Kräfte die Summe jener Einzelbewegungen*). Demgemäſs können wir auch die unendlich kleinen Bewegungen eines unendlich dünnen Prismas in Einzelbestandteile zerfällen, welche den Fundamentaldeformationen, der Verlängerung, der Torsion und der Biegung (doppelter Art) entsprechen.

6. Soll das Prisma bei der Bewegung nur eine Längendilatation erfahren, so ist für jeden Punkt der Schwerpunktslinie

$$u = v = 0;$$

*) Vgl. § 12, 3.

aufserdem ist

$$\psi = 0,$$

$$X = Y = 0, \quad M_x = M_y = M_z = 0.$$

§ 70, (76) liefert

$$Z = Ea_0 f$$

und § 70, (42) für $x = y = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = a_0,$$

so dafs

(12a)
$$Z = Ef\frac{\partial w}{\partial z} = Ef\frac{\partial w}{\partial s}$$

wird.

Aus der dritten Gleichung (11) folgt bei Einsetzung dieser Werte und der vorher aufgestellten Werte für die Richtungskosinus

(13)
$$\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = E\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}.$$

Falls nur Torsion stattfinden soll, so ist

$$X = Y = Z = 0, \quad M_x = M_y = 0$$

und nach § 70, (77), wenn

$$M = cN$$

gesetzt wird*),

(13a)
$$M_z = \frac{Ec(N - K - L)}{2(1 + \mu)}$$

und nach § 70, (42), resp. (53)

$$u = cyz,$$
$$v = -cxz.$$

Offenbar haben wir aber für den unendlich kleinen Winkel ψ, welcher die Gröfse der Torsion für einen Punkt bestimmt,

(13b)
$$\psi = -\frac{u}{y} = \frac{v}{x} = -cz,$$

also
$$c = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = -\frac{\partial\psi}{\partial s}.$$

Die letzte Gleichung (12) liefert hiernach

(14)
$$\varepsilon(L + K)\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{E(L + K - N)}{2(1 + \mu)}\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2},$$

eine Gleichung, welche (13) ganz analog ist. Sie bestimmt die sog. Torsionsschwingungen.

Nehmen wir ferner an, dafs die Schwerpunktslinie nur eine Biegung in der xz-Ebene ohne Dilatation erfahren soll und dafs auch jede Torsion

---

*) Es ist einleuchtend, dafs hier, wo keine Biegung zweiter Art statthat, M_z mit der Torsionskonstante c verschwinden mufs; aufserdem kann diese nur linear darin vorkommen, da Ω sie linear enthält (vgl. § 70, 6 und § 70, (75)).

ausgeschlossen ist, so müssen wir in § 70, (42) die Konstanten a_1 und b_1 beibehalten. Wir haben für $x = y = 0$, d. h. für die Schwerpunktslinie

$$u = dz - \frac{a_1}{2} z^2 - \frac{b_1}{6} z^3,$$

aus der*)

(14a) $$b_1 = -\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = -\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}$$

folgt. Hiernach wird (§ 70, (76))

$$X = -EL\frac{\partial^3 u}{\partial s^3},$$

und die erste Gleichung (11) liefert

(15) $$\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -EL\frac{\partial^4 u}{\partial s^4}.$$

Durch die Gleichung (15) sind die Transversalschwingungen**) in der xz-Ebene bestimmt.

7. Setzen wir in der partiellen Differentialgleichung (13) der Longitudinalschwingungen***)

(16) $$\frac{E}{\varepsilon} = a^2, \quad a = \sqrt{\frac{E}{\varepsilon}},$$

so wird sie zur Gleichung

(17) $$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial s^2},$$

die mit § 73, (4) wesentlich übereinstimmt. Ihre allgemeine Integralgleichung ist daher

(18) $$w = \varphi_1(s + at) + \varphi_2(s - at).$$

Von der Art der Befestigung des Stabes hängt es ab, welchen Grenzbedingungen (18) zu unterwerfen ist. Erstreckt sich das Prisma beiderseits ins Unendliche, ohne dort als befestigt gedacht zu werden, so kann (18) in seiner Allgemeinheit beibehalten werden. Nach den Erörterungen von § 73 setzt sich dann die Bewegung aus zwei Wellenbewegungen zusammen, welche mit der Geschwindigkeit a in entgegengesetzter Richtung fortschreiten. Die Fortpflanzungsgeschwindig-

---

*) Die vorgenommene Differentiation, bei der a_1, b_1 als Konstanten betrachtet werden, gilt natürlich zunächst nur für ein kleines Element des Prismas, was jedoch nicht hindert, nachher für z die Variable s einzuführen. Dafs a_1 bei der Bewegung gar nicht in Betracht kommt, erklärt sich aus dem Umstande, dafs in dem Ausdrucke für u die dritte Potenz von z gegenüber der zweiten den Ausschlag giebt.

**) Diese Gleichung wurde bereits von Dan. Bernoulli aufgestellt und integriert.

***) Die Theorie der Longitudinalschwingungen einer gespannten Saite wird hiermit zugleich erledigt; da die Spannung den Elastizitätskoeffizienten nicht beeinflufst, so kommt sie für dieses Problem gar nicht in Betracht. Die Änderung der Dichtigkeit durch die Spannung ist verschwindend klein.

keit ist der Quadratwurzel aus dem Elastizitätsmodulus direkt, derjenigen aus der Dichtigkeit umgekehrt proportional.

8. Wenn ein endliches Prisma an beiden Endflächen ($s = 0$ und $s = l$) befestigt ist, so mufs an ihnen $w = 0$ sein. Nach § 73, 5 wird hier

$$w = \varphi(s + at) - \varphi(-s + at), \tag{19}$$

wo φ die additive Periode $2l$ besitzt. Der Vorgang ist der Bewegung gespannter Saiten vollkommen analog; an die Stelle transversaler Schwingungen treten nur longitudinale, und die Konstanten sind andere. Entsprechend § 73, (15) beträgt die Schwingungsdauer

$$T = \frac{2l}{a} = 2l\sqrt{\frac{\varepsilon}{E}} \tag{20}$$

oder einen aliquoten Teil dieser Gröfse. Die Schwingungsdauer eines beiderseits befestigten elastischen, longitudinal schwingenden Stabes ist seiner Länge und der Quadratwurzel aus seiner Dichtigkeit direkt, der Quadratwurzel aus seinem Elastizitätsmodulus umgekehrt proportional.

Bringt man also bei einer gespannten, elastischen Saite das eine Mal Transversalschwingungen, das andere Mal Longitudinalschwingungen hervor, so ist der erzeugte Grundton verschieden; im ersten Falle hängt er von der Stärke der Spannung, im zweiten von dem Elastizitätsmodulus ab. Auch ist die Bedeutung von ε in beiden Fällen eine verschiedene. Bei den Transversalschwingungen ist ε die in der Längeneinheit enthaltene Masse, also ceteris paribus dem Flächeninhalte des Querschnittes der Saite proportional; bei den Longitudinalschwingungen ist ε die in der Einheit des Rauminhaltes enthaltene Masse, so dafs die Dicke der Saite gar nicht in Betracht kommt.

Die weiteren Verhältnisse (das Vorhandensein der Obertöne u. s. w.) entsprechen ganz denjenigen bei transversal schwingenden Saiten.

9. Wenn der Stab von der Länge l in der Endfläche $s = 0$ befestigt, in der Endfläche $s = l$ aber frei ist, so mufs zunächst wieder $w = 0$ für $s = 0$ sein. Am freien Ende mufs der Druck verschwinden, d. h. es mufs nach (12a) für $s = l$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 0 \tag{21}$$

sein. Hiernach folgt aus (18), wenn φ_1' und φ_2' die Differentialquotienten von φ_1 und φ_2 nach dem ganzen Argumente sind,

$$0 = \varphi_1(at) + \varphi_2(-at), \tag{22}$$

$$0 = \varphi_1'(l + at) + \varphi_2'(l - at). \tag{23}$$

Aus (22) folgern wir wieder

$$\varphi_2(x) = -\varphi_1(-x), \tag{24}$$

also

$$\varphi_2'(x) = \varphi_1'(-x);$$

aus (23) folgt dann weiter, dafs

$$\varphi_1'(l + at) = - \varphi_1'(- l + at)$$

ist, d. h. dafs

(25) $$\varphi_1'(x + 2l) = - \varphi_1'(x),$$

also

(26) $$\varphi_1'(x + 4l) = \varphi_1'(x)$$

ist. φ_1' und damit auch φ_1 besitzt somit die additive Periode $4l$. Wir haben mithin wieder

(27) $$w = \varphi_1(s + at) - \varphi_1(- s + at),$$

worin aber φ_1 die Periode $4l$ aufweist. Aufserdem ergiebt sich durch Integration von (25)

(28) $$\varphi_1(x + 2l) = - \varphi_1(x) + \text{Const.}$$

Hieraus folgt (bei Erweiterung gemäfs § 73, 7) für das w des Punktes $s + 2l$

(29) $$\varphi_1(s + 2l + at) - \varphi_1(- s - 2l + at)$$
$$= - \varphi_1(s + at) + \varphi_1(- s + at) = - w.$$

Somit führt der Stab, dessen eines Ende frei ist, dieselben Longitudinalschwingungen aus, wie ein Stab von doppelter Länge, dessen beide Enden befestigt sind, jedoch mit der Beschränkung, dafs irgend zwei aufeinanderfolgende Strecken von der Länge $2l$ die entgegengesetzte Bewegung aufweisen. Dies erfordert, dafs in der Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen (vgl. § 73, (23)) in welcher $2l$ an Stelle von l zu setzen ist, nur die ungeraden Glieder vorkommen. Man überzeugt sich nämlich leicht davon, dafs nur in diesem Falle die einzelnen harmonischen Bewegungen in der zweiten Strecke die umgekehrten sind wie in der ersten.

Das freie Ende des Stabes ist also für alle einzelnen harmonischen Bewegungen, in welche sich die Gesamtbewegung auflösen läfst, ein Schwingungsbauch.

Der Grundton des mit einem Ende freien Stabes ist um eine Oktave tiefer, als derjenige des beiderseits befestigten Stabes; von den Obertönen kommen der zweite, vierte u. s. w. in Wegfall.

10. Ist der Stab von endlicher Länge l, aber beiderseits nicht befestigt, so entstehen an beiden Enden Schwingungsbäuche. Denkt man sich den ganzen Stab in $2n$ gleiche Teile geteilt, so können — wie auch ohne die leicht durchzuführende Rechnung ersichtlich ist — der erste, dritte, fünfte u. s. w. Teilpunkt Schwingungsknoten sein, während sich im zweiten, vierten u. s. w. Schwingungsbäuche befinden. Man kann sich also den Stab aus n gleichen, beiderseits befestigten Stäben zusammengesetzt denken; der eine derselben ist jedoch halbiert und seine beiden Hälften sind an die beiden Enden der übrigen Stabreihe angefügt. Hiernach stimmen die möglichen Schwingungsarten des beiderseits freien Stabes mit denen des beiderseits befestigten

wesentlich überein. Die Schwingungsdauer des Grundtons ist durch (20) gegeben und die Obertöne sind vollzählig vorhanden.

Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dafs mittels der Theorie der Longitudinalschwingungen der gerade Stofs elastischer Cylinder eingehender behandelt werden kann. Durch den Stofs findet eine beiderseitige Kompression an der Stelle des Zusammentreffens statt, die sich durch jeden Stab weiter fortpflanzt; der Rückstofs tritt nicht momentan ein*).

11. Die Theorie der Torsionsschwingungen ist mit derjenigen der Longitudinalschwingungen infolge der Analogie von (13) und (14) aufs engste verwandt. Man braucht nur die Verschiebung w durch den Torsionswinkel ψ zu ersetzen und die Konstanten zu ändern, um aus den Longitudinalschwingungen die Torsionsschwingungen zu erhalten. Die Schwingungsdauer ist eine andere und hängt hier von der Konstanten $\frac{E}{1+\mu}$ ab.

Will man die Schwingungen untersuchen, welche ein an einem vertikalen elastischen Drahte aufgehängter schwerer Körper ausführt, so kann man von der vereinfachenden Annahme ausgehen, dafs auf den Körper ein Drehungsmoment einwirkt, welches durch (13a) gegeben ist. Hierin ist gemäfs (13b), wobei wir z durch s ersetzen, $c = -\frac{\psi}{s}$ zu nehmen. Nach § 56, (12) erhalten wir für die Winkelbewegung des festen Körpers um seine vertikale Achse eine Gleichung von der Form

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -k^2\psi, \tag{30}$$

die nach § 8 eine der harmonischen analoge Bewegung bestimmt. Die weitere Durchrechnung ist einfach.

12. Die partielle Differentialgleichung (15) der Transversalschwingungen setzen wir abkürzungsweise in die Form

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial s^4}. \tag{31}$$

Für ein befestigtes Ende des Stabes müssen die beiden Grenzgleichungen

$$u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial s} = 0 \tag{31a}$$

erfüllt sein, die zweite deshalb, weil die Schwerpunktslinie in der Nachbarschaft des befestigten Punktes offenbar ihre Richtung nicht ändert. Für ein freies Ende bestehen die Grenzgleichungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial s^3} = 0. \tag{32}$$

Die biegende Kraft, welche auf einen Querschnitt wirkt, ist nämlich b_1, also nach (14a) auch $\frac{\partial^3 u}{\partial s^3}$ proportional; für die freie Endfläche mufs sie

*) Ausführliches hierüber findet man bei Fr. Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Elastizität u. s. w., herausgegeben von Meyer, Leipzig 1885.

verschwinden. Da ferner auf das letzte Element des Stabes keine biegenden Kräfte einwirken, so wird hier keine Krümmung vorhanden sein, woraus nach dem bekannten Ausdrucke für die Krümmung

$$\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}}{\left[1+\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

die erste Relation (32) folgt.

Bei der Integration von (31) gehen wir von der hypothetischen Annahme aus, dafs sich die Bewegung eines jeden Punktes s durch eine unendliche Zahl harmonischer Bewegungen wird darstellen lassen. Eine derselben sei

$$u = u_0 \sin 2\pi n t, \tag{33}$$

wo n eine noch weiter zu bestimmende Konstante ist, während u_0 eine zu ermittelnde Funktion von s allein darstellt. Setzt man den Wert von u aus (33) in (31) ein, so erhält man für u_0 die Differentialgleichung

$$a^2 \frac{d^4 u_0}{d s^4} = (2\pi n)^2 u_0. \tag{34}$$

Nimmt man

$$u_0 = e^{\nu s}, \tag{35}$$

so befriedigt dieser Ausdruck (34), wenn

$$a^2 \nu^4 = (2\pi n)^2$$

ist, also ν einen der vier Werte

$$\sqrt{\frac{2\pi n}{a}}, \quad -\sqrt{\frac{2\pi n}{a}}, \quad i\sqrt{\frac{2\pi n}{a}}, \quad -i\sqrt{\frac{2\pi n}{a}}$$

besitzt. Die Summe der mit beliebigen Konstanten multiplizierten vier u_0-Werte bildet das allgemeine Integral von (34). Setzen wir abkürzungsweise (l sei wieder die Länge des Stabes)

$$p = l\sqrt{\frac{2\pi n}{a}}, \tag{36}$$

so können wir, um sogleich das Imaginäre zu beseitigen, dieses Integral in die Form

$$u_0 = A\cos\frac{ps}{l} + B\sin\frac{ps}{l} + C\frac{e^{\frac{ps}{l}} + e^{-\frac{ps}{l}}}{2} + D\frac{e^{\frac{ps}{l}} - e^{-\frac{ps}{l}}}{2} \tag{37}$$

setzen.

13. Ist das Ende $s = 0$ befestigt, das Ende $s = l$ frei, so mufs nach (31a) und (32)

$$\left\{\begin{aligned} &A + C = 0, \quad B + D = 0, \\ -&A\cos p - B\sin p + C\frac{e^p + e^{-p}}{2} + D\frac{e^p - e^{-p}}{2} = 0, \\ &A\sin p - B\cos p + C\frac{e^p - e^{-p}}{2} + D\frac{e^p + e^{-p}}{2} = 0 \end{aligned}\right. \tag{38}$$

sein. Durch Benutzung der beiden ersten dieser Gleichungen wird aus den beiden letzten

$$(39)\quad \begin{cases} A\left(\cos p + \dfrac{e^p + e^{-p}}{2}\right) + B\left(\sin p + \dfrac{e^p - e^{-p}}{2}\right) = 0, \\ A\left(\sin p - \dfrac{e^p - e^{-p}}{2}\right) - B\left(\cos p + \dfrac{e^p + e^{-p}}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $\frac{A}{B}$ folgt aus (39) eine Relation für p, welche nach beträchtlichen Vereinfachungen die Form

$$(40)\quad \cos p\,(e^p + e^{-p}) + 2 = 0$$

annimmt. Aus (37) wird

$$(41)\quad u_0 = A\left(\cos\frac{ps}{2} - \frac{e^{\frac{ps}{l}} + e^{-\frac{ps}{l}}}{2}\right) + B\left(\sin\frac{ps}{l} - \frac{e^{\frac{ps}{l}} - e^{-\frac{ps}{l}}}{2}\right),$$

worin A willkürlich ist, während sich B nach Bestimmung von p aus einer der Gleichungen (39) berechnen läfst.

Die transscendente Gleichung (40) liefert unendlich viele Werte für p, von denen wir nur die positiven zu untersuchen brauchen. Da für unendlich werdende p die Gröfse e^p rasch ins Unendliche wächst, so werden die gröfseren Lösungswerte von (40) sehr nahe mit denen von

$$\cos p = 0,$$

d. h. mit

$$(42)\quad \frac{2k+1}{2}\pi$$

zusammenfallen. Selbst der kleinste Wert von p, 1,875, entfernt sich von $\frac{\pi}{2} = 1{,}571$ nicht allzuweit. Überhaupt sind die genauen p-Werte gröfser als die angenäherten (42).

Aus (36) folgt dann weiter

$$(43)\quad n = \frac{ap^2}{2\pi l^2},$$

also bei Benutzung der angenäherten Werte (42)

$$(44)\quad n = \frac{a(2k+1)^2\pi}{8l^2}.$$

n ist der reziproke Wert der Dauer der betreffenden Schwingung, die sog. Schwingungszahl.

Die Obertöne stehen hier in keinem einfachen Verhältnisse zu dem Grundtone und zueinander; bei ungeeigneter Erregung der Schwingungen wird also der Klang ein unharmonischer werden können. Da $(2k+1)$ in (44) im Quadrat auftritt, so sind weniger Obertöne vorhanden als bei den Longitudinalschwingungen.

Bei sonst gleichen Verhältnissen ist die Höhe des Tones dem Quadrate der Länge des Stabes umgekehrt proportional. Da $a^2 = EL$ ist,

so ist weiter die Tonhöhe der Quadratwurzel aus dem Elastizitätsmodulus direkt proportional.

Sind beide Enden des Stabes frei oder beide befestigt, so ergeben sich ähnliche Grenzbedingungen.

Die Lage der Knotenpunkte bestimmt man, indem man den jedesmaligen Ausdruck für u_0, z. B. (41), der Null gleich setzt und die zugehörigen s-Werte bestimmt. Genaueres über diesen Gegenstand siehe bei Kirchhoff, Mechanik, p. 441 ff.

§ 75.

Wellenbewegungen in einem unendlichen elastisch festen Körper.

1. Von der weittragendsten Bedeutung für die theoretische Physik ist die Untersuchung der Bewegungen, die in einem elastisch festen Körper, welcher allseitig unbegrenzt gedacht wird, ohne Einwirkung äufserer Kräfte vor sich gehen. Aus den Gleichungen § 68, (24) wird in diesem Falle

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon\frac{d^2u}{dt^2} &= K\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(1+2\vartheta)\frac{\partial\sigma}{\partial x}\right],\\ \varepsilon\frac{d^2v}{dt^2} &= K\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+(1+2\vartheta)\frac{\partial\sigma}{\partial y}\right],\\ \varepsilon\frac{d^2w}{dt^2} &= K\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(1+2\vartheta)\frac{\partial\sigma}{\partial z}\right],\end{aligned}\right.$$

worin für die räumliche Dilatation σ

$$(2)\qquad \sigma=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

zu setzen ist.

Die Integration dieser Gleichungen gelingt bei gewissen beschränkenden Voraussetzungen.

2. Wir untersuchen den Fall eingehend, in welchem die Bewegung für alle Punkte solcher Ebenen, welche auf derselben Geraden — sagen wir der z-Achse — senkrecht stehen, die gleiche ist. Man spricht dann, was die Integration der Gleichungen rechtfertigen wird, von einer Wellenbewegung in der Richtung der z-Achse.

Bei der gemachten Annahme ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\frac{\partial\sigma}{\partial y}=0,\quad \sigma=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \frac{\partial\sigma}{\partial z}=\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Die Gleichungen (1) nehmen die Gestalt an*)

*) Man kann links die partiellen Differentialquotienten anwenden. u, v, w ergeben sich später als Funktionen von z und t, und z ist als Koordinate eines Systempunktes in der Gleichgewichtslage von t unabhängig.

$$(3)\qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \varepsilon \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = K \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \varepsilon \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 2K(1+\vartheta) \dfrac{\partial^2 w}{\partial z^2}. \end{cases}$$

Die allgemeinen Integrale dieser Differentialgleichungen sind nach § 73, (6), wenn wir

$$(4)\qquad a = +\sqrt{\frac{K}{\varepsilon}}, \quad b = +\sqrt{\frac{2K(1+\vartheta)}{\varepsilon}}$$

setzen,

$$(5)\qquad \begin{cases} u = \varphi_1(z+at) + \varphi_2(z-at), \\ v = \psi_1(z+at) + \psi_2(z-at), \end{cases}$$

$$(6)\qquad w = \chi_1(z+bt) + \chi_2(z-bt).$$

3. Die erhaltenen drei Gleichungen stellen Wellenbewegungen dar, welche sich in der Richtung der z-Achse, nach der positiven und nach der negativen Seite hin, fortpflanzen. Die Gleichungen (5) geben zusammen den Bewegungsbestandteil, welcher in einer zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Ebene liegt — die Transversalschwingung. Die Gleichung (6) liefert eine in die Fortpflanzungsrichtung fallende Bewegung: die Longitudinalschwingung. Die Transversalschwingungen und die Longitudinalschwingungen besitzen verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit, und zwar ist die Longitudinalwelle die geschwindere.

Nimmt man (vgl. § 68, (14)), der Poisson'schen Hypothese entsprechend, $\mu = \frac{1}{4}$, also $\vartheta = \frac{1}{2}$, so wird

$$(7)\qquad b = a\sqrt{3}.$$

Für $E = 20\,470$, spez. Gewicht 7,74, was für eine bestimmte Eisensorte gemessen wurde*), berechnet man bei $\mu = \frac{1}{4}$

$$a = 3221, \quad b = 5579;$$

das letztere stimmt mit der beobachteten Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in diesem Stoffe mit hinreichender Annäherung überein.

4. Die moderne Optik legt ihren Rechnungen die Annahme zu Grunde, dafs das Licht durch rasche Oszillationen erzeugt wird, welche sich in einem elastischen Medium wellenförmig fortpflanzen. Da auch gasförmige Stoffe das Licht fortpflanzen, so liegt es nahe, die Wellenbewegung in solchen zu untersuchen. Wie wir noch später sehen werden, sind in einem elastisch flüssigen Medium wohl longitudinale, aber nicht transversale Wellen möglich. Die Erscheinung der Polarisation

*) Der Wert von E mufs gemäfs § 68, 3, Anm. in das System Meter, Sekunde, Kilogrammmasse umgerechnet werden; ε ist die Masse eines Kubikmeters der Substanz, also in Kilogrammen 7,74 . 1000.

verlangt aber zu ihrer Erklärung transversale Wellen. So gelangte man zu der Hypothese, daſs sich die Lichtwellen in einem imponderabeln Stoffe, dem „Äther" fortpflanzen, welcher sich wie ein elastisch fester Körper verhält*). Wenn wir dieser Hypothese folgen, so wollen wir damit nur ausdrücken, daſs sich auch flüssige Stoffe sehr kleinen und sehr raschen Schwingungen, wie die Lichtschwingungen sind, gegenüber ähnlich verhalten wie elastisch feste Körper, also auch Transversalwellen möglich machen. Daſs die Annahme nur eine angenäherte ist, geht daraus hervor, daſs die (nicht modifizierte) Undulationstheorie die Dispersion des Lichtes nicht erklärt.

Aber noch eine andere Schwierigkeit tritt ein. In einem elastisch festen Körper muſs eine irreguläre Bewegung, wie sie in der Lichtquelle vorhanden ist, notwendigerweise auch eine longitudinale Welle erzeugen, welche sich rascher fortpflanzt als die transversale. Die Gleichungen (5) und (6) repräsentieren nämlich die untersuchte Bewegung mit ziemlicher Annäherung in einiger Entfernung von der Lichtquelle. Diese longitudinale Welle macht sich aber in keiner Weise bemerklich, so daſs ihr Vorhandensein höchst unwahrscheinlich ist. Durch diesen Umstand wurde C. Neumann zur Annahme des inkompressibeln Äthers geführt. In § 68, 4 erwähnten wir bereits, daſs ein elastisch fester Körper, wenigstens rein theoretisch betrachtet, auch als unausdehnbar gedacht werden kann. Es muſs alsdann

$$\mu = \tfrac{1}{2}, \quad \vartheta = \infty \tag{8}$$

sein. Dann wird

$$b = \infty, \tag{9}$$

was auf die Unmöglichkeit einer longitudinalen Wellenbewegung hinweist. Dies Resultat bestätigt sich bei der genaueren Durchführung der Theorie des inkompressibeln Äthers, die übrigens aus der allgemeinen Elastizitätstheorie nicht unmittelbar als Spezialfall folgt.

Wir gehen auf diesen Gegenstand wie auch auf die Wellenbewegung in krystallinischen Medien nicht weiter ein, verweisen vielmehr in Bezug auf diese Dinge auf: Neumann, Vorlesungen über die Theorie der Elastizität der festen Körper und des Lichtäthers, herausg. von O. E. Meyer.

*) Der Elastizitätsmodulus des Äthers ist übrigens von demjenigen aller bekannten festen Körper vollständig verschieden.

Siebenter Abschnitt.

Hydromechanik.

§ 76.

Die Fundamentalgleichungen der Bewegung und Ruhe einer idealen Flüssigkeit.

1. Da die innere Natur der Flüssigkeiten noch ebensowenig erforscht ist wie diejenige der festen Körper, so kann unsere Entwicklung der Fundamentalgleichungen der Hydromechanik*) sich nur auf experimentell begründete Thatsachen stützen. Aus diesen Erfahrungsthatsachen ergeben sich gewisse Gesetze, welche allerdings nur näherungsweise Geltung besitzen.

In den meisten Fällen begnügt man sich mit der einfachen Annahme, dafs sich die Teile der Flüssigkeit ohne jeden Widerstand frei gegeneinander verschieben lassen. Diese Hypothese, welche viele Erscheinungen genügend erklärt, liefert die gewöhnlichen Fundamentalgleichungen der Hydromechanik; die Flüssigkeit wird bei dieser Voraussetzung als eine ideale bezeichnet. Späterhin werden wir die der Wirklichkeit näher kommende Annahme untersuchen, dafs die Verschiebung der Teile einen Widerstand findet, der als „innere Reibung“ bezeichnet wird**); auch die Erscheinungen der Kapillarität, die namentlich bei kleineren Flüssigkeitsquanten deutlich hervortreten, sollen speziell behandelt werden.

---

*) Unter Hydromechanik im weiteren Sinne verstehen wir die Mechanik beliebiger Flüssigkeiten, unelastischer und elastischer. Im engeren Sinne genommen kommt der Hydromechanik nur die Behandlung der unelastischen Flüssigkeiten zu, während die elastischen Flüssigkeiten in der Aeromechanik zur Untersuchung gelangen. Die nächstfolgenden Entwicklungen beziehen sich auf beliebige Flüssigkeiten.

Die ersten Fundamentalresultate der Hydrostatik wurden schon von Archimedes abgeleitet. An der Entwicklung der Grundlagen der modernen Hydromechanik beteiligten sich u. A. Torricelli, Newton, d'Alembert, Dan., Jak. und Joh. Bernoulli, Clairaut, Euler, Lagrange. Ausführliche historische Angaben findet man bei Lagrange, Mécanique analytique.

**) Diese Reibung kommt nur bei bewegten, nicht bei ruhenden Flüssigkeiten in Betracht; die Untersuchungen der Hydrostatik bedürfen daher nach dieser Richtung hin keiner Ergänzung.

2. Die Hypothese der freien Verschiebbarkeit der Flüssigkeitsteile kann mathematisch dahin formuliert werden, dafs die seitlichen Druckkomponenten in der Flüssigkeit verschwinden. Es ist also

$$Y_z = Z_x = X_y = 0 \tag{1}$$

zu setzen. Nach § 67, 10 ist dann das erste Druckellipsoid für jedes Flüssigkeitsteilchen eine Kugel; die Drucke sind in jeder Richtung die gleichen und stehen auf ihrer Druckebene senkrecht. Es ist daher

$$X_x = Y_y = Z_z = p \tag{2}$$

zu setzen, worin p den im betreffenden Punkte statthabenden Druck, der von der Richtung unabhängig ist, bezeichnet.

Die Bewegungsgleichungen § 67, (4) nehmen hiernach die einfache Gestalt an*)

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2u}{dt^2} &= \varepsilon X - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \varepsilon \frac{d^2v}{dt^2} &= \varepsilon Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \varepsilon \frac{d^2w}{dt^2} &= \varepsilon Z - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Eine direkte Herleitung dieser Differentialgleichungen ist sehr einfach; man braucht nur zu bedenken, dafs die Drucke auf zwei gegenüberliegende Flächen eines unendlich kleinen rechtwinkligen Parallelepipedons, dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel laufen, um $\frac{\partial p}{\partial x} dx$ u. s. w. differieren.

Die Gröfsen u, v, w stellen die Komponenten der Verschiebungen des Punktes dar, welcher sich ursprünglich in x, y, z befand; man kann $\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^2v}{dt^2}$, $\frac{d^2w}{dt^2}$ ohne weiteres durch $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ ersetzen, wenn man die Verschiebungen nicht auf einen fest gedachten Punkt x, y, z, sondern auf den Koordinatenanfangspunkt bezieht. Mithin haben wir die Differentialgleichungen der Hydromechanik in der Form

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} &= \varepsilon X - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \varepsilon \frac{d^2y}{dt^2} &= \varepsilon Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \varepsilon \frac{d^2z}{dt^2} &= \varepsilon Z - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

3. Die Gleichungen (4) enthalten aufser x, y, z und t noch die Variabeln ε und p; um x, y, z als Funktionen von t allein zu bestimmen, sind aufser den nötigen Grenzbedingungen noch zwei Gleichungen erfor-

*) Es sei nochmals daran erinnert, dafs X, Y, Z hier die Komponenten der Kraft sind, welche auf die Masseneinheit ausgeübt wird.

derlich. Zunächst mufs ausgedrückt werden, dafs ein Element seine Masse nicht ändert, dafs also $\varepsilon d\tau$, worin $d\tau$ ein Raumelement der Flüssigkeit bezeichnet, im Verlaufe der Bewegung konstant bleibt, dafs also

$$\frac{d(\varepsilon d\tau)}{dt} = 0 \tag{5}$$

ist. Hieraus wird (wir setzen der Deutlichkeit halber $d\tau$ im zweiten Gliede in eine Klammer)

$$\frac{d\varepsilon}{dt}\, d\tau + \varepsilon \frac{d(d\tau)}{dt} = 0$$

oder

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{d\tau}\frac{d(d\tau)}{dt} = 0. \tag{5a}$$

Die Zunahme $d(d\tau)$ des Raumelementes, dividiert durch die Gröfse des Raumelementes selbst, ist aber die räumliche Dilatation, welche das Flüssigkeitsteilchen während des Zeitelementes dt erfährt. In § 66, (11) wurde die räumliche Dilatation durch

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{6}$$

dargestellt, worin u, v, w die Verschiebungen des ursprünglich in x, y, z befindlichen Elementes bezeichnen. Um diese Relation hier verwerten zu können, wollen wir nunmehr die Bedeutung von u, v, w ändern. Wir bezeichnen mit u, v, w jetzt wie in der Folge die Komponenten der Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens, so dafs

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}$$

ist. Die Komponenten der Verschiebung während der Zeit dt sind dann

$$udt, \quad vdt, \quad wdt,$$

so dafs die Dilatation während dt durch

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt$$

dargestellt wird.

Hiernach geht (6) in

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0 \tag{7}$$

über, die sog. Kontinuitätsgleichung.

Diese Gleichung, welche hier für die wirkliche Bewegung aufgestellt wurde, mufs überhaupt für jede mögliche Bewegung gelten. Wenden wir die für mögliche (virtuelle) Änderungen übliche Bezeichnungsweise an und ersetzen udt, vdt, wdt durch δx, δy, δz, so wird aus (7)

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\partial\delta x}{\partial x} + \frac{\partial\delta y}{\partial y} + \frac{\partial\delta z}{\partial z} = 0. \tag{8}$$

4. Die Dichtigkeit ε in einem Punkte x, y, z ist erfahrungsmäfsig bei jeder Flüssigkeit eine Funktion des in x, y, z herrschenden Drucks; wir haben daher eine weitere Bedingung

$$\varepsilon = f(p) \tag{9}$$

zuzufügen, worin die Funktion f durch das Experiment zu bestimmen ist.

Über diese Funktion werden wir in der Folge zwei verschiedene Annahmen machen. Bei den sog. inkompressibeln Flüssigkeiten*) ändert sich ε mit wechselndem Druck so wenig, dafs man es ohne beträchtlichen Fehler als konstant voraussetzen kann. In diesem Falle mufs die räumliche Dilatation verschwinden, also

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{10}$$

sein. Dies ist die Gleichung der Inkompressibilität. Die Mechanik der inkompressibeln Flüssigkeiten bezeichnen wir, wie schon erwähnt, als Hydromechanik im engeren Sinne und werden sie zuerst behandeln.

In der Mechanik der gasförmigen (elastischen) Flüssigkeiten, der Aeromechanik, wird das Mariotte'sche Gesetz zur Grundlage genommen. Dasselbe sagt aus, dafs die Dichtigkeit dem Drucke proportional sei**); es ist also

$$p = c\varepsilon \tag{11}$$

zu setzen, worin c eine Konstante bezeichnet.

5. Für die Oberfläche der Flüssigkeit müssen in jedem Falle besondere Oberflächenbedingungen aufgestellt werden.

Die Gültigkeit der Gleichungen (4) ist einer wesentlichen Beschränkung unterworfen, welche man durch eine Prüfung ihrer Vorbedingungen erkennt. Wir mufsten bei der Herleitung der Gleichungen (4) die Deformationstheorie benutzen, welche von der Voraussetzung ausgeht, dafs ein unendlich kleiner Teil eines Körpers immer unendlich klein bleibt; die Bewegung mufs stetig sein. Andernfalls würde die Theorie des Deformationsellipsoids hinfällig. Punkte, welche in einem Momente auf einer kontinuierlichen Fläche liegen, liegen in jedem Zeitpunkte auf einer solchen; das Gegenteil wäre mit der Stetigkeit nicht vereinbar. Punkte, welche in einem Zeitmomente sich an der Oberfläche des Körpers oder eines Teiles desselben befinden, müssen immer Bestandteile dieser Oberfläche bleiben***). Aus der Grundvoraussetzung über die ideale Flüssigkeit folgt diese Stetigkeit keineswegs.

---

*) Wir setzen immer stillschweigend voraus, dafs die inkompressible Flüssigkeit homogen sei.

**) Bei Voraussetzung gleicher Temperatur. Auf den Einflufs der Wärme nehmen wir in der eigentlichen Mechanik keine Rücksicht.

***) Die Punkte dieser Oberfläche müssen immer in einer zusammenhängenden, von andern Teilchen nicht durchsetzten Fläche bleiben. Ohne ein solches Durchsetzen dieser Fläche kann aber ein zuerst im Inneren gelegenes Teilchen nicht an die Oberfläche gelangen.

Infolge der freien Verschiebbarkeit der Teile iṡt eine diskontinuierliche Bewegung sehr wohl möglich. So kann sich z. B. im sonst ruhenden Meere ein Wasserstrom bewegen, welcher sich gegen das ruhende Wasser scharf abgrenzt. Es mufs ausdrücklich betont werden, dafs für solche diskontinuierliche Bewegungen die Gleichungen (4) (natürlich nur da, wo die Diskontinuität statthat) ihre Gültigkeit verlieren.

Die Gleichungen der Hydrodynamik gelten nur im Falle einer stetigen Bewegung.

Flächen, in denen Stetigkeitsunterbrechungen statthaben, sind stets als Grenzflächen zu behandeln; die Flüssigkeit ist in mehrere besonders zu behandelnde Teile zu zerlegen.

Die Fundamentalgleichungen schliefsen an sich einen negativen Druck nicht aus; allein die freie Verschiebbarkeit der Teilchen bringt es mit sich, dafs ein Teilchen auf das andere keinen Zug auszuüben vermag. Im Falle eines durch die Rechnung gelieferten negativen Druckes entsprechen die Gleichungen der Wirklichkeit nicht mehr. Wo ein negativer Druck in der Rechnung erscheint, findet eine Auflösung der (idealen) Flüssigkeit in einzelne Teilchen statt*), die bei ihrer Kleinheit anderen Gesetzen folgen. Jeder hoch herabstürzende Wasserfall bildet ein Beispiel dieser Erscheinung.

§ 77.

Die Fundamentalrelationen der Hydrostatik**).

1. Im Falle des Gleichgewichtes wird aus § 76, (4)

$$(1)\qquad \begin{cases} X = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ Y = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ Z = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Die rechten Seiten dieser Gleichungen sind die Differentialquotienten derselben Funktion nach x, y, z, auch wenn ε nicht konstant ist. Da nämlich ε nach dem Vorhergehenden eine Funktion von p ist, so kann man

$$(2)\qquad \frac{1}{\varepsilon} = f_1(p) = F'(p)$$

setzen, wo also

$$(3)\qquad F(p) = \int f_1(p)\,dp$$

ist. Alsdann haben wir

*) Infolge der Molekularkräfte, welche in der Flüssigkeit thätig sind, tritt dieses Zerreifsen der Flüssigkeit thatsächlich erst dann ein, wenn der Zug eine gewisse Gröfse überschreitet.

**) Wir beschäftigen uns in der Hydrostatik nur mit ruhenden, nicht mit bewegten (wenn auch ohne Einwirkung von Kräften) Flüssigkeiten.

$$\frac{\partial F(p)}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{u. s. w.}$$

Die Kraftkomponenten sind also die partiellen Differentialquotienten derselben Funktion nach x, y, z. Dies giebt den fundamentalen Satz:

Soll sich eine Flüssigkeit im Gleichgewicht befinden, so müssen die Kräfte, welche auf sie einwirken, eine Kräftefunktion besitzen.

Da p und ε im Falle des Gleichgewichtes eindeutige Funktionen des Ortes sind, so mufs die Kräftefunktion dieselbe Eigenschaft besitzen.

2. Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so haben wir für die Kräftefunktion nach (1) die Beziehung

$$U = \frac{p}{\varepsilon} + \text{Const.} \tag{4}$$

Hat also U auf einer Fläche einen konstanten Wert, so ist das Gleiche mit p der Fall:

Bei einer im Gleichgewicht befindlichen inkompressibeln Flüssigkeit sind die Niveauflächen zugleich Flächen gleichen Drucks.

Besitzt die Flüssigkeit eine freie Oberfläche, an der kein Druck vorhanden, also $p = 0$ ist, so ist auch U an ihr konstant.

Eine freie Oberfläche einer ruhenden Flüssigkeit ist immer eine Niveaufläche in Bezug auf die wirkenden Kräfte.

3. In den Punkten der Grenze zweier inkompressibeln Flüssigkeiten von verschiedener Dichtigkeit mufs selbstverständlich der beiderseitige Druck im Falle des Gleichgewichtes der gleiche sein. Wirken auf beide Flüssigkeiten dieselben Kräfte, ist also U für beide das gleiche, so folgt aus (4), wenn wir die beiden Dichtigkeiten mit ε und ε_1 bezeichnen,

$$\frac{p}{\varepsilon} + C = \frac{p}{\varepsilon_1} + C_1, \tag{5}$$

woraus sich p als konstant berechnet.

Auf der Grenzfläche zweier inkompressibeln Flüssigkeiten hat daher der Druck und also auch die Kräftefunktion einen konstanten Wert; die Grenzfläche ist eine Niveaufläche.

Ist die Flüssigkeit teilweise durch feste Wände begrenzt, so werden die Niveauflächenverhältnisse nicht geändert.

Die folgenden Anwendungen der allgemeinen Theorie beziehen sich nur auf inkompressible Flüssigkeiten.

§ 78.

Statik einer schweren Flüssigkeit; das Archimedische Prinzip.

1. Denken wir uns die positive x-Achse senkrecht aufwärts gerichtet, so ist die Kräftefunktion der als konstant angenommenen Schwerkraft

$$U = -gx + C. \tag{1}$$

Für die Niveauflächen einer schweren, durch ein Gefäfs zusammengehaltenen Flüssigkeit ist daher $x =$ Const., d. h. die Niveauflächen sind horizontale Ebenen. Insbesondere ist die freie Oberfläche horizontal.

Verlegen wir den Anfangspunkt der Koordinaten in die freie Oberfläche, so ist für $x = 0$ auch $p = 0$; durch Vergleich von (1) mit § 77, (4) folgt

$$p = -\varepsilon g x. \tag{2}$$

Beachten wir, dafs sich der Druck p auf die Flächeneinheit bezieht, so können wir schliefsen, dafs der in einem Punkte der Flüssigkeit vorhandene Druck*), bezogen auf ein horizontales Flächenstück, gleich ist der Masse des Flüssigkeitsprismas, welches über diesem Flächenstücke liegt, multipliziert mit g.

Da der Druck nach allen Richtungen der gleiche ist, so folgen hieraus die bekannten elementaren Relationen über den Druck einer Flüssigkeit auf den Boden und die Seitenwände des einschliefsenden Gefäfses.

Auch wenn infolge der Gestalt des Gefäfses die freie Oberfläche aus mehreren getrennten Teilen besteht, so müssen dieselben doch Teile derselben Ebene sein; denn andernfalls könnte nicht in gleicher Tiefe überall derselbe Druck herrschen (kommunizierende Röhren).

2. Wird auf einen Teil der Grenzfläche einer vollständig eingeschlossenen Flüssigkeit ein Druck P ausgeübt, etwa durch einen eingeführten Kolben, so wird aus (2)

$$p = -\varepsilon g x + P. \tag{3}$$

Sieht man von dem Drucke infolge des Gewichtes der Flüssigkeit ab, so ist in allen Teilen derselben der Druck der gleiche. Auf die Wandung werden daher Normaldrucke ausgeübt, welche den affizierten Flächen proportional sind (hydraulische Presse u. s. w.).

3. Wir untersuchen jetzt den Gleichgewichtszustand einer homogenen Flüssigkeit, in welche ein schwerer, fester Körper ganz oder zum Teil eingetaucht ist. Der Normaldruck, den ein Oberflächenelement des Körpers durch die Flüssigkeit erfährt, ist der Fläche desselben und seiner Tiefe unter der Oberfläche proportional. Ist p dieser Normaldruck für irgend eine Stelle, bezogen auf die Flächeneinheit, $d\sigma$ das Oberflächenelement, s eine bestimmte Richtung, n die Normale, so ist die in $d\sigma$ auf den Körper einwirkende Druckkomponente nach der Richtung s

$$p\, d\sigma \cos(n, s).$$

Denkt man sich über $d\sigma$ ein Prisma errichtet, dessen Seitenkanten der Richtung s parallel laufen, so ist dessen zur Längsrichtung normaler Querschnitt

*) Es mufs von vornherein betont werden, dafs die Gesetze über Druckverhältnisse, welche wir hier ableiten, nur für ruhende Flüssigkeiten gelten (hydrostatischer Druck). Bei bewegten Flüssigkeiten gestalten sich diese Verhältnisse ganz anders (hydrodynamischer Druck).

$$d\sigma \cos(n, s).$$

Zerlegt man daher den untergetauchten Teil des Körpers in unendlich dünne prismatische Stäbe, deren Seitenkanten s parallel laufen, so ist die in der Richtung s wirkende Druckkomponente auf eine Endfläche eines solchen Stabes gleich der Komponente nach derselben Richtung, welche auf einen normalen Querschnitt des Stabes an der gleichen Stelle einwirken würde. Will man daher die Druckwirkung der Flüssigkeit auf den eingetauchten Körper nach irgend einer Richtung s untersuchen, so denke man ihn sich in unendlich dünne prismatische Stäbe zerlegt, deren Längsrichtung s ist; dann grenze man diese Stäbe an ihren Enden normal ab und untersuche die Druckwirkung, welche auf diese neuen Grundflächen ausgeübt wird*).

Läuft die Richtung s horizontal, so ist die Wirkung auf beide Enden eines Stabes entgegengesetzt gleich; denn beide haben gleiche Fläche und befinden sich in gleicher Tiefe unter der Flüssigkeitsoberfläche; beide Wirkungen heben sich daher auf.

Die horizontalen Druckkomponenten, welche auf einen in eine Flüssigkeit eingetauchten Körper einwirken, zerstören also gegenseitig ihre Kraftwirkung.

Identifiziert man dagegen s mit der Vertikalen, so ist die Wirkung auf die beiden Endflächen des Stabes entgegengesetzt und verschieden; auf die obere Fläche wirkt ein kleinerer Druck als auf die untere ein. Bezeichnen $d\sigma'$ den Inhalt der normalen Grundfläche des Stabes und x_0 und x_1 die Tiefe der oberen und unteren Fläche unter der Oberfläche der Flüssigkeit, so ist die Druckdifferenz, bezogen auf die Grundflächen, nach (2)

$$\varepsilon g(x_1 - x_0)\, d\sigma' = \varepsilon g l\, d\sigma', \tag{4}$$

wenn l die Länge des Stabes ist.

Die beiden Drucke, welche auf die Enden des vertikalen Stabes einwirken, geben daher eine Resultante, welche der Kraft umgekehrt gleich ist, mit welcher der Stab nach unten gezogen würde, wenn er mit der Flüssigkeit ausgefüllt wäre.

Taucht der Körper nur teilweise in die Flüssigkeit ein, so ist nur der eingetauchte Teil in Betracht zu ziehen, d. h. der untere Teil, der durch die erweiterte Oberflächenebene der Flüssigkeit abgeschnitten würde. Der Druck auf die obere Grenzfläche ist dann natürlich Null.

Hiernach läfst sich leicht der Gesamteinflufs beurteilen, welchen der Körper durch den Druck der Flüssigkeit erfährt. Derselbe ist der gleiche, wie wenn der untergetauchte Teil des Körpers mit einer

*) Durchsetzt ein solcher Stab den Körper mehrmals, so ist eine gerade Anzahl von Endflächen vorhanden, die sich paarweise gegenüberstehen. Die ganze Untersuchung ist zu derjenigen von § 43, 1 durchaus analog und soll hier nur in elementarster Weise geführt werden. In der Folge sprechen wir nur von zwei Endflächen.

homogenen Masse von der Dichtigkeit ε der umgebenden Flüssigkeit ausgefüllt wäre und auf diese Masse die Schwerkraft, aber in umgekehrter Richtung, einwirkte.

Nach § 55, 1 kann man sich die angreifenden Kräfte im Schwerpunkte der hypothetischen Masse vereinigt denken.

Der eingetauchte Körper wird andererseits durch seine eigene Schwere nach unten gezogen; die Kräfte, welche hiernach auf ihn einwirken, kann man sich in seinem Schwerpunkte vereinigt denken. Soll Gleichgewicht stattfinden, so mufs dieser abwärts gerichtete Zug dem durch den Flüssigkeitsdruck verursachten „Auftrieb" das Gleichgewicht halten. Zu diesem Zwecke mufs zunächst der Schwerpunkt des Körpers mit dem Schwerpunkte des homogen gedachten untergetauchten Teiles — dem Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeitsmasse, wie man zu sagen pflegt — in derselben vertikalen Geraden liegen. Ferner mufs die verdrängte Flüssigkeitsmasse der Masse des ganzen Körpers gleich sein*).

Befindet sich der Körper ganz unterhalb der Flüssigkeitsoberfläche, so ist ohne äufsere Unterstüzung nur dann Gleichgewicht möglich, wenn seine Masse der verdrängten Flüssigkeitsmasse gleich ist. Ist seine Masse gröfser, so kann er etwa durch einen über einer Rolle aufgehängten Faden mit Gegengewicht im Gleichgewicht gehalten werden. Das Gegengewicht mufs dann der Körpermasse, vermindert um die verdrängte Flüssigkeitsmasse, gleich sein. Man sagt: Ein Körper verliert in der Flüssigkeit soviel an Gewicht, wie das Gewicht der verdrängten Flüssigkeit beträgt.

Diese Sätze bilden das bekannte hydrostatische Grundgesetz des Archimedes.

4. Eine schwere Flüssigkeit, welche sich in einem oben offenen Gefäfse befindet, sei derart in Rotation um die vertikale x-Achse versetzt, dafs alle Teile der Flüssigkeit dieselbe Winkelgeschwindigkeit ω angenommen haben**). Um die Gestalt der freien Oberfläche zu bestimmen, betrachten wir die Flüssigkeit als ruhend, geben aber jedem Teilchen die entsprechende Zentrifugalbeschleunigung. Setzen wir $r = \sqrt{y^2 + z^2}$, so ist letztere für einen Punkt, welcher die Distanz r von der Drehungsachse hat,

$$\frac{r^2\omega^2}{r} = r\omega^2 = \omega^2\sqrt{y^2 + z^2},$$

so dafs die Beschleunigung z. B. in der Richtung der y-Achse

*) Wann stabiles, labiles oder indifferentes Gleichgewicht stattfindet, wollen wir hier nicht untersuchen. Die häufig vorgetragenen Untersuchungen, bei welchen das sog. Metazentrum eine Rolle spielt, entbehren der nötigen Strenge. — Liegt der Schwerpunkt des festen Körpers unterhalb des Schwerpunktes der verdrängten Flüssigkeitsmasse, so ist das Gleichgewicht stabil, im entgegengesetzten Falle aber nicht notwendigerweise labil.

**) Es mag unerörtert bleiben, ob die Flüssigkeit wirklich ohne Einflufs der Reibung eine derartige Bewegung annehmen kann.

$$\omega^2 \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \frac{y}{r} = \omega^2 y$$

ist. Schwere und Zentrifugalkraft geben zusammen die Kräftefunktion (wobei, wie in der Folge öfters, die Kraftwirkung auf die Einheit der Masse bezogen ist)

$$U = -gx + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2). \tag{5}$$

Um die Gleichung der freien Oberfläche zu erhalten, müssen wir U einer Konstanten gleich setzen. Die Gleichung

$$gx + C = \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) \tag{6}$$

ist diejenige eines Rotationsparaboloids, welches die x-Achse zur Achse hat. Wird der Nullpunkt des Koordinatensystems in den Scheitel des Paraboloids verlegt, so geht (6) in

$$x = \frac{\omega^2}{2g}(y^2 + z^2) \tag{7}$$

über.

§ 79.

Gleichgewicht bei Statthaben des Newton'schen Attraktionsgesetzes und einer Rotation; die Erdgestalt.

1. Die allgemeine Lösung hydrostatischer Probleme gelingt nur in den einfachsten Fällen. Bei den folgenden Aufgaben beschränken wir uns mitunter auf die Angabe einer irgendwie ermittelten Lösung und deren Verifizierung, während die Frage, ob nicht noch andere Lösungen existieren, vollkommen offen bleibt.

Dies gilt schon für die relativ einfache Aufgabe: Die Gleichgewichtsgestalt einer homogenen, inkompressibeln Flüssigkeit zu bestimmen, deren Teile sich gegenseitig nach dem Newton'schen Attraktionsgesetze anziehen. Unmittelbare Wahrscheinlichkeit und einfache Versuche weisen darauf hin, dafs diese Gleichgewichtsgestalt eine Kugel sei. Aus den Untersuchungen von § 37 ist uns in der That bekannt, dafs die Oberfläche einer homogenen Kugel, deren Teile in der angegebenen Weise attrahierend wirken, für ihr Potential eine Niveaufläche ist, und dies ist eben Bedingung des Gleichgewichtes. Aber hiermit ist nicht erwiesen, dafs nicht auch noch andere Gleichgewichtsformen existieren.

2. Wenn die Erde, wie mit gröfster Wahrscheinlichkeit anzunehmen, ursprünglich sich in flüssigem Zustande befand, so mufste sie sich, wenn ihre Teile nur dem Newton'schen Gesetze gehorchten, zu einer Kugel gestalten. Auch wenn die flüssige Masse nicht homogen war, so war nach § 37 die Kugel doch noch eine Gleichgewichtsgestalt, wenn sich nur konzentrische Schichten homogener Flüssigkeitsteile bildeten. Dafs die Erde, auch von lokalen Unregelmäfsigkeiten abgesehen, keine genaue Kugel-

gestalt annahm, mufs ihrer Rotation*) zugeschrieben werden, welche eine Abplattung an den Polen verursachte. Die mechanische Berechnung der Gröfse dieser Abplattung und der Gestalt der Erdoberfläche mufs eine der wichtigsten Aufgaben der Geophysik bilden; leider sind aber die wirklichen Verhältnisse infolge der mangelnden Homogenität so kompliziert, dafs nur durch vereinfachende Annahmen Resultate zu erzielen sind, die sich dann aber von der Wirklichkeit beträchtlich entfernen.

Wir führen die Rechnung unter zwei Hypothesen durch. Zuerst wollen wir annehmen, dafs die Erde aus einem festen, in konzentrischen Schichten homogenen, kugelförmigen Kern und einer umgebenden Flüssigkeitshülle — hier etwa der Wassermasse — bestehe; dabei soll nur die Attraktion des festen Kerns, nicht diejenige der Flüssigkeitsteilchen aufeinander in Betracht gezogen werden. Letztere Annahme wird, bei der thatsächlichen geringen Ausdehnung der umgebenden Wassermasse, keine allzu bedeutenden Fehler veranlassen; dagegen widerspricht die Annahme eines kugelförmigen festen Kerns den Thatsachen. Die zweite Annahme soll die sein, dafs die Erde durchgehends eine homogene Flüssigkeit sei, was sich natürlich wiederum von der Wirklichkeit bedeutend entfernt.

In beiden Fällen identifizieren wir den Nullpunkt des Koordinatensystems mit dem Schwerpunkte der Erde und die x-Achse mit der Rotationsachse; ϱ möge der Abstand eines laufenden Punktes vom Nullpunkte, φ die geozentrische Breite**) desselben sein.

3. Bei der ersten Annahme dürfen wir uns die attrahierende Masse im Mittelpunkte vereinigt denken. Bezeichnet K die Beschleunigung durch die Attraktion des Erdkerns in der Einheit der Entfernung, so ist die Kräftefunktion der Attraktion und der Zentrifugalkraft für Punkte aufserhalb des Erdkerns

$$(1) \qquad U = \frac{K}{r} + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2).$$

Die Gleichung der Wasseroberfläche lautet daher

$$(2) \qquad \frac{K}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) = C,$$

worin die Konstante C z. B. durch die bekannte Länge der Rotationsachse bestimmt wird. Ausmultipliziert ist Gleichung (2) vom sechsten Grade; sie stellt eine Rotationsfläche dar.

Ist die Winkelgeschwindigkeit ω so klein, dafs die Abweichung der Flüssigkeitsoberfläche von einer Kugelfläche nur gering wird, so können wir

$$r = R + \delta$$

setzen, worin R den Polarhalbmesser bezeichnet, und die Potenzen von δ,

*) Auch hier wollen wir der Frage nicht näher treten, ob eine gleichmäfsige Rotation bei einer idealen Flüssigkeit möglich ist.

**) Die geozentrische Breite eines Ortes der Erde ist der Winkel, welchen die Richtung von ϱ mit der Äquatorebene bildet.

aufser der ersten, vernachlässigen. Da noch $y^2 + z^2 = r^2 \cos^2 \varphi$ ist, so wird aus (2)

$$\frac{K}{R} - \frac{K\delta}{R^2} + \frac{\omega^2}{2}(R^2 + 2R\delta)\cos^2\varphi = C. \tag{3}$$

Da für $\varphi = 90^0$ $\delta = 0$ wird, so mufs

$$\frac{K}{R} = C \tag{4}$$

sein; bei weiterer Vernachlässigung des Gliedes mit $\omega^2\delta$ wird daher aus (3)

$$\delta = \frac{R^4\omega^2}{2K}\cos^2\varphi. \tag{5}$$

Setzen wir noch für die Beschleunigung der Schwere am Pole

$$\frac{K}{R^2} = g_0, \tag{6}$$

so erhalten wir schliefslich

$$r = R\left(1 + \frac{R\omega^2}{2g_0}\cos^2\varphi\right). \tag{7}$$

Die Abplattung, d. h. die Differenz des gröfsten und kleinsten Durchmessers, dividiert durch ersteren, ist (nahezu)

$$\frac{R\omega^2}{2g_0};$$

man berechnet für sie $\frac{1}{582}$, was nur etwa die Hälfte des wirklichen Betrages der Abplattung der Erde darstellt.

4. Konnten wir hier die Rechnung vollständig durchführen, so müssen wir uns in dem zweiten, merkwürdigeren Falle mit einigen Speziallösungen begnügen. Wenn sich die Teile einer homogenen Flüssigkeit nach dem Newton'schen Attraktionsgesetze anziehen, so ist ein abgeplattetes Rotationsellipsoid eine mögliche Gleichgewichtsgestalt.

Dies wurde bereits in § 38 nachgewiesen. Wir zeigten nämlich an dieser Stelle, dafs bei geeigneter Wahl von ω die Attraktionskräfte beim homogenen Ellipsoid überall normal zur Oberfläche gerichtet sind, dafs diese also eine Niveaufläche ist. Indessen wollen wir hier den Gegenstand aus einem allgemeineren Gesichtspunkte behandeln.

Das Potential eines Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{8}$$

für einen Punkt der Oberfläche ist, abgesehen von einer additiven Konstanten, durch den Ausdruck*) (§ 38, (47))

*) f bezeichnet die Beschleunigung, welche einem materiellen Punkte in der Einheit der Entfernung durch eine Masse erteilt wird, welche der die Raumeinheit füllenden Flüssigkeitsmasse gleich ist.

$$(9) \qquad U = -fabc\pi(Lx^2 + My^2 + Nz^2)$$

dargestellt, worin

$$(10) \qquad L = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)D}, \quad M = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)D}, \quad N = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)D},$$

$$(11) \qquad D = \sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}$$

zu setzen ist. Die Gleichung einer Niveaufläche ist daher bei Berücksichtigung der Rotation

$$(12) \qquad U + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) = C.$$

Soll diese Fläche mit der Oberfläche (8) zusammenfallen, so mufs

$$(13) \quad (-fabc\pi L):\left(-fabc\pi M + \frac{\omega^2}{2}\right):\left(-fabc\pi N + \frac{\omega^2}{2}\right) = \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}$$

sein. Hieraus folgt

$$(14) \qquad \begin{cases} \omega^2 = \dfrac{2fac\pi(b^2M - a^2L)}{b}, \\ \omega^2 = \dfrac{2fab\pi(c^2N - a^2L)}{c}, \end{cases}$$

also

$$(15) \qquad a^2(c^2 - b^2)L = b^2c^2(M - N).$$

Wenn also die Halbachsen a, b, c die Gleichung (15), die in ihnen transcendent ist, befriedigen, so liefern die beiden Gleichungen (14) dasselbe ω^2. Ist dieses positiv, so läfst sich immer ein ω so bestimmen, dafs die Oberfläche des Ellipsoids eine Niveaufläche wird.

Die Gleichung (15) ist befriedigt, wenn $b = c$, also auch $M = N$ genommen wird, d. h. wenn das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid ist, dessen isolierte Hauptachse die Drehungsachse ist. Ist diese Achse die kleinere, so folgt aus den Formeln von § 38, dafs für ω^2 ein positiver Wert erhalten wird. Das abgeplattete Rotationsellipsoid ist also bei geeigneter Rotationsgeschwindigkeit immer eine Gleichgewichtsgestalt einer homogenen Flüssigkeitsmasse.

Die Abplattung der Erde erhält hiernach den zu grofsen Wert $\frac{1}{232}$.

5. Die Gleichung (15) liefert noch andere Lösungen. Jacobi hat nachgewiesen, dafs auch ein dreiachsiges Ellipsoid eine mögliche Gleichgewichtsgestalt ist, wenn ω unter einer gewissen Grenze liegt.

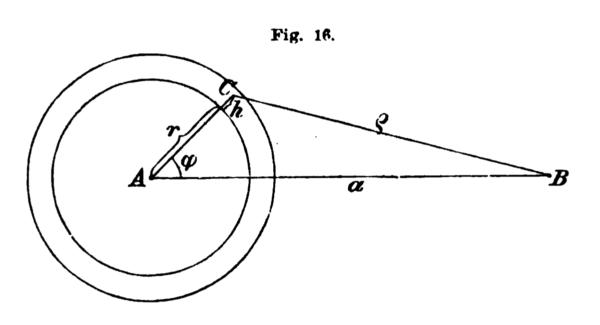
§ 80.

Die statische Theorie der Ebbe und Flut.

1. Die Ebbe und Flut (die Gezeiten) werden durch die Anziehung verursacht, welche in erster Linie der Mond, in zweiter Linie die Sonne

auf die irdischen Wassermassen ausübt. Um das Problem möglichst zu vereinfachen, sehen wir von der Abplattung der Erde und ihren lokalen Unregelmäfsigkeiten ab. Wir nehmen einen festen, kugelförmigen Erdkern (Fig. 16) an, dessen Attraktion überall nach seinem Mittelpunkte A gerichtet ist, und denken ihn uns ringsum von einer Schicht Wasser umkleidet, dessen Attraktion wegen der Dünne der Schicht nicht mit in Rechnung gezogen zu werden braucht. Aufserhalb nehmen wir einen Himmelskörper B an, den wir als materiellen Punkt behandeln. Da wir hier nicht die Verschiebung, welche die Erde durch diesen Himmelskörper im Weltraume erfährt, sondern nur die relative Lagenänderung der einzelnen Teile der Erde untersuchen wollen, so haben wir nur die Differenzen der Attraktionen auf verschiedene Punkte der Erde in Betracht zu ziehen. Auf der dem Himmelskörper zugewandten Seite der Erde ist die Attraktion desselben stärker, auf der abgewandten schwächer als im Mittelpunkte der Erde. Betrachtet man daher den Erdmittelpunkt als unbeweglich, so mufs auf der ersten Seite das Wasser sich dem Himmelskörper nähern, auf der zweiten aber sich (relativ) von ihm entfernen. Daher werden zwei diametral gegenüberliegende Wasseranschwellungen stattfinden, deren Zentren in den beiden Punkten liegen, für welche der Himmelskörper im Zenith und im Nadir steht (Zenith- und Nadirflut). In dem dazwischenliegenden ringförmigen Teile der Erdoberfläche herrscht Ebbe.

Fig. 16.



Es wird nicht schwer sein, diese übersichtliche Betrachtung durch eine exakte Rechnung zu ergänzen.

2. Der Erdmittelpunkt A sei der Nullpunkt des Koordinatensystems; die positive x-Achse falle in die Richtung AB. Der Radius des festen Erdkerns sei r, während $r+h$ den Abstand AC eines Punktes C der Wassermasse vom Erdmittelpunkte A darstelle; h ist im Vergleich zu r als eine sehr kleine Gröfse anzusehen, so dafs die Potenzen von $\frac{h}{r}$ zu vernachlässigen sind. Die Strecke $AB = a$ soll als so grofs gegen r angenommen werden, dafs von den Potenzen von $\frac{r}{a}$ nur die niedrigste vorkommende in Betracht zu ziehen ist; $\frac{h}{a}$ mag ganz vernachlässigt werden. Ferner sei $BC = \varrho$, $\sphericalangle BAC = \varphi$, während M und m die Masse der Erde und des Himmelskörpers bezeichnen.

Das Potential der Erdattraktion in Bezug auf C ist (ein gemeinsamer konstanter Faktor wird sogleich überall weggelassen)

$$\frac{M}{r+h} = \frac{M}{r}\left(1 - \frac{h}{r}\right).$$

Das Potential der störenden Kraft, welche der Himmelskörper ausübt, ist die Differenz des Potentials

$$\frac{m}{\varrho}$$

seiner direkten Anziehung auf C und des Potentials seiner Anziehung auf Punkt A. Letzteres ist aber

$$\frac{m x}{a^2},$$

wie man durch Differentiation dieses Ausdrucks nach den Koordinatenachsen verifiziert. Somit ist das Gesamtpotential

$$U = \frac{M}{r}\left(1 - \frac{h}{r}\right) + m\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{x}{a^2}\right). \tag{1}$$

Nun ist aber, wenn im zweiten Gliede der rechten Seite die Gröfse h sofort vernachlässigt wird,

$$\varrho = \sqrt{a^2 - 2ar\cos\varphi + r^2} = a\sqrt{1 - \frac{2r}{a}\cos\varphi + \frac{r^2}{a^2}}, \tag{2}$$

also wenn man bis zur zweiten Potenz von $\frac{r}{a}$ entwickelt,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{r}{a}\cos\varphi - \frac{r^2}{2a^2} + \frac{3r^2}{2a^2}\cos^2\varphi\right). \tag{3}$$

Ferner ist

$$x = r\cos\varphi \tag{4}$$

zu setzen, so dafs

$$m\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{x}{a^2}\right) = m\left[\frac{1}{a} + \frac{r^2}{2a^3}(3\cos^2\varphi - 1)\right] \tag{5}$$

wird.

Die Gleichung der Wasseroberfläche wird somit, wenn wir sogleich die konstanten Glieder mit der rechten Seite vereinigen,

$$-\frac{Mh}{r^2} + \frac{3mr^2}{2a^3}\cos^2\varphi = C. \tag{6}$$

Nehmen wir an, dafs für $\varphi = 90^0$ $h = 0$ wird, so ist $C = 0$ zu setzen, so dafs wir

$$h = \frac{3}{2}\frac{m}{M}\left(\frac{r}{a}\right)^3 r\cos^2\varphi \tag{7}$$

erhalten.

Die Gröfse h giebt die Höhe des Wasserstandes über dem Niveau der tiefsten Ebbe an; sie erreicht, wie zu erwarten, ihr Maximum für die beiden Punkte der Erdoberfläche, welche auf der Geraden AB liegt. Zenith- und Nadirflut sind — d. h. bei den gemachten Vernachlässigungen — gleich stark.

3. Identifiziert man den Himmelskörper in B mit dem Monde, so ist ungefähr

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{80}, \quad \frac{r}{a} = \frac{1}{60}$$

zu setzen, so dafs etwa

$$h = \frac{r \cos^2 \varphi}{11\,520\,000}$$

ist. Als Flutmaximum (über dem Niveau der tiefsten Ebbe) folgt hieraus ungefähr

(8) 0,55 Meter.

Für die Sonne ist

$$\frac{m}{M} = 322\,800,$$

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{23\,312},$$

also das Flutmaximum etwa

(9) 0,24 Meter,

somit fast halb so grofs wie für den Mond. Durch Addition von (8) und (9) findet man die höchste Fluthöhe für die Zeit des Neu- und Vollmondes, wo Sonne und Mond ihre Wirkung vereinigen (Springflut), durch Subtraktion für die Zeit der Quadraturen (Nippflut).

4. Wir erledigen noch die Frage: Wie verhält sich (bei Einwirkung eines Himmelskörpers) die Durchschnittshöhe h_0 des Wassers über dem Stande der tiefsten Ebbe zur Maximalfluthöhe h_1? Bei Vernachlässigung von Gröfsen höherer Kleinheit können wir die Wasseroberfläche, welche durch die Störung deformiert ist, als ein Rotationsellipsoid betrachten. So erhalten wir für den Rauminhalt des Wassers, welches sich oberhalb des Minimalstandes befindet,

$$J = \frac{4(r + h_1) r^2 \pi}{3} - \frac{4 r^3 \pi}{3} = \frac{4 r^2 h_1 \pi}{3}.$$

Diese Gröfse ist dem Inhalte einer Kugelschale mit den Radien r und $r + h_0$, also dem Werte

$$\frac{4(r + h_0)^3 \pi}{3} - \frac{4 r^3 \pi}{3} = 4 r^2 h_0 \pi$$

gleichzusetzen. Hieraus folgt

$$h_1 = 3 h_0, \tag{10}$$

so dafs die Durchschnittshöhe ein Drittel der Maximalhöhe beträgt.

Der Winkel φ, der den Kreisen entspricht, auf welchen das Wasser die Durchschnittshöhe besitzt, ist durch

$$\cos^2 \varphi = \tfrac{1}{3} \tag{11}$$

bestimmt, woraus

$$\varphi = 54^0\, 44' \tag{12}$$

folgt.

5. Bei der gegebenen statischen Fluttheorie wurden Sonne und Mond für den Augenblick als feststehend betrachtet; ihre Entwicklung rührt von Newton her. Die dynamische Fluttheorie, welche von Laplace begründet wurde, hat die Bewegung des Wassers infolge des Weiterrückens von Sonne und Mond zu untersuchen. Es ergeben sich hierdurch Resultate, welche von denen der statischen Theorie sehr beträchtlich abweichen.

In Wirklichkeit werden die theoretisch gefundenen Resultate noch sehr bedeutend infolge der unregelmäſsigen Unterbrechungen des Meeres durch das Festland modifiziert. Ein weiteres Verfolgen dieser Erscheinungen gehört nicht hierher.

§ 81.

Umgestaltung der Differentialgleichungen der Hydrodynamik.

1. Nachdem wir die wichtigsten Gleichgewichtsprobleme bei inkompressibeln Flüssigkeiten erledigt haben, wenden wir uns der Hydrodynamik zu. Unsere erste Aufgabe wird es sein müssen, die aufgestellten Fundamentalgleichungen in andere Formen zu setzen. Die folgenden Untersuchungen gelten für beliebige Flüssigkeiten. Nach § 76, (4) und (7) sind die Fundamentalgleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} \varepsilon\,\dfrac{d^2x}{dt^2} = \varepsilon X - \dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \varepsilon\,\dfrac{d^2y}{dt^2} = \varepsilon Y - \dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \varepsilon\,\dfrac{d^2z}{dt^2} = \varepsilon Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

und

$$(2)\qquad \frac{d\varepsilon}{dt} + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0,$$

wozu noch eine Beziehung zwischen Druck und Dichtigkeit hinzutritt.

Verwendet man u, v, w (wie auch in (2) geschehen) in der in § 76, 3 eingeführten Bedeutung, so daſs also

$$(3)\qquad \frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

ist, so gehen die Gleichungen (1) über in

$$(4)\qquad \begin{cases} \varepsilon\,\dfrac{du}{dt} = \varepsilon X - \dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \varepsilon\,\dfrac{dv}{dt} = \varepsilon Y - \dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \varepsilon\,\dfrac{dw}{dt} = \varepsilon Z - \dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases}$$

Dies sind die Euler'schen hydrodynamischen Differentialgleichungen.

2. Indem wir u, v, w als Funktionen von x, y, z, t betrachten, haben wir

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{\partial u}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{dz}{dt} \\ \qquad = \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} \end{cases}$$

u. s. w.

Wir wollen ferner annehmen, daſs die wirkenden Kräfte*) eine Kräftefunktion U besitzen, und auſserdem

$$(6)\qquad P = \int \frac{dp}{\varepsilon}$$

setzen; ε ist hierin als Funktion von p gedacht. Bei einer inkompressibeln Flüssigkeit ist — auf eine additive Konstante kommt es nicht an —

$$P = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Aus (6) folgt

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int \frac{dp}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{u. s. w.}$$

Hiernach können die Relationen (4) durch

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial (U-P)}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} + u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} = \dfrac{\partial (U-P)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{\partial (U-P)}{\partial z} \end{cases}$$

ersetzt werden.

Für die Kontinuitätsgleichung (2) können wir entsprechend setzen

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

oder

$$(7\,\text{a})\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + w\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + \varepsilon\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0$$

oder

$$(8)\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial (\varepsilon u)}{\partial x} + \frac{\partial (\varepsilon v)}{\partial y} + \frac{\partial (\varepsilon w)}{\partial z} = 0.$$

3. Von den zahlreichen Transformationen, denen die hydrodynamischen Gleichungen zugänglich sind, besitzt die sog. Lagrange'sche**) Form eine besondere Wichtigkeit.

*) Immer in dem früher (vgl. p. 214, Anm.) erörterten Sinne genommen.

**) Eigentlich wurde auch diese Form der Gleichungen zuerst von Euler aufgestellt; doch wurde sie erst durch Lagrange bekannt gemacht.

Es mögen a, b, c irgend drei Gröfsen sein, welche einen bestimmten Punkt der Flüssigkeit eindeutig festsetzen; sie können beispielsweise die Koordinaten desselben zur Zeit $t = t_0$ sein. Die folgenden Gleichungen beziehen sich dann auf die Bewegung dieses Punktes, dessen Koordinaten zur Zeit t durch x, y, z dargestellt sein mögen. Die Differentialquotienten $\frac{\partial x}{\partial a}$ u. s. w. beziehen sich auf die Änderungen, welche x, y, z erleiden, wenn man den durch a, b, c fixierten Punkt durch einen unendlich benachbarten ersetzt.

Multiplizieren wir die Gleichungen (1) mit $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$, dann mit $\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial b}$, zuletzt mit $\frac{\partial x}{\partial c}, \frac{\partial y}{\partial c}, \frac{\partial z}{\partial c}$ und addieren jedesmal, so erhalten wir

$$(9)\quad \begin{cases} \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial a} = 0, \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial b} = 0, \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial c} = 0. \end{cases}$$

Besitzen wieder die Kräfte eine Kräftefunktion U und führen wir P durch (6) ein, so gehen die Gleichungen (9) in die einfacheren

$$(10)\quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial(U-P)}{\partial a}, \\ \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial(U-P)}{\partial b}, \\ \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial c} = \frac{\partial(U-P)}{\partial c} \end{cases}$$

über. Dies sind die Lagrange'schen Gleichungen. Man kann darin auch u, v, w einführen und schreiben

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial(U-P)}{\partial a}, \\ \frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial(U-P)}{\partial b}, \\ \frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial z}{\partial c} = \frac{\partial(U-P)}{\partial c}. \end{cases}$$

4. Es handelt sich noch darum, die Kontinuitätsgleichung (2) in eine den Lagrange'schen Gleichungen entsprechende Form zu setzen. Wir gelangen hierzu am einfachsten, indem wir von der ursprünglichsten Form derselben, § 76, (5), ausgehen. Wir dürfen in dieser Gleichung das Raumelement $d\tau$ durch irgend eine ihm proportionale Gröfse ersetzen. Als solche können wir die Gröfse des Raumelementes zur Zeit t, dividiert durch seine Gröfse zu einer festen Zeit $t = t_0$ benutzen; die letztere Gröfse ist eben als Konstante zu betrachten.

Wir wollen die Koordinaten des Punktes x, y, z zur Zeit t_0 mit x_0, y_0, z_0 bezeichnen; $x_0 + \Delta x_0$, $y_0 + \Delta y_0$, $z_0 + \Delta z_0$ und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ mögen die Koordinaten eines unendlich benachbarten Punktes zur Zeit t_0 und t sein. Nun wollen wir den Inhalt des Tetraeders, dessen Eckpunkte zur Zeit t_0 die Koordinaten

$$x_0, y_0, z_0; \quad x_0 + \Delta x_0, y_0, z_0; \quad x_0, y_0 + \Delta y_0, z_0; \quad x_0, y_0, z_0 + \Delta z_0$$

besitzen, d. h. die Gröfse

$$\tfrac{1}{6} \Delta x_0 \Delta y_0 \Delta z_0,$$

mit dem Inhalte des entsprechenden Tetraeders zur Zeit t vergleichen. Es ist allgemein

$$(12) \qquad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{\partial x}{\partial x_0} \Delta x_0 + \dfrac{\partial x}{\partial y_0} \Delta y_0 + \dfrac{\partial x}{\partial z_0} \Delta z_0, \\ \Delta y = \dfrac{\partial y}{\partial x_0} \Delta x_0 + \dfrac{\partial y}{\partial y_0} \Delta y_0 + \dfrac{\partial y}{\partial z_0} \Delta z_0, \\ \Delta z = \dfrac{\partial z}{\partial x_0} \Delta x_0 + \dfrac{\partial z}{\partial y_0} \Delta y_0 + \dfrac{\partial z}{\partial z_0} \Delta z_0, \end{cases}$$

und wir erhalten als Koordinaten der Ecken des transformierten Tetraeders, wenn wir uns der Einfachheit halber den Koordinatenanfangspunkt für den Augenblick nach x, y, z gelegt denken, die Gröfsen*)

$$\begin{array}{ccc} & 0,\ 0,\ 0; & \\ \dfrac{\partial x}{\partial x_0} \Delta x_0, & \dfrac{\partial y}{\partial x_0} \Delta x_0, & \dfrac{\partial z}{\partial x_0} \Delta x_0; \\ \dfrac{\partial x}{\partial y_0} \Delta y_0, & \dfrac{\partial y}{\partial y_0} \Delta y_0, & \dfrac{\partial z}{\partial y_0} \Delta y_0; \\ \dfrac{\partial x}{\partial z_0} \Delta z_0, & \dfrac{\partial y}{\partial z_0} \Delta z_0, & \dfrac{\partial z}{\partial z_0} \Delta z_0. \end{array}$$

Der Inhalt dieses Tetraeders wird aber nach einer bekannten Formel durch

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial x_0} \Delta x_0 & \dfrac{\partial y}{\partial x_0} \Delta x_0 & \dfrac{\partial z}{\partial x_0} \Delta x_0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial y_0} \Delta y_0 & \dfrac{\partial y}{\partial y_0} \Delta y_0 & \dfrac{\partial z}{\partial y_0} \Delta y_0 \\ \dfrac{\partial x}{\partial z_0} \Delta z_0 & \dfrac{\partial y}{\partial z_0} \Delta z_0 & \dfrac{\partial z}{\partial z_0} \Delta z_0 \end{vmatrix}$$

oder

$$(13) \qquad \tfrac{1}{6} D_1 \Delta x_0 \Delta y_0 \Delta z_0$$

dargestellt, wenn

*) Wir brauchen nur in (12) immer je zwei der Gröfsen Δx_0, Δy_0, Δz_0 gleich Null zu setzen, wie dies der betreffenden Ecke des nicht transformierten Tetraeders entspricht.

$$(14) \qquad D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix}$$

gesetzt wird.

D_1 ist also der Quotient der entsprechenden Volumina zur Zeit t und t_0.

Statt der Anfangskoordinaten können wir aber auch leicht die ganz willkürlichen Bestimmungsstücke a, b, c einführen. Es ist nämlich

$$(15) \qquad \frac{\partial x}{\partial x_0} = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x_0} + \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x_0}$$

u. s. w.

Setzen wir die Ausdrücke (15) in (14) ein, so erhalten wir eine Determinante, die nach dem Multiplikationsgesetze dieser Gebilde in das Produkt von zweien zerlegt werden kann. Wir finden

$$(16) \qquad D_1 = D \begin{vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x_0} & \frac{\partial b}{\partial x_0} & \frac{\partial c}{\partial x_0} \\ \frac{\partial a}{\partial y_0} & \frac{\partial b}{\partial y_0} & \frac{\partial c}{\partial y_0} \\ \frac{\partial a}{\partial z_0} & \frac{\partial b}{\partial z_0} & \frac{\partial c}{\partial z_0} \end{vmatrix},$$

worin

$$(17) \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

gesetzt ist.

Da in (16) der zweite Faktor auf der rechten Seite eine Konstante ist, so dürfen wir in § 76, (5) D an Stelle von $d\tau$ einführen und erhalten die Kontinuitätsgleichung in der Form

$$(18) \qquad \frac{d(\varepsilon D)}{dt} = 0,$$

worin für D der Wert (16) zu nehmen ist. Bei einer inkompressibeln Flüssigkeit tritt an Stelle von (18) die einfachere Relation

$$(19) \qquad D = \text{Const.}$$

5. Die Euler'schen hydrodynamischen Gleichungen enthalten nur die Koordinaten x, y, z, welche sich auf festgelegte Koordinatenachsen beziehen; sie bestimmen also die Bewegung, welche zur Zeit t in einem vorgelegten Punkte des Raumes vor sich geht. In den Lagrange'schen Gleichungen treten aufser x, y, z die Gröfsen a, b, c auf, welche einen

bestimmten materiellen Punkt der Flüssigkeit fixieren. Die letzteren Gleichungen bestimmen daher die Bewegung eines vorgelegten Elementes der Flüssigkeit im Raume.

Über weitere Transformationen der hydrodynamischen Fundamentalgleichungen findet man reichhaltige Angaben bei Auerbach, Die theoretische Hydrodynamik, Braunschweig 1881, p. 14 ff.

§ 82.

Die beiden Grundformen der Flüssigkeitsbewegung.

1. Die Lagrange'schen Gleichungen, § 81, (11), liefern drei allgemeine Integrale, welche den Flächensätzen analog sind und welche die Grundlage der folgenden fundamentalen Untersuchung bilden sollen.

Wir differentiieren die zweite Gleichung nach c, die dritte nach b und subtrahieren die dritte von der zweiten; analog verfahren wir mit den beiden anderen Kombinationen von je zwei Gleichungen. Die Gröfse $U - P$ wird hierdurch eliminiert, und wenn wir beachten, dafs z. B. wegen $u = \frac{dx}{dt}$

$$(1)\quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial b}\right) - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial c}\right) \\ = \frac{\partial^2 u}{\partial c\, dt}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial^2 u}{\partial b\, dt}\frac{\partial x}{\partial c} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}\right) \end{cases}$$

ist, so können wir eine Integration ausführen. So finden wir, wenn A', B', C' Konstanten in Bezug auf die Zeit bezeichnen, die jedoch von a, b, c abhängig sind,

$$(2)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} = 2A', \\ \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} = 2B', \\ \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} = 2C'. \end{cases}$$

2. Aus den Gleichungen (2) lassen sich andere ableiten, welche einen klareren Einblick in die Natur der Sache gestatten. Wenn wir uns mit a, b, c, also auch mit x, y, z Änderungen vorgenommen denken, ohne die Zeit t zu ändern, so ist einerseits

$$(3)\quad \begin{cases} da = \frac{\partial a}{\partial x}dx + \frac{\partial a}{\partial y}dy + \frac{\partial a}{\partial z}dz, \\ db = \frac{\partial b}{\partial x}dx + \frac{\partial b}{\partial y}dy + \frac{\partial b}{\partial z}dz, \\ dc = \frac{\partial c}{\partial x}dx + \frac{\partial c}{\partial y}dy + \frac{\partial c}{\partial z}dz, \end{cases}$$

andrerseits

$$(4)\qquad \begin{cases} dx = \dfrac{\partial x}{\partial a}\,da + \dfrac{\partial x}{\partial b}\,db + \dfrac{\partial x}{\partial c}\,dc, \\ dy = \dfrac{\partial y}{\partial a}\,da + \dfrac{\partial y}{\partial b}\,db + \dfrac{\partial y}{\partial c}\,dc, \\ dz = \dfrac{\partial z}{\partial a}\,da + \dfrac{\partial z}{\partial b}\,db + \dfrac{\partial z}{\partial c}\,dc. \end{cases}$$

Wir setzen wieder

$$(5)\qquad D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial a} \\ \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial b} \\ \dfrac{\partial x}{\partial c} & \dfrac{\partial y}{\partial c} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial a} & \dfrac{\partial x}{\partial b} & \dfrac{\partial x}{\partial c} \\ \dfrac{\partial y}{\partial a} & \dfrac{\partial y}{\partial b} & \dfrac{\partial y}{\partial c} \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} & \dfrac{\partial z}{\partial b} & \dfrac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

und wollen die $\dfrac{\partial a}{\partial x}$ u. s. w. durch die $\dfrac{\partial x}{\partial a}$ u. s. w. ausdrücken, indem wir uns die Gleichungen (4) nach den Gröfsen da, db, dc aufgelöst denken und dann die erhaltenen Werte mit (3) vergleichen; die Koeffizienten von dx, dy, dz müssen wegen der Willkürlichkeit dieser Gröfsen einzeln übereinstimmen. So finden wir

$$(6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial x} = \dfrac{1}{D}\left(\dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial z}{\partial c} - \dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial z}{\partial b}\right), \\ \dfrac{\partial b}{\partial x} = \dfrac{1}{D}\left(\dfrac{\partial y}{\partial c}\dfrac{\partial z}{\partial a} - \dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial z}{\partial c}\right), \\ \dfrac{\partial c}{\partial x} = \dfrac{1}{D}\left(\dfrac{\partial y}{\partial a}\dfrac{\partial z}{\partial b} - \dfrac{\partial y}{\partial b}\dfrac{\partial z}{\partial a}\right), \\ \dfrac{\partial a}{\partial y} = \dfrac{1}{D}\left(\dfrac{\partial z}{\partial b}\dfrac{\partial x}{\partial c} - \dfrac{\partial z}{\partial c}\dfrac{\partial x}{\partial b}\right) \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.,} \\ \dfrac{\partial a}{\partial z} = \dfrac{1}{D}\left(\dfrac{\partial x}{\partial b}\dfrac{\partial y}{\partial c} - \dfrac{\partial x}{\partial c}\dfrac{\partial y}{\partial b}\right) \\ \qquad\qquad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Nun multiplizieren wir die Gleichungen (2) mit $\dfrac{\partial x}{\partial a}, \dfrac{\partial x}{\partial b}, \dfrac{\partial x}{\partial c}$ und addieren sie. Wir erhalten bei Berücksichtigung der Relationen (6)

$$D\left[\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial y}\right]$$
$$= 2\left[A'\frac{\partial x}{\partial a} + B'\frac{\partial x}{\partial b} + C'\frac{\partial x}{\partial b}\right]$$

oder, wenn noch

$$(7)\qquad A' = -A\varepsilon D,\quad B' = -B\varepsilon D,\quad C' = -C\varepsilon D$$

gesetzt wird und wir sogleich die beiden analogen Gleichungen hinzufügen,

$$
(8) \quad \begin{cases}
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \varepsilon\left(A\frac{\partial x}{\partial a} + B\frac{\partial x}{\partial b} + C\frac{\partial x}{\partial c}\right), \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \varepsilon\left(A\frac{\partial y}{\partial a} + B\frac{\partial y}{\partial b} + C\frac{\partial y}{\partial c}\right), \\
\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \varepsilon\left(A\frac{\partial z}{\partial a} + B\frac{\partial z}{\partial b} + C\frac{\partial z}{\partial c}\right).
\end{cases}
$$

Nach § 66, (7) sind die linksstehenden Gröſsen die Komponenten der Drehung für die x, y, z-Achse. A, B, C sind von der Zeit unabhängig, dagegen von a, b, c abhängig.

3. Die Gröſsen a, b, c, bis jetzt ganz willkürliche Bestimmungsstücke, mögen nunmehr die Koordinaten für die Zeit $t = t_0$ sein. Für diesen Zeitpunkt wird dann

$$
(9) \quad \begin{cases}
\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial y}{\partial b} = \frac{\partial z}{\partial c} = 1, \\
\frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial x}{\partial c} = \frac{\partial y}{\partial c} = \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial b} = 0.
\end{cases}
$$

Hiernach sind

$$\varepsilon A, \quad \varepsilon B, \quad \varepsilon C$$

die Werte, welche die drei Komponenten der Drehung zur Zeit $t = t_0$ annehmen.

Verschwinden A, B, C für ein bestimmtes Flüssigkeitselement a, b, c zur Zeit $t = t_0$, findet also zu dieser Zeit für diesen Punkt keine Drehung statt, so sind nach (8) die Komponenten der Drehung zu jeder Zeit gleich Null. Dies giebt den wichtigen Satz:

Ein Flüssigkeitselement, welches zu irgend einer Zeit nicht rotiert, rotiert niemals.

4. Rotiert kein Teilchen der Flüssigkeit zu einer bestimmten Zeit, so verschwinden die Komponenten der Drehung identisch; es ist also

$$
(10) \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.
$$

Diese Gleichungen sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daſs u, v, w die Differentialquotienten derselben Funktion φ nach x, y, z sind. Da diese Funktion, der eine willkürliche additive Konstante*) zugefügt werden kann, zu den Geschwindigkeitskomponenten in derselben Beziehung steht, wie das Potential (die Kräftefunktion) zu den Kraftkomponenten, so nennt man sie das Geschwindigkeitspotential der Bewegung. Es ist**)

*) φ ist im allgemeinen auch eine Funktion von t; in der Konstanten (in Bezug auf x, y, z) kann daher t vorkommen.

**) Die Dimension des Geschwindigkeitspotentials ist $l^2 t^{-1}$. — Da sich φ der Kräftefunktion ganz analog verhält, so findet man die Geschwindigkeitskomponente nach einer beliebigen Richtung n, indem man $\frac{d\varphi}{dn}$ bildet (vgl. § 6, 11). — Die Bezeichnung „Geschwindigkeitspotential" rührt von v. Helmholtz her; die Einführung dieser Funktion in die Hydrodynamik verdankt man Lagrange.

(11) $$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Die Flüssigkeitsbewegungen, welche durch Kräfte hervorgerufen werden, die eine Kräftefunktion besitzen, zerfallen also in zwei Klassen:

a) Bewegungen ohne Rotation, also mit Geschwindigkeitspotential;

b) Bewegungen mit Rotation.

Wir werden beide Bewegungsgattungen nacheinander behandeln.

Die bisherigen Untersuchungen gelten für kompressible wie inkompressible Flüssigkeiten.

5. Nach den Untersuchungen von §§ 65 und 66 läfst sich die Veränderung eines Körperteilchens bei einer stetigen Bewegung aus drei Bestandteilen zusammensetzen:

a) einer Translation (des Schwerpunktes),

b) einer Drehung,

c) einer Deformation nach drei aufeinander senkrechten Achsen.

Bei der Flüssigkeitsbewegung mit Geschwindigkeitspotential dürfen also nur die Änderungen a) und c) vorkommen.

§ 83.

Das Geschwindigkeitspotential.

1. Unter Voraussetzung eines Geschwindigkeitspotentials φ läfst sich ein weiteres allgemeines Integral der hydrodynamischen Differentialgleichungen angeben, welches dem Satze über die Erhaltung der lebendigen Kraft verwandt ist.

Multipliziert man die Gleichungen § 81, (7) nach Einführung von φ mit dx, dy, dz und addiert, so erhält man

(1) $$\begin{cases} \dfrac{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)}{\partial z}\,dz \\ + \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\,dx + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\,dy + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}\,dz\right) + \cdots \\ = \dfrac{\partial (U-P)}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial (U-P)}{\partial y}\,dy + \dfrac{\partial (U-P)}{\partial z}\,dz. \end{cases}$$

Durch Integration folgt

(2) $$U - P = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] + C,$$

worin die Gröfse C eine beliebige Funktion von t, dagegen von x, y, z unabhängig ist; man kann dieselbe der Null gleichsetzen, wenn man φ, was zulässig ist, eine geeignete Funktion von t additiv zufügt. Führt man

in P den Druck p selbst ein, so giebt (2) den Druck an, welcher in einem Punkte der bewegten Flüssigkeit herrscht; man nennt ihn den hydrodynamischen Druck. Derselbe ist von dem hydrostatischen Drucke bei ruhenden Flüssigkeiten wesentlich verschieden; durch zunehmende Geschwindigkeit wird er vermindert.

2. In dem Falle einer inkompressibeln Flüssigkeit, der uns weiterhin beschäftigen soll, nimmt die Gleichung der Inkompressibilität eine höchst wichtige Gestalt an. Aus § 76, (10) wird nämlich

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0. \tag{3}$$

Bei einer inkompressibeln Flüssigkeit genügt das Geschwindigkeitspotential derselben partiellen Differentialgleichung, wie das gewöhnliche Potential für Punkte aufserhalb der attrahierenden Masse.

Dieses Resultat setzt uns in den Stand, die Ergebnisse der gewöhnlichen Potentialtheorie in ausgiebiger Weise für die Theorie der Flüssigkeitsbewegungen zu verwerten. Freilich darf nicht aufser acht gelassen werden, dafs die gewöhnlichen Potentialausdrücke*) die Zeit nicht enthalten, was beim Geschwindigkeitspotential im allgemeinen der Fall sein kann.

3. Wir wollen sogleich auf einen anderen wichtigen Unterschied in dem analytischen Charakter des eigentlichen Potentials und des Geschwindigkeitspotentials aufmerksam machen. Das erstere ist eine durchaus eindeutige Funktion seiner Variabeln x, y, z. Dies geht daraus hervor, dafs seine Derivierten nach den Variabeln als die Kräftekomponenten selbstverständlich eindeutig sein müssen, während keine um eine Konstante**) — das einzige was noch denkbar ist — verschiedenen Werte des Potentials auftreten können, da dasselbe im Unendlichen den bestimmten Wert Null annehmen mufs. Anders ist es bei dem Geschwindigkeitspotential. Allerdings sind die Derivierten desselben nach x, y, z, d. h. die Geschwindigkeitskomponenten, eindeutige Funktionen von x, y, z, t, wie dies selbstverständlich ist; auch die Derivierte nach der Zeit ist eindeutig, wie dies aus (2), in dem U und P eindeutige Funktionen sind, ersichtlich ist. Da aber über die Integrationskonstante beim Geschwindigkeitspotential nicht in bestimmter Weise verfügt wird, so können sehr wohl Mehrdeutigkeiten des Potentials selbst vorkommen. Wir untersuchen dies etwas genauer.

---

*) D. h. die Potentialausdrücke im engeren Sinne; die allgemeine Kräftefunktion kann sehr wohl die Zeit enthalten. Bei der letzteren braucht aber die Relation (3) nicht zu gelten. — Dafs Potential und Geschwindigkeitspotential verschiedene Dimensionen besitzen, kommt nicht in Betracht, da die Zufügung eines geeigneten Faktors Ausgleich schafft.

**) Dieselbe kann als Funktion von t gedacht werden.

Wir gehen, indem wir t als unverändert beibehalten, von einem bestimmten Punkte x_0, y_0, z_0 des Raumes aus, innerhalb dessen die Flüssigkeitsbewegung stattfindet; φ möge hier unter anderen den Wert φ_0 besitzen. Lassen wir nun x, y, z von x_0, y_0, z_0 aus sich stetig weiterbewegen*), bis es nach Zurücklegung eines geschlossenen Weges innerhalb der Flüssigkeitsgrenzen wieder nach x_0, y_0, z_0 zurückkehrt, so wird sich φ auf dem ganzen Wege stetig ändern; in x_0, y_0, z_0 wird es entweder wieder zum Werte φ_0 zurückgekehrt sein, oder einen anderen Wert φ_1 erlangt haben. Lassen wir den gewählten Weg nach und nach in immer andere, an den vorhergehenden sich jedesmal stetig anschliefsende Wege übergehen, die aber alle nach x_0, y_0, z_0 zurückführen, so wird auch φ Werte annehmen, welche sich stetig an die früheren anschliefsen, also nach Rückkehr zu x_0, y_0, z_0 wieder zu φ_0, resp. φ_1 werden, da φ (mit ganz speziellen Ausnahmen) in einem Punkte keine zwei unendlich wenig verschiedenen Werte haben kann. Ist es nun möglich, den ursprünglichen Weg stetig so zu deformieren, dafs er sich schliefslich auf den Punkt x_0, y_0, z_0 zusammenzieht, so leuchtet es ein, dafs φ auf dem ursprünglichen Wege zu φ_0 zurückgelangen mufs. Ist dagegen eine solche Überführung nicht möglich, so kann φ auch den anderen Wert φ_1 angenommen haben.

Man nennt einen Raum, der durch jeden Querschnitt, d. h. durch jede Fläche, welche sich zwischen seinen Grenzen ausbreitet, in zwei getrennte Teile zerlegt wird, einfach zusammenhängend. Ein Raum, der durch einen Querschnitt in einen einfach zusammenhängenden verwandelt werden kann, heifst zweifach zusammenhängend u. s. w. Der Hohlraum einer Kugel oder einer Kugelschale ist einfach zusammenhängend; derjenige eines Ringes zweifach zusammenhängend, da man ihn durch einen Querschnitt, ohne ihn zu zerstückeln, in einen einfach zusammenhängenden Raum verwandeln kann u. s. w.

Der Augenschein zeigt — auf eine eingehendere Begründung können wir wohl an dieser Stelle verzichten —, dafs in einem einfach zusammenhängenden Raume jede geschlossene Linie in jede andere stetig übergeführt werden kann. Nicht so in einem mehrfach zusammenhängenden Raume. Eine Linie, welche sich durch den Hohlraum eines Ringes ganz hindurchzieht und in sich selbst zurückläuft, kann nicht zu beliebiger Kleinheit zusammengezogen werden.

Wir gelangen zu dem Schlufs: Bewegt sich die Flüssigkeit in einem einfach zusammenhängenden Raume, so ist das Flüssigkeitspotential durchaus eindeutig; dagegen kann es vieldeutig sein, wenn der Flüssigkeitsraum mehrfach zusammenhängend ist.

---

*) Diese Bewegung soll nicht etwa der wirklichen Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens entsprechen; es handelt sich nur um ein Durchlaufen in der Vorstellung.

4. Die Eigenschaften des gewöhnlichen Potentials lassen sich leicht auf das Geschwindigkeitspotential übertragen, nötigenfalls mit Berücksichtigung des einfachen Zusammenhanges des von der Flüssigkeit eingenommenen Raumes. Da das gewöhnliche Potential von der Zeit unabhängig ist, so mufs bei dieser Übertragung von Sätzen die Zeit im Geschwindigkeitspotential als konstant angenommen werden.

Beim Potential V hatten wir Niveauflächen, für welche $V = \text{Const.}$ war, und Kraftlinien mit den Differentialgleichungen (§ 35, (9))

$$\frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z} = dx : dy : dz. \tag{4}$$

Beim Geschwindigkeitspotential φ treten an Stelle der letzteren die Stromlinien mit den entsprechenden Differentialgleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} : \frac{\partial \varphi}{\partial y} : \frac{\partial \varphi}{\partial z} = dx : dy : dz. \tag{5}$$

Diese Stromlinien fallen überall mit der Geschwindigkeitsrichtung zusammen. Die Flächen $\varphi = \text{Const.}$ stehen überall auf der Bewegungsrichtung senkrecht.

Durch unendlich viele, unendlich benachbarte Stromlinien wird ein Stromfaden abgegrenzt. Da die Flüssigkeit in dem Stromfaden gewissermafsen wie in einer Röhre (von allerdings veränderlicher Gestalt) fliefst, so mufs in ein durch zwei Querschnitte abgegrenztes Teilchen desselben stets soviel Flüssigkeit eintreten wie austreten. Es leuchtet daher unmittelbar ein, dafs in einem Stromfaden, in dem irgendwo Bewegung vorhanden ist, nicht an einer Stelle Ruhe stattfinden kann. Daher kann ein Stromfaden nicht innerhalb der Flüssigkeit endigen; er läuft entweder in sich selbst zurück oder endigt beiderseits in der Begrenzung der Flüssigkeit. Das letztere scheint auf sachliche Schwierigkeiten zu stofsen; zur Hebung derselben diene die folgende Bemerkung, auf die überhaupt immerfort Rücksicht zu nehmen ist. Die Begrenzung der Flüssigkeit braucht keine feste Wand zu sein, in der ein Stromfaden natürlich nicht endigen kann. Sie kann vielmehr eine rein ideale sein, und nur dazu dienen, denjenigen Teil der Flüssigkeit abzusondern, für den ein Geschwindigkeitspotential existiert. So können z. B. innerhalb eines Gefäfses beliebige Rotationsbewegungen herrschen, während für einen Strahl, der durch eine Öffnung des Gefäfses austritt, ein Geschwindigkeitspotential vorhanden ist. In der idealen Scheidewand von innerer und äufserer Flüssigkeit werden dann Stromfäden endigen können.

5. Aus § 44, 6 folgt, dafs innerhalb eines einfach zusammenhängenden Raumes

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2$$

nirgends ein Maximum, wohl aber ein Minimum sein kann. Die gröfsten vorkommenden Geschwindigkeiten treten also in der Begrenzung auf.

φ selbst kann nach § 44, 5 in dem betrachteten Raume weder Maximum noch Minimum sein, d. h. es existiert in demselben kein Punkt, nach welchem von allen Richtungen her die Flüssigkeit zuströmt oder von welchem sie überallhin abströmt, was auch selbstverständlich ist.

6. Wenn eine Flüssigkeit ringsum von festen Wänden begrenzt ist, so mufs die Grenzbedingung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \tag{6}$$

auf der ganzen Umgrenzung befriedigt sein. Aus der Gleichung (§ 44, (5))

$$\int d\tau \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] = -\int ds \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \tag{7}$$

welche die lebendige Kraft der ganzen Flüssigkeit durch ein Oberflächenintegral ausdrückt, folgt dann, dafs die Geschwindigkeit im ganzen Raume Null ist, dafs also überhaupt keine Bewegung stattfindet. Somit haben wir das Resultat:

Innerhalb eines von festen Wänden umgrenzten einfach zusammenhängenden Raumes ist überhaupt keine Bewegung mit Geschwindigkeitspotential, d. h. ohne Rotation möglich.

Auch der blofse Augenschein zeigt schon, dafs in einem solchen Raume ohne Rotationen keine Bewegung denkbar ist. Für den mehrfach zusammenhängenden Raum sind diese Schlüsse nicht anwendbar.

7. Aus § 44, 3 geht hervor, dafs in einem beliebigen einfach zusammenhängenden Raume, für dessen Oberflächenpunkte $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ überall gegeben ist, nur eine einzige rotationsfreie Bewegung möglich ist. Ein Teil der Oberfläche kann dann z. B. durch feste Wände gebildet werden, für die $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ ist, während an den übrigen Teilen ein bestimmtes Ein- und Ausströmen stattfindet.

In einem mehrfach zusammenhängenden, überall mit festen Wänden umgrenzten Raume sind unendlich viele rotationsfreie Bewegungen möglich. Ist etwa ein zweifach zusammenhängender Raum (z. B. ein ringförmiger) gegeben, so kann man denselben durch einen Querschnitt in einen einfach zusammenhängenden verwandelt denken. Alsdann können wir festsetzen, dafs an der ursprünglichen Wandung $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$ sein soll. Der Querschnitt tritt mit seinen beiden Seiten als Grenzfläche auf; man kann daher auf der einen Seite ein beliebiges Ausströmen durch ihn festsetzen, während auf der andern Seite ein kongruentes Einströmen stattfinden mufs.

Dabei ist leicht zu ersehen, dafs das Geschwindigkeitspotential hier mehrdeutig sein mufs. Es kann sich kein Teil der Strömung auf einen einfach zusammenhängenden Bestandteil des von der Flüssigkeit durchflossenen Gebietes beschränken, da dies dem Vorhergehenden widersprechen würde. Die Strömung mufs daher selbst eine ringförmige sein. Aus der

Bedeutung des Geschwindigkeitspotentials folgt aber unmittelbar, dafs es innerhalb eines Stromfadens in der Richtung der Strömung beständig zunimmt. Durchläuft man also einen Stromfaden von einem Punkte des Querschnittes, der zugleich eine Fläche gleichen Geschwindigkeitspotentials sein möge, bis zur Rückkehr zum Querschnitt, so mufs der Wert des Potentials zugenommen haben. Das Geschwindigkeitspotential ist daher unendlich vieldeutig.

8. Aus Gleichung (2) wollen wir noch eine einfache Folgerung für einen besonders wichtigen Fall ziehen. Wir betrachten den Ausflufs einer inkompressibeln Flüssigkeit, auf welche nur die Schwere wirkt, durch eine Öffnung des Gefäfses, in welchem sie sich befindet. Dabei mag die Aufgabe durch die Annahme vereinfacht werden, dafs die Öffnung so klein ist, dafs die Geschwindigkeit an der Oberfläche infolge des Ausströmens verschwindend klein ist; wir können dann näherungsweise $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ setzen. Nehmen wir die x-Achse senkrecht abwärts gerichtet und den Nullpunkt in der Oberfläche an, so geht (2), wenn noch die Geschwindigkeit mit v bezeichnet wird, in

$$gx - \frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{2} v^2 + C \tag{7}$$

über. Da für die Oberfläche $x = 0$, $p = 0$, $v = 0$ ist, so mufs $C = 0$ sein. Ferner ist an der Stelle, wo die Flüssigkeit frei ausfliefst, gleichfalls $p = 0$. Daher folgt aus (7) für die Ausflufsgeschwindigkeit in der Tiefe x unter der Oberfläche die Relation

$$v = \sqrt{2gx}, \tag{8}$$

die das bekannte Torricelli'sche Theorem ausspricht.

Die Flüssigkeit fliefst mit der Geschwindigkeit aus, die ein Körper erreicht, wenn er von der Höhe der Flüssigkeitsoberfläche bis zur Höhe der Ausflufsöffnung herabfällt (vgl. § 3, (5)).

§ 84.

Benutzung der Resultate der Potentialtheorie zur Untersuchung stationärer Strömungen.

1. Bei der Lösung hydrodynamischer Probleme erscheint es auf den ersten Blick als das Naturgemäfseste, von den gegebenen Kräften und Grenzbedingungen auszugehen und hiernach die Bewegung zu entwickeln; zur vollständigen Fixierung der Aufgabe wäre es hierbei notwendig, die Anfangslage und die Anfangsgeschwindigkeit (nebst ihrer Richtung) für unendlich viele Flüssigkeitsteilchen zu kennen. In Wirklichkeit bietet aber die Durchführung so grofse Schwierigkeiten, dafs es zweckmäfsiger erscheint, einen ganz anderen Weg einzuschlagen, den wir zunächst für die rotationslose Bewegung erörtern wollen.

Wie wir sahen, mufs in diesem Falle ein Geschwindigkeitspotential φ vorhanden sein, welches für inkompressible Flüssigkeiten die Gleichung

$$(1) \qquad \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

befriedigt. Jede Lösung der Gleichung (1), welche zugleich die vorhandenen Grenzbedingungen befriedigt, liefert eine mögliche Bewegung der Flüssigkeit.

Die Kräfte, welche die Bewegung bewirken, müssen sich aus dieser selbst herleiten lassen; oft werden wir sie durch die Bewegungsverhältnisse ersetzen, welche an den freien Teilen der Umgrenzung vorhanden sind. Statt also die Bewegung zu entwickeln, welche gegebenen Kräften und Grenzbedingungen entspricht, stellen wir umgekehrt eine bestimmte Bewegung auf und suchen die Bedingungen, unter denen sie möglich ist (vgl. hiermit das Verfahren in § 70).

2. Man nennt die Flüssigkeitsbewegung eine stationäre, wenn an demselben Orte stets dieselbe Bewegung herrscht, obgleich beständig neue Flüssigkeitsteile an denselben gelangen. Die Bewegung des Wassers in einem Flusse entspricht diesen Anforderungen sehr nahezu. An der Stelle, wo in einem Momente eine Stromschnelle, ein Wirbel, ein Wassersturz statthat, ist diese Erscheinung fortdauernd wahrzunehmen. Ein Wasserfall bietet trotz der wechselnden Wasserteile fortgesetzt nahezu das gleiche Bild. Überhaupt wird sich da, wo stets dieselben Kräfte in Thätigkeit sind, der Untergrund derselbe bleibt und sich die Art der Zuströmung der Flüssigkeit nicht ändert, eine stationäre Strömung herausbilden müssen.

Bei der stationären Bewegung sind die Geschwindigkeitskomponenten Funktionen des Ortes, also von x, y, z, nicht der Zeit t. Existiert daher ein Geschwindigkeitspotential, so wird dasselbe im Falle der stationären Strömung lediglich eine Funktion von x, y, z, nicht von t sein.

3. Der letzten Bedingung entsprechen nun die Potentialausdrücke, welche wir im vierten Abschnitte kennen lernten. Jeder derselben liefert uns, als Geschwindigkeitspotential betrachtet, eine mögliche stationäre Bewegung. Da diese Potentiale nebst ihren ersten Derivierten in unendlicher Ferne verschwinden, so liefern sie eine Flüssigkeitsbewegung, welche in unendlicher Ferne in den Ruhezustand übergeht; man sagt, die Flüssigkeit ruhe im Unendlichen. Wegen der Eindeutigkeit dieser Potentiale liefern sie stets nur eine Bewegung in einem einfach zusammenhängenden Raume.

Wir untersuchen die Bewegung, welche dem Potential der homogenen Kugel entspricht.

4. Das Potential einer homogenen Kugel ist für einen äufseren Punkt mit demjenigen eines materiellen Punktes von der Kugelmasse, der sich im Kugelzentrum befindet, identisch. Wir denken uns um dieses Zentrum eine beliebig kleine Kugel beschrieben und haben für den ganzen Raum aufserhalb derselben das Potential

(2) $$\varphi = \frac{m}{r},$$

worin r den Abstand vom Zentrum bedeutet. Aufserhalb der Kugel gilt die Gleichung (1). Betrachten wir φ als Flüssigkeitspotential, so sind die Flächen gleichen Geschwindigkeitspotentials konzentrische Kugeln, die Strömungslinien Gerade, welche im Zentrum zusammentreffen. Die nach dem Zentrum gerichtete Geschwindigkeit (falls m positiv ist) wird durch

(3) $$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{m}{r^2}$$

dargestellt.

Die Flüssigkeit strömt daher, aus dem Unendlichen kommend, von allen Seiten her gleichmäfsig auf das Zentrum los, um im Innern der angenommenen Kugel zu verschwinden. Man kann sich auch, um die Betrachtung des Unendlichen zu vermeiden, um das Zentrum eine gröfsere Kugel beschrieben denken. Auf dieser tritt die Flüssigkeit überall gleichmäfsig und mit gegen das Zentrum gerichteter Bewegung ein, um schliefslich von der kleinen Kugel aufgenommen zu werden. Die Geschwindigkeit nimmt umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom Zentrum zu, was sich auch ganz direkt erklärt; da nämlich die Flüssigkeit immer kleinere Kugelflächen zu passieren hat, so mufs die Geschwindigkeit entsprechend zunehmen.

Ist m negativ, so ist der Verlauf gerade der umgekehrte.

Man sieht, dafs die Realisierbarkeit des Problems von der Möglichkeit abhängt, den Zuflufs und Abflufs in der beschriebenen Weise zu regulieren. In der kleinen Kugel kann dies natürlich nicht genau erreicht werden, da ein herausführendes Ableitungsrohr angebracht werden müfste. Überhaupt leiden viele Resultate, welche die Potentialtheorie für die Hydrodynamik liefert, an dem Mifsstande, dafs sie den wirklich vorkommenden Verhältnissen sehr wenig entsprechen.

Auch das Potential eines homogenen Ellipsoids läfst sich in ähnlicher Weise zur Herleitung einer möglichen Flüssigkeitsbewegung verwenden; doch sind die sich ergebenden Resultate von keinem besonderen Interesse.

5. Aus den bekannten Potentialausdrücken der Kugel und des Ellipsoids*) können wir noch bemerkenswertere Ergebnisse ableiten. Bezeichnet V das Potential des homogenen Ellipsoids

(4) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

mit der Dichtigkeit 1 in Bezug auf einen äufseren Punkt, ist also V durch die Gleichung § 38, (44) bestimmt, so stellt

(5) $$\varphi = M \frac{\partial V}{\partial z} - z,$$

*) Für die Kugel wurde die Untersuchung von Lejeune-Dirichlet, für das Ellipsoid von Clebsch durchgeführt.

worin M eine Konstante bezeichnet, das Geschwindigkeitspotential für eine mögliche Bewegung aufserhalb des Ellipsoids dar. Die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ wird nämlich durch (5) befriedigt. Wegen des bekannten Verhaltens von V im Unendlichen ist hier

$$(6) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -1;$$

hier strömt also die Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit 1 in der Richtung der negativen z-Achse.

Wir untersuchen nun das Verhalten der Flüssigkeit an der Oberfläche des hypothetischen Ellipsoides selbst; dabei möge n_a die nach dem Inneren, n_i die nach dem Äufseren des Ellipsoides gerichtete Normale in einem Punkte der Oberfläche bezeichnen. Es ist

$$(7) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = M \frac{\partial^2 V}{\partial n_a \partial z} - \frac{\partial z}{\partial n_a} = M \frac{\partial^2 V}{\partial n_a \partial z} - \cos(n_a, z).$$

Aus § 43 (Zusatz p. 317) folgt, dafs

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial n_a \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial n_i \partial z} = 4\pi \cos(n_a, z)$$

ist, so dafs aus (7)

$$(9) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = (4\pi M - 1)\cos(n_a, z) - M \frac{\partial^2 V}{\partial n_i \partial z}$$

wird. Hierin können wir für V den einfacheren Potentialausdruck für einen inneren Punkt einsetzen, der sich in der Form

$$(10) \qquad V = \text{Const.} - Ax^2 - By^2 - Cz^2$$

darstellt, worin der Wert der Konstanten A, B, C aus § 38, (47) hervorgeht. Hiernach wird

$$(11) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial n_i \partial z} = -2C\cos(n_i, z) = 2C\cos(n_a, z),$$

so dafs (9) in

$$(12) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial n_a} = (4\pi M - 2CM - 1)\cos(n_a, z)$$

übergeht. Hieraus folgt das wichtige Resultat, dafs $\frac{\partial \varphi}{\partial n_a}$ konstant Null wird, wenn man

$$(13) \qquad M = \frac{1}{4\pi - 2C}$$

setzt.

Nach dieser Festsetzung stellt (5) eine Bewegung dar, bei der das Ellipsoid (4), welches man sich als festen Körper denken kann, in Ruhe bleibt. Wegen (6) ist die Bewegung im allgemeinen, d. h. in gröfserer Entfernung vom Ellipsoid als eine der z-Achse entgegengesetzt fliefsende anzusehen.

6. Wir wollen die Bewegung etwas weiter untersuchen für den Fall, dafs das Ellipsoid (4) in eine Kugel mit dem Radius R übergeht. Es ist dann

$$V = \frac{4R^3\pi}{3\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \tag{14}$$

also

$$\varphi = -\left(\frac{4R^3\pi M}{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+1\right)z = -\left(\frac{4R^3\pi M}{3r^3}+1\right)z. \tag{15}$$

Hier wird

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n_a} = \frac{4R^3\pi M}{r^4}z - \left(\frac{4R^3\pi M}{3r^3}+1\right)\frac{\partial z}{\partial n_a};$$

bedenkt man noch, daſs offenbar

$$\frac{\partial z}{\partial n_a} = \frac{z}{r}$$

und daſs $r = R$ zu nehmen ist, so folgt, daſs $\frac{\partial\varphi}{\partial n_a} = 0$ wird, wenn man

$$M = \frac{3}{8\pi} \tag{16}$$

setzt. Hiernach wird

$$\varphi = -\left(\frac{R^3}{2r^3}+1\right)z. \tag{17}$$

In allen durch die z-Achse gelegten Ebenen verläuft die Bewegung in derselben Weise; wir brauchen daher nur die Bewegung in der xz-Ebene zu verfolgen. Es ist

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{3R^3xz}{2r^5}, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{3R^3z^2}{2r^5} - \frac{R^3}{2r^3} - 1. \end{cases} \tag{18}$$

Man erkennt hieraus, daſs $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ für sehr groſse r verschwindet, während $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -1$ wird; hier weicht also die Bewegung nur sehr wenig von der geradlinigen Strömung ab. Für $x = 0$, $z = \pm r = \pm R$ wird

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0,$$

d. h. in den Punkten der Kugel, welche in die z-Achse fallen, findet überhaupt keine Bewegung statt. Sonst ist für $x = 0$, $z = r$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{R^3}{r^3} - 1.$$

In der z-Achse findet also eine Strömung statt, welche mit abnehmendem r abnimmt, um für $r = R$ der Null gleich zu werden.

Für $x = r = R$, $z = 0$ wird

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{3}{2}.$$

Am „Rande“ der Kugel ist also die Strömung um die Hälfte stärker als in unendlicher Ferne.

Das durchgeführte Beispiel zeigt für einen speziellen Fall, welche Bewegung eine im allgemeinen gleichmäfsig strömende Flüssigkeit annimmt, wenn sich ihr ein fester Körper — hier speziell eine Kugel — in den Weg stellt.

§ 85.

Die Methode der Koordinatentransformation.

1. Die nächstliegende Methode, passende Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta\varphi = 0, \tag{1}$$

die ja nach § 47 auch allgemein integriert werden kann, zu erhalten, besteht in dem einfachen Erraten solcher. So übersieht man auf den ersten Blick, dafs eine beliebige lineare Funktion der Koordinaten,

$$\varphi = ax + by + cz, \tag{2}$$

der Gleichung (1) Genüge leistet.

Die Flächen gleichen Geschwindigkeitspotentials sind in diesem Falle parallele Ebenen, die Stromlinien daher die auf diesen senkrechten Geraden. Wir haben hier die einfache, geradlinige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit.

2. Das Erraten von anderen, komplizierteren Lösungen von (1) wird sehr gefördert durch geeignete Transformationen dieser Gleichung in andere Koordinatensysteme. Durch die bekannte Umrechnung von (1) in Polarkoordinaten (§ 40 (10)) würden wir z. B. leicht auf die erste der im vorigen Paragraphen behandelten Bewegungen geführt werden. Die Einführung elliptischer Koordinaten, mit der wir uns alsbald beschäftigen wollen, liefert ein Resultat, welches von dem in § 84, 4 zuletzt erwähnten verschieden ist.

3. Da die direkte Koordinatentransformation sehr umständlich ist, so wählen wir ein indirektes Verfahren, welches aus § 45, 2 hervorgeht. Wir sahen dort, dafs ein Integral

$$\Omega = \int d\tau \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right], \tag{3}$$

welches über einen vorgelegten einfach zusammenhängenden Raum auszudehnen und in welchem φ für die Grenze dieses Raumes gegeben ist, zu einem Minimum wird, wenn innerhalb dieses Raumes die Gleichung (1) befriedigt ist. Wir können daher die Gleichung (1) durch

$$\delta\Omega = 0 \tag{4}$$

ersetzen. Da in (3) relativ leicht neue Koordinaten einzuführen sind, so ist die Transformation auf diesem Wege der direkten öfters vorzuziehen.

4. Die Darstellung der Gröfse unter dem Integral mittels der in

§ 31 eingeführten elliptischen Koordinaten ist unmittelbar zu leisten. Es ist*)

$$(5)\quad 4\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]=\frac{1}{L}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}\right)^2+\frac{1}{M}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}\right)^2+\frac{1}{N}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_3}\right)^2,$$

worin

$$(6)\quad \begin{cases} L=\dfrac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}, \\ M=\dfrac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_1)}{(a^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_2)}, \\ N=\dfrac{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{(a^2+\lambda_3)(b^2+\lambda_3)(c^2+\lambda_3)} \end{cases}$$

zu setzen ist. Wir haben daher an Stelle von (1)

$$(7)\quad \delta\int d\tau\left[\frac{1}{L}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}\right)^2+\frac{1}{M}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}\right)^2+\frac{1}{N}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_3}\right)^2\right]=0$$

oder, da infolge von § 31, (18)

$$(8)\quad d\tau=\tfrac{1}{8}\sqrt{LMN}\,d\lambda_1\,d\lambda_2\,d\lambda_3$$

ist, nach Ausführung der Variation unter dem Integralzeichen

$$(9)\int d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3\left[\sqrt{\frac{MN}{L}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\lambda_1}+\sqrt{\frac{NL}{M}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\lambda_2}+\sqrt{\frac{LM}{N}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_3}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial\lambda_3}\right]=0.$$

Ähnlich wie in § 43, (10) können wir hier partielle Integrationen ausführen, wodurch wir die linke Seite von (9) in ein Raumintegral und in ein Oberflächenintegral zerlegen; beide enthalten den Faktor $\delta\varphi$. Da nun $\delta\varphi$ auf der Oberfläche, wo φ feste, nicht zu variierende Werte besitzt, verschwinden mufs, so kommt das Oberflächenintegral ganz in Wegfall und wir erhalten an Stelle von (9)

$$(10)\int d\tau\,\delta\varphi\left[\frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\sqrt{\frac{MN}{L}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\sqrt{\frac{NL}{M}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_3}\left(\sqrt{\frac{LM}{N}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_3}\right)\right]=0.$$

Wegen der Willkürlichkeit von $\delta\varphi$ in jedem Punkte schliefsen wir, dafs die Gröfse unter dem Integralzeichen verschwinden mufs, und wir finden so als Transformation von (1) die Gleichung

$$(11)\quad \frac{\partial}{\partial\lambda_1}\left(\sqrt{\frac{MN}{L}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_2}\left(\sqrt{\frac{NL}{M}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\lambda_3}\left(\sqrt{\frac{LM}{N}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_3}\right)=0.$$

---

*) Der Ausdruck $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2$ ist das Doppelte der lebendigen Kraft eines materiellen Punktes, wenn die Masse der Einheit gleichgesetzt wird. Die Geschwindigkeitskomponenten nach den Richtungen der Schnittlinien des orthogonalen, elliptischen Systems sind durch (s. zu diesem Zweck § 31, (18), worin $\sqrt{L}d\lambda_1$ u. s. w. in $\frac{1}{2}\sqrt{L}d\lambda_1$ u. s. w. zu verbessern ist)

$$\frac{1}{2\sqrt{L}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1},\quad \frac{1}{2\sqrt{M}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_2},\quad \frac{1}{2\sqrt{N}}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_3}$$

dargestellt, woraus sich (5) unmittelbar ergiebt.

5. Um eine partielle Lösung von (11) zu erraten, betrachten wir eine der Wurzelgröſsen auf der linken Seite, z. B. $\sqrt{\frac{MN}{L}}$, genauer. Setzen wir die Werte (6) darin ein, so erkennen wir, daſs der untersuchte Ausdruck aus dem Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}}$$

und einem weiteren Faktor, der λ_1 nicht enthält, besteht. Nun übersehen wir sofort, daſs der von λ_2 und λ_3 unabhängige Ausdruck

$$\varphi_1 = \int \frac{d\lambda_1}{\sqrt{(a^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_1)}} \tag{12}$$

die Gleichung (11) befriedigt. Es wird nämlich $\frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \lambda_3} = 0$ und $\sqrt{\frac{MN}{L}} \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}$ von λ_1 unabhängig. Ebenso befriedigen auch die beiden analog gebildeten Ausdrücke φ_2 und φ_3 die Gleichung (11).

6. Die Diskussion der erhaltenen Geschwindigkeitspotentiale ist einfach. Setzen wir $\varphi_1 =$ Const., so folgt auch $\lambda_1 =$ Const. Dies ist aber die Gleichung eines der konfokalen Ellipsoide, welche das eine System der Fundamentalflächen des elliptischen Koordinatensystems ausmachen. Erinnern wir uns daran, daſs die elliptischen Koordinaten orthogonal sind, so folgt sofort, daſs die Schnittlinien der konfokalen einschaligen und zweischaligen Hyperboloide, welche die beiden andern Schaaren von Fundamentalflächen bilden, die Stromlinien darstellen.

Ähnlich wie im vorigen Paragraphen können wir uns ein gröſseres und ein kleineres Ellipsoid vorstellen, durch dessen Fläche die Flüssigkeit ein- und ausflieſst, während sich im Innern des von beiden eingeschlossenen Raumes die Flüssigkeit in den genannten Stromlinien bewegt.

Analog ist die Diskussion der Geschwindigkeitspotentiale φ_2 und φ_3. Auch läſst sich eine in einer Ebene (resp. parallel einer solchen) vorgehende Bewegung konstruieren, bei welcher Systeme von konfokalen Ellipsen und Hyperbeln die Kurven gleichen Geschwindigkeitspotentials und die Stromlinien darstellen.

§ 86.

Die konforme Abbildung.

1. Die bisher benutzten Methoden zur Herleitung möglicher Flüssigkeitsbewegungen leiden vielfach an dem Miſsstande, daſs sie sich den in der Wirklichkeit gegebenen Verhältnissen zu wenig anpassen und Resultate von lediglich theoretischem Interesse liefern. Weit leistungsfähiger ist die folgende, in diesem und dem nächsten Paragraphen durchzuführende, von v. Helmholtz begründete, von Kirchhoff ausgebildete

Methode*). Dieselbe ist nur auf Bewegungen in einer Ebene (resp. parallel einer solchen) anwendbar. Flüssigkeitsbewegungen, bei denen sich alle zu einer bestimmten Geraden normalen Schichten gleichmäfsig bewegen, gehören hierher. Auch sollen nur stationäre Bewegungen behandelt werden.

Das Geschwindigkeitspotential einer inkompressibeln Flüssigkeit, das nur von zwei Variabeln x und y abhängt, genügt der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

und jede Lösung dieser Gleichung giebt eine mögliche Bewegung, welche parallel einer Ebene vor sich geht. Die allgemeinste Lösung von (1) haben wir bereits früher aufgestellt; die Hauptaufgabe liegt indessen darin, solche spezielle Lösungen ausfindig zu machen, welche gegebenen Grenzbedingungen genügen. Hierzu werden wir aber befähigt durch die Beziehungen, in denen die Gleichung (1) zu der Theorie der komplexen Funktionen steht.

2. Es sei

$$z = x + iy, \tag{2}$$

worin i die Quadratwurzel aus der negativen Einheit bedeutet, und $f(z)$ stetige Funktion von z; ferner sei

$$f(z) = w = u + iv, \tag{3}$$

worin u und v ebenso wie x und y reell sein mögen. Es ist alsdann

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dw}{dz} &= \frac{d(u+iv)}{d(x+iy)} = \frac{du + idv}{dx + idy} \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + i\frac{\partial v}{\partial x}dx + i\frac{\partial v}{\partial y}dy}{dx + idy}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Soll $\frac{dw}{dz}$ einen bestimmten Grenzwert repräsentieren, also von der speziellen Wahl von dx und dy nicht abhängen, so müssen sich diese beiden Gröfsen herausheben, was offenbar nur eintritt, wenn

$$\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} = i\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) = i\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} \tag{5}$$

ist; denn nur dann enthält der Zähler den Faktor $dx + idy$. Durch Trennung von Reellem und Imaginärem erhalten wir aus (5)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{6}$$

Differentiieren wir diese beiden Gleichungen nochmals nach x und y, so erhalten wir

---

*) v. Helmholtz, Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen, Ges. Werke, B. 1, p. 146; Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, Ges. Werke, p. 416; Mechanik, p. 272 u. 290.

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

und hieraus

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Der reelle und der durch i dividierte imaginäre Teil der stetigen*) Funktion $f(z)$ genügen also derselben partiellen Differentialgleichung, wie das Geschwindigkeitspotential einer ebenen Bewegung.

Sind also x und y die Koordinaten eines Flüssigkeitsteilchens und bildet man willkürlich eine stetige Funktion $f(x + yi)$, so liefern der reelle und der durch i dividierte imaginäre Teil dieser Funktion das Geschwindigkeitspotential einer möglichen Bewegung.

3. Aus (6) folgt ferner die Richtigkeit der Gleichung

$$(9)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Denkt man sich zwei Kurven durch die Gleichungen $u = c$ und $v = c_1$, worin c und c_1 beliebige Konstanten sind, u und v aber als Funktionen von x und y aufgefafst werden, so besagt die Gleichung (6), dafs beide Kurven aufeinander senkrecht stehen. Die Richtungskosinus der Tangenten an beide Kurven im Schnittpunkte verhalten sich nämlich wie

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Betrachtet man nun u als Geschwindigkeitspotential, so stellen die Kurven $u = c$ die Linien gleichen Geschwindigkeitspotentials dar. Die Kurven $v = c_1$, welche auf diesen ersten senkrecht stehen, müssen daher die zugehörigen Stromlinien sein. Also:

Betrachtet man u oder v als Geschwindigkeitspotential, so liefern $v =$ Const., resp. $u =$ Const. die Gleichungen der Stromlinien.

4. Wir denken uns jetzt auch u und v als rechtwinklige Koordinaten; sowohl $z = x + yi$, als auch $w = u + vi$ geben dann die allgemein bekannte Darstellung einer komplexen Zahl als Punkt in je einer Ebene. Durch die Gleichung (2) wird jedem Punkte der z-Ebene ein Punkt der w-Ebene zugeordnet oder, wie man zu sagen pflegt, die z-Ebene wird mittels der Funktion $w = f(z)$ auf der w-Ebene abgebildet.

Die Gröfse $\frac{dw}{dz}$ stellt nach dem Vorhergehenden einen bestimmten

*) Der Begriff der Stetigkeit einer Funktion w einer komplexen Variabeln z, wie wir ihn hier auffassen, verlangt, dafs $\frac{dw}{dz}$ einen bestimmten endlichen Wert repräsentiert.

Grenzwert dar — einzelne singuläre Punkte etwa abgerechnet —, der von der speziellen Wahl von dz nicht abhängt. Sind daher dz_1, dz_2, $dz_3, \ldots$ verschiedene unendlich kleine Inkremente von z; dw_1, dw_2, dw_3 die entsprechenden Inkremente von w, so ist

$$(10) \qquad \frac{dw_1}{dz_1} = \frac{dw_2}{dz_2} = \frac{dw_3}{dz_3} = \cdots$$

Bezeichnen wir (Fig. 17) die absoluten Beträge von dz_1, dz_2, $dz_3, \ldots$ mit dr_1, dr_2, $dr_3, \ldots$ diejenigen von dw_1, dw_2, $dw_3, \ldots$ mit $d\varrho_1$, $d\varrho_2$, $d\varrho_3, \ldots$, so mufs auch

$$(11) \qquad \frac{d\varrho_1}{dr_1} = \frac{d\varrho_2}{dr_2} = \frac{d\varrho_3}{dr_3} = \cdots$$

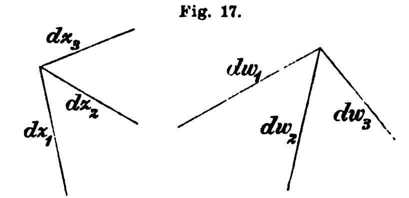


Fig. 17.

sein, da der absolute Betrag eines Quotienten dem Quotienten der absoluten Beträge von Dividend und Divisor gleich ist. Hiermit haben wir das Resultat:

Den unendlich kleinen Strecken, welche in der z-Ebene von einem Punkte auslaufen, entsprechen in der w-Ebene proportionale Strecken.

Nur wenn $\frac{dw}{dz} = 0$ oder $\frac{dw}{dz} = \infty$ ist, können die gemachten Schlüsse nicht angewandt werden.

Einem unendlich kleinen Dreieck ABC der z-Ebene entspricht in der w-Ebene ebenfalls ein unendlich kleines Dreieck $A_1B_1C_1$. Nach dem eben Bewiesenen ist

$$(12) \qquad \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = \frac{AB}{A_1B_1},$$

d. h. die beiden unendlich kleinen Dreiecke sind einander ähnlich; ihre entsprechenden Winkel sind gleich. Dem Winkel zweier sich schneidenden Kurven in der z-Ebene entspricht daher ein gleicher Winkel in der w-Ebene. So gelangen wir zu dem Ergebnis:

Durch eine stetige Funktion $w = f(z)$ wird die z-Ebene auf der w-Ebene derart abgebildet, dafs entsprechende unendlich kleine Figuren in beiden einander ähnlich sind; entsprechende Winkel sind gleich. Nur in den Punkten, wo $\frac{dw}{dz} = 0$ oder $\frac{dw}{dz} = \infty$ ist (den Unstetigkeits- und Verzweigungspunkten), verliert dieses Gesetz seine Gültigkeit. Man bezeichnet diese Abbildung als konform, isagonal oder in den kleinsten Teilen ähnlich.

Es braucht nicht etwa vorausgesetzt zu werden, dafs w eine eindeutige Funktion von z ist; im Falle der Vieldeutigkeit kann man einen Komplex stetig zusammenhängender w-Werte herausgreifen, und für diesen

gilt das hergeleitete Gesetz. Die Verzweigungspunkte, in denen mehrere sonst verschiedene Werte der mehrdeutigen Funktion in einen zusammenfallen, gehören immer, wie funktionaltheoretische Betrachtungen zeigen, zu den vorhin ausgeschlossenen Punkten.

5. Wir untersuchen jetzt den speziellen Fall genauer, dafs w eine lineare Funktion von z, d. h. dafs

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{13}$$

ist. Da eine Multiplikation des Zählers und des Nenners mit derselben Gröfse ohne Einflufs ist, so enthält die lineare Funktion drei willkürliche Konstanten.

Es gilt nun der wichtige Satz*):

Durch eine lineare Funktion wird ein Kreis wieder als Kreis abgebildet; dabei wird die Gerade als ein Spezialfall des Kreises, nämlich als ein Kreis mit unendlichem Radius angesehen.

Beweis. Die Transformation (13) kann durch eine Folge einfacherer ersetzt werden. Es ist nämlich

$$w = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc - ad}{c}}{cz + d},$$

so dafs w durch folgende Reihenfolge von Operationen erhalten werden kann:

$$\begin{cases} w = w' + \frac{a}{c}, \quad w' = \frac{bc - ad}{c} w'', \quad w'' = \frac{1}{w'''}, \\ w''' = w^{IV} + d, \quad w^{IV} = cz. \end{cases} \tag{14}$$

Diese Transformationen lassen sich auf die drei Grundformen

$$w = z + a, \quad w = bz, \quad w = \frac{1}{z} \tag{15}$$

zurückführen.

Die erste Transformation (15) liefert in der w-Ebene eine kongruente Abbildung der z-Ebene, die nur gegen den Nullpunkt verschoben erscheint. Die zweite Transformation giebt eine ähnliche Abbildung, die, wenn b komplex ist, mit einer Drehung aus der ähnlichen Lage verbunden ist. Durch beide Transformationen wird ein Kreis wieder in einen Kreis, eine Gerade in eine Gerade transformiert.

In der dritten Transformation (15) setzen wir

$$z = x + iy, \quad w = u + iv$$

und haben

$$x + iy = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2},$$

also

---

*) a, b, c, d dürfen beliebig komplex sein.

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Besitzt ein Kreis in der z-Ebene die Gleichung

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

so liefert die Transformation

$$\left(\frac{u}{u^2 + v^2} - \alpha\right)^2 + \left(\frac{v}{u^2 + v^2} + \beta\right)^2 = r^2$$

oder

$$\frac{1}{u^2 + v^2} - \frac{2(\alpha u - \beta v)}{u^2 + v^2} = r^2 - \alpha^2 - \beta^2$$

oder

$$(r^2 - \alpha^2 - \beta^2)(u^2 + v^2) + 2(\alpha u - \beta v) = 1.$$

Dies ist wieder die Gleichung eines Kreises, da kein Glied mit uv auftritt und u^2 und v^2 denselben Koeffizienten besitzen; im Spezialfalle

$$r^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 0$$

geht der Kreis in eine Gerade über.

Eine Gerade

$$ax + by + c = 0$$

in der z-Ebene wird in

$$\frac{au}{u^2 + v^2} - \frac{bv}{u^2 + v^2} + c = 0$$

oder

$$c(u^2 + v^2) + au - bv = 0$$

transformiert, was die Gleichung eines Kreises ist, der durch den Nullpunkt geht. Bei $c = 0$ ist die Abbildung eine Gerade.

Jede Zusammenstellung von Transformationen (15), also auch die Transformation (13), führt einen Kreis wieder in einen andern Kreis über, wobei die Gerade als Spezialfall des Kreises erscheint.

6. Durch Differentiation von (13) erhalten wir

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}; \tag{16}$$

ein Nullwerden des Differentialquotienten tritt nur für $z = \infty$, ein Unendlichwerden für $z = -\frac{d}{c}$ ein. Eine Unterbrechung der Konformität der Abbildung könnte also nur für $z = \infty$ oder $w = \infty$ eintreten. Selbst in diesen Fällen jedoch bleibt die Konformität gewahrt, wenn das Unendliche in geeigneter Weise aufgefafst wird; wir gehen jedoch hierauf nicht weiter ein. Wir bemerken blofs, dafs hier nur das Vorhandensein eines unendlich fernen Punktes angenommen werden darf.

Da die Transformation (13) drei willkürliche Konstanten enthält, so kann man es durch geeignete Wahl derselben dahin bringen, dafs drei Punkte der z-Ebene in drei beliebig gegebene der w-Ebene übergeführt werden. Da ein Kreis durch drei seiner Punkte, ebenso eine Gerade durch zwei im Endlichen gelegene Punkte und den unendlich fernen

Punkt, durch den sie immer geht, vollkommen bestimmt ist, so kann man (13) stets so bestimmen, dafs ein vorgelegter Kreis der z-Ebene in einen vorgelegten der w-Ebene übergeführt wird, wobei wieder die Gerade als Spezialfall erscheint. Wir werden gerade diesen Umstand — freilich in etwas modifizierter Weise — später zu benutzen haben.

7. Wir betrachten weiter die Transformation

$$w = z^n, \tag{17}$$

worin n eine positive ganze Zahl bedeuten möge. Da für $z = 0$ auch $\frac{dw}{dz} = 0$ wird, so ist $z = 0$ ein Punkt, in welchem die Konformität eine Unterbrechung erleiden kann und, wie wir sogleich sehen werden, wirklich erleidet. Setzen wir

$$\begin{cases} z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \\ w = \varrho(\cos\psi + i\sin\psi), \end{cases} \tag{18}$$

worin r und ϱ reell sind, so wird aus (17) nach dem Moivre'schen Satze

$$\varrho(\cos\psi + i\sin\psi) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

also

$$\varrho = r^n, \quad \psi = n\varphi + 2k\pi. \tag{19}$$

Es mögen nun in der z-Ebene zwei Gerade gegeben sein, welche durch den Nullpunkt gehen und mit der Halbachse der reellen, positiven Zahlen die Winkel φ_1 und φ_2 einschliefsen, also den Winkel $\varphi_1 - \varphi_2$ miteinander bilden. In der w-Ebene entsprechen ihnen noch zwei Gerade, welche mit der entsprechenden Achse die Winkel $n\varphi_1$ und $n\varphi_2$ einschliefsen, also den Winkel $n(\varphi_1 - \varphi_2)$ miteinander bilden.

Ein jeder Winkel in der z-Ebene, welcher den Nullpunkt zum Scheitel hat, wird also in der w-Ebene durch sein n-faches dargestellt. Während eine durch den Nullpunkt gehende Gerade in der z-Ebene eine einfache Umdrehung ausführt, führt die entsprechende Gerade in der w-Ebene n Umdrehungen aus.

Entsprechendes kann man über die Winkel annehmen, welche im Unendlichen entstehen; sonst herrscht überall Konformität. Alle Kreise, welche in der z-Ebene den Nullpunkt zum Mittelpunkte haben, werden in der w-Ebene wieder als Kreise mit demselben Mittelpunkte abgebildet. Für andere Kreise gilt dies nicht.

8. Ist umgekehrt

$$w = \sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}}, \tag{20}$$

so entsprechen jedem z-Werte n w-Werte. Jeder Geraden der z-Ebene, welche durch den Nullpunkt geht und durch den Richtungswinkel φ fixiert ist, ensprechen in der w-Ebene solche Geraden mit den Richtungswinkeln

$$\frac{\varphi}{n}, \quad \frac{\varphi+2\pi}{n}, \quad \frac{\varphi+4\pi}{n}, \ldots, \quad \frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}.$$

Unter den verschiedenen Winkeln, welche in der w-Ebene einem Winkel der z-Ebene entsprechen, der seinen Scheitel im Nullpunkte hat, finden sich solche, welche den $n$ten Teil des ersten Winkels betragen, während die übrigen sich um Vielfache von $\frac{2\pi}{n}$ hiervon unterscheiden. Führt eine durch den Nullpunkt gehende Gerade eine Drehung um denselben aus, so dreht sich die entsprechende Gerade der w-Ebene n-mal langsamer. Bei Anwendungen fixiert man als Winkel, welcher φ entsprechen soll, gewöhnlich $\frac{\varphi}{n}$.

Über die Abbildung von Kreisen gilt Analoges, wie in der vorigen Nummer.

Stellt man die Resultate dieser und der vorhergehenden Nummer zusammen, so gelangt man zu dem folgenden Resultate:

Durch die Transformation

$$w = z^n, \tag{21}$$

worin n *beliebig gebrochen* ist, wird im Nullpunkte ein Winkel in sein n-faches verwandelt, und dasselbe ist für den unendlich fernen Punkt anzunehmen; sonst herrscht Konformität. Nur die Kreise, welche den Nullpunkt zum Mittelpunkte haben, werden wieder als Kreise abgebildet, und nur diejenigen Geraden, welche durch den Nullpunkt gehen, wieder als Gerade.

9. Es ist nun leicht Transformationen anzugeben, welche die z-Ebene konform auf die w-Ebene abbilden, mit Ausnahme von zwei beiderseits beliebig zu wählenden Punkten, in denen jeder Winkel in das n-fache*) verwandelt wird. Setzen wir nämlich

$$\left\{ w = \frac{a_1\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^n + b_1}{c_1\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^n + d_1}, \right. \tag{22}$$

so kann diese Transformation durch die Folge dreier:

$$w = \frac{a_1 w' + b_1}{c_1 w' + d_1}, \quad w' = w''^n, \quad w'' = \frac{az+b}{cz+d} \tag{23}$$

ersetzt werden. Die dritte Transformation bildet die z-Ebene durchaus konform ab, und zwar können die Koeffizienten so gewählt werden, dafs zwei beliebig vorgegebenen Punkten z_1 und z_2 in der w''-Ebene der Nullpunkt und der unendlich ferne Punkt entsprechen. Es braucht zu diesem Zwecke nur

$$az_1 + b = 0, \quad cz_2 + c = 0 \tag{24}$$

---

*) n ist eine beliebige gebrochene, positive Zahl. Auch negative n — die man aber vermeiden kann — bringen keine Schwierigkeit hervor.

gemacht zu werden. Ein Koeffizient bleibt noch willkürlich. Alle Kreise werden durch diese Transformation wieder als Kreise (resp. als Gerade) abgebildet. Insbesondere werden alle Kreise, welche durch z_1 und z_2 gehen, als Kreise abgebildet, welche durch den Nullpunkt und den unendlich fernen Punkt gehen, d. h. als Gerade, welche sich im Nullpunkte schneiden.

Die zweite Transformation bringt eine Abweichung von der Konformität in dem Nullpunkte und dem unendlich fernen Punkte hervor derart, dafs hier jeder Winkel durch den n-fachen ersetzt wird. Den Geraden, welche durch den Nullpunkt gehen, entsprechen wieder Gerade, den Kreisen, welche den Nullpunkt zum Mittelpunkte haben, die also auf jenen Geraden senkrecht stehen, entsprechen ebensolche Kreise. Durch die durchaus Konformität erzeugende erste Transformation werden dann bei geeigneter Wahl der Koeffizienten (entsprechend (24)) der Nullpunkt und der unendlich ferne Punkt in zwei beliebige Punkte w_1 und w_2 übergeführt*). Nehmen wir alles zusammen, so erhalten wir das Resultat:

Die Transformation (22) kann so bestimmt werden (wobei noch zwei Koeffizienten willkürlich bleiben), dafs zwei vorgelegte Punkte der z-Ebene in zwei vorgelegte Punkte der w-Ebene transformiert werden derart, dafs alle Winkel an diesen Punkten eine vorgegebene proportionale Änderung erfahren. Alle durch die beiden Punkte der z-Ebene gehenden Kreise und die auf diesen normalen Kreise werden wieder als Kreise abgebildet. Aufser in den beiden Punktepaaren herrscht überall Konformität der Abbildung.

10. Die Gröfse n in (22) kann, wenn sonst die Koeffizienten entsprechend gewählt werden, auch unendlich grofs oder — was auf eine Umkehrung hinausläuft — unendlich klein sein. Wir gelangen dann zu einer Exponentialfunktion, resp. einem Logarithmus. Im einfachsten Falle ist

$$(25) \qquad w = u + iv = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

also

$$(26) \qquad u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

und

$$(27) \qquad u^2 + v^2 = e^{2x}, \quad \frac{v}{u} = \operatorname{tg} y.$$

Den Geraden $x =$ Const., d. h. den Parallelen zur y-Achse entsprechen daher in der w-Ebene Kreise, welche den Nullpunkt zum Mittelpunkte haben; den Geraden $y =$ Const. dagegen, die der x-Achse parallel

*) Da die beiden Winkel, unter denen sich zwei Kreise schneiden, gleich sind, so bilden die durch w_1 und w_2 gehenden Kreise in beiden Punkten die gleichen Winkel miteinander. Hierdurch sind alle Schwierigkeiten gehoben, welche etwa durch das Hereinziehen des unendlich fernen Punktes der w''-Ebene hervorgerufen werden könnten.

laufen, entsprechen Gerade, welche durch den Nullpunkt gehen. Einer Verschiebung der Geraden $y =$ Const. in der Richtung der x-Achse entspricht eine Drehung ihrer Abbildung um den Nullpunkt. Da $\operatorname{tg} y$ die Periode π besitzt, so zieht eine Verschiebung um π eine Drehung um einen Gestreckten (nach der die Gleichung der Geraden wieder die nämliche wird), also eine Verschiebung um 2π eine volle Umdrehung nach sich. Dafs die Drehung der Verschiebung proportional ist, geht aus der zweiten Gleichung (27) hervor, welche angiebt, dafs der Winkel (d. h. der entsprechende Bogen) der abgebildeten Geraden mit der x-Achse y gleich ist.

Es hat keine Schwierigkeit, durch Kombination von (25) mit linearen Transformationen, sowie $w = z^n$ eine Transformation zu erzeugen, welche eine Parallelverschiebung als eine Drehung von beliebiger Gröfse abbildet.

Die Abbildung durch den Logarithmus liefert selbstverständlich die Umkehrung der soeben besprochenen Abbildung durch die Exponentialfunktion.

§ 87.

Flüssigkeitsstrahlen.

1. Bei der stationären Bewegung, die wir jetzt betrachten wollen, mögen keine Kräfte wirken; ein Geschwindigkeitspotential möge vorhanden sein. Da bei der inkompressibeln Flüssigkeit $P = \frac{p}{\varepsilon}$ ist, so wird aus § 83, (2) hier

$$p = c - \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{1}$$

c ist hierin eine absolute Konstante; der eingeklammerte Ausdruck auf der rechten Seite stellt das Quadrat der Geschwindigkeit dar. Wir haben das wichtige Resultat:

Bewegt sich eine inkompressible Flüssigkeit stationär ohne Einwirkung einer Kraft, so ist der hydrodynamische Druck an irgend einer Stelle lediglich eine Funktion der daselbst vorhandenen Geschwindigkeit; er nimmt mit wachsender Geschwindigkeit ab.

Bei einer Bewegung, die parallel der xy-Ebene vor sich geht, vereinfacht sich (1) zu

$$p = c - \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\right]. \tag{2}$$

2. An die Gleichungen (1) und (2) ist eine Bemerkung von fundamentaler Bedeutung anzuknüpfen. Es folgt aus diesen Gleichungen, dafs für hinreichend grofse Geschwindigkeiten — der hierüber entscheidende Wert von c hängt von den Grenzbedingungen ab — der Druck p negativ wird. Wir hoben bereits in § 76, 5 hervor, dafs eine ideale Flüssigkeit bei negativem Drucke zerreifst. In Wirklichkeit findet infolge der Wirksamkeit molekularer Kräfte das Zerreifsen erst

bei einem negativen Drucke von gewisser Gröfse statt. Unter allen Umständen ist daran fest zu halten, dafs bei Überschreitung eines gewissen Grenzwertes in der Geschwindigkeit ein Zerreifsen statthaben mufs.

Wenn sich eine Flüssigkeit innerhalb einer andern so bewegt, dafs an der Grenzfläche die Kontinuität der Bewegung aufgehoben ist, so sagt man, dafs sie einen Flüssigkeitsstrahl bilde. Auch kann man von einem solchen sprechen, wenn die bewegte Flüssigkeit teilweise an den leeren Raum angrenzt. Im letzteren Falle mufs der Druck an der freien Oberfläche natürlich Null sein. Im ersteren Falle mufs an der Grenzfläche der Flüssigkeiten gerade der Druck statthaben, bei welchem das Zerreifsen eintritt. In jedem Falle ist an der Grenzfläche des Strahles gegen die umgebende Flüssigkeit oder den leeren Raum der Druck, also auch die Geschwindigkeit konstant.

3. Wir untersuchen nun die Bewegung einer Flüssigkeit parallel zur xy-Ebene, welche allen angeführten Bedingungen Genüge leistet, für die also die Gleichung (2) gilt; wir sprechen der Einfachheit wegen nur von einer Bewegung in der xy-Ebene. Die Grenzen der Flüssigkeit (hier Linien) sind dreierlei Art. Erstens giebt es feste Grenzen, welche zugleich Stromlinien sein müssen. Zweitens sind freie Grenzen vorhanden, in denen die Flüssigkeit an den leeren Raum angrenzt — auf diesen Fall können wir uns hier beschränken. Der Druck mufs auf diesen Linien gleich Null, die Geschwindigkeit konstant sein; bei geeigneter Wahl der Einheiten können wir letztere, was in der Folge stets geschehen soll, der Einheit gleich setzen. Endlich giebt es noch Grenzlinien der Flüssigkeit, an welchen ein bestimmtes oder zu bestimmendes Ein- oder Ausströmen stattfindet. Durch dieses vorgeschriebene Ein- und Ausströmen wird gewissermafsen eine Kraft, die sonst nicht als vorhanden angenommen wurde, ersetzt.

Ähnlich wie früher machen wir im voraus keine Annahmen über die Gestalt der Grenzen oder die Art des Ein- und Ausströmens; dagegen unterwerfen wir die Stromlinien und die in ihnen herrschenden Geschwindigkeiten gewissen Bedingungen. Durch geeignete Wahl derselben suchen wir mögliche Bewegungen zu konstruieren, welche wirklichen Verhältnissen möglichst nahe kommen.

4. Wir setzen nun

$$z = x + iy\,, \quad w = \varphi + i\psi\,; \tag{3}$$

x und y sind die Koordinaten des bewegten Flüssigkeitsteiles, φ und ψ aber, wie früher, das Geschwindigkeitspotential und die Gröfse, welche Konstanten gleich gesetzt die Gleichungen der Stromlinien liefert. Aus den Untersuchungen von § 86 ist ersichtlich, dafs man nur w als beliebige stetige Funktion von z zu wählen braucht, um — gewisse auszuschliefsende Punkte oder Flächenteile abgerechnet — für φ und ψ mögliche Werte zu erhalten.

Da in den Bedingungen die Geschwindigkeit eine wichtige Rolle

spielt, so müssen wir sie mit z und w in geeignete Beziehung zu setzen suchen. Es ist nach § 86, (4), (5), (6)

$$(4) \qquad \frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

also

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}$$

oder

$$(5) \qquad \left\{ \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}} \cdot \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}. \right.$$

Wir führen nun ein drittes Koordinatensystem ein — das der ζ-Ebene —, indem wir

$$(6) \qquad \frac{dz}{dw} = \zeta = \xi + i\eta = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

setzen; wir denken uns behufs späterer Vergleichung die ξ- und η-Achse der x- und y-Achse resp. parallel. Aus (5) folgt, dafs

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varrho &= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}, \\ \cos\vartheta &= \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}}, \quad \sin\vartheta = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2}} \end{aligned} \right.$$

ist. ϱ stellt also den reciproken Wert der Geschwindigkeit dar; zugleich ist es in der ζ-Ebene der Abstand des Punktes $\zeta = \xi + i\eta$ vom Nullpunkte.

5. Nunmehr operieren wir also mit drei Punktesystemen z, w, ζ, welche in drei verschiedenen Ebenen ausgebreitet sind. Durch das erste System $z = x + iy$ ist die wirkliche Bewegung dargestellt, während das letzte zu den Geschwindigkeiten in Beziehung steht. Das zweite System enthält die Gröfsen φ und ψ als Koordinaten.

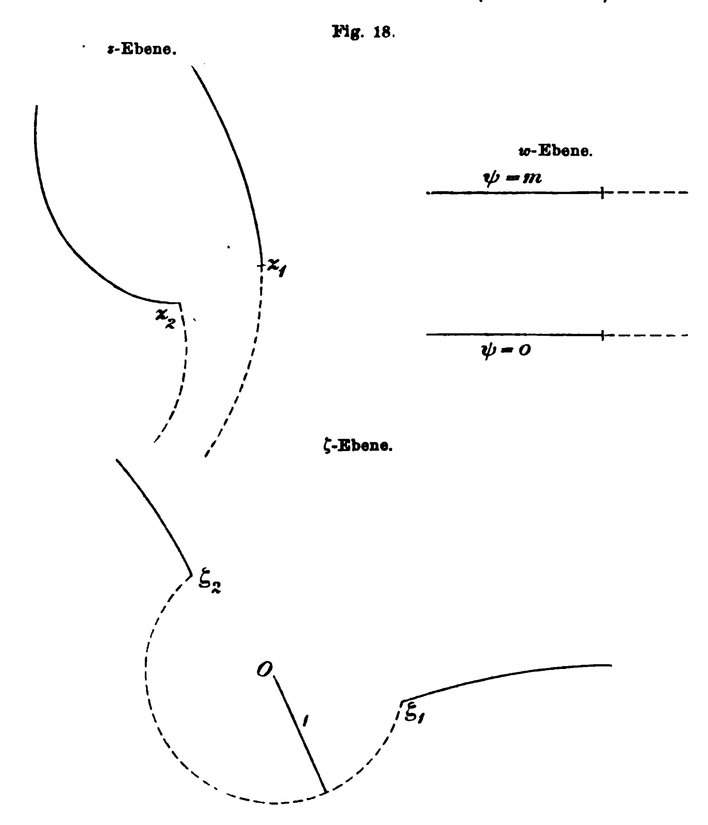
Bei dem ersten Spezialfalle, dessen Behandlung wir jetzt näher treten, mögen (Fig. 18) in der z-Ebene zwei Wandungen vorhanden sein, welche die Flüssigkeit begrenzen; dieselben mögen in den Punkten z_1 und z_2 endigen, zwischen denen also der Flüssigkeit der Austritt in den freien Raum gestattet ist. Im übrigen mögen sich der von der Flüssigkeit ganz erfüllte Raum sowie der austretende Strahl ins Unendliche erstrecken. Über die Gestalt der Grenzlinien und über die Zuflufsverhältnisse machen wir keine beschränkenden Annahmen, sondern suchen sie vielmehr den weiteren Ergebnissen entsprechend zu bestimmen. Die beiden festen

Grenzlinien müssen Stromlinien darstellen, die sich dann als die freien Grenzlinien des Strahles fortsetzen. Diese Stromlinien mögen die Gleichungen

$$(8) \qquad \psi = 0 \quad \text{und} \quad \psi = m$$

besitzen. Ferner mufs an den freien Grenzen $\varrho = 1$ sein, d. h. Teile der

Fig. 18.



beiden Geraden (8) in der w-Ebene müssen sich in der ζ-Ebene als ein Teil eines Kreises abbilden, der mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschrieben ist. Da an den festen Grenzen nicht gleichförmige Geschwindigkeit herrscht, so müssen sich andere Teile von (8) als andere Kurven darstellen, welche in den Punkten ζ_1 und ζ_2, die z_1 und z_2 entsprechen, an jenen Kreisbogen anstofsen.

Es handelt sich nun darum, eine Funktion $\zeta = f(w)$ aufzustellen, durch welche eine den Bedingungen genügende Abbildung der w-Ebene auf der ζ-Ebene vermittelt wird. Da verschiedene Teile der Geraden (8) in der ζ-Ebene durch verschiedene Kurven dargestellt werden sollen, die in ζ_1 und ζ_2 zusammenstofsen, so müssen diese beiden Punkte Verzweigungspunkte der Funktion $f(w)$ sein; es genügt, eine Verzweigung in zwei Äste anzunehmen. Da ferner Teile der beiden Geraden (8) als

derselbe Kreisbogen abgebildet werden sollen, so werden wir $f(w)$ als eine Funktion einer Exponentialfunktion $e^{\frac{\pi w}{m}}$ annehmen; denn

$$e^{\frac{\pi w}{m}} = e^{\frac{\pi}{m}(\varphi + i\psi)}$$

erhält für $\psi = 0$ und $\psi = m$ entgegengesetzte Werte, die demselben Kreise entsprechen (vgl. § 86, 10). Nach alledem entspricht die Beziehung, welche durch die Gleichung

$$(9) \qquad \left(\frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - \zeta_2}\right)^2 = \frac{ae^{\frac{\pi w}{m}} + b}{ce^{\frac{\pi w}{m}} + d}$$

festgesetzt wird, allen Bedingungen, wenn a, b, c, d geeignet bestimmt werden; ζ_1 und ζ_2 sind in der That Verzweigungspunkte. Die Koeffizienten a, b, c, d, welche drei unabhängige Gröfsen repräsentieren, sind bei gegebenem ζ_1 und ζ_2 durch die Bemerkung bestimmt, dafs die Gerade $\psi = 0$ als ein bestimmter Kreis, der also durch drei vorgelegte Punkte geht, abgebildet werden soll.

6. Besonders einfach gestaltet sich die Rechnung, wenn

$$(10) \qquad \zeta_1 = 1, \quad \zeta_2 = -1$$

angenommen wird. Setzen wir gleichzeitig $m = \pi$, so genügt die Gleichung

$$(11) \qquad \left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 = \frac{1 - e^w}{1 + e^w}$$

den Anforderungen. Für $\psi = 0$ wird nämlich e^w reell, und wir brauchen nur für drei reelle Werte von e^w zu zeigen, dafs sie drei Punkten des Kreises entsprechen, der in der ζ-Ebene mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschrieben wurde. Nun entsprechen sich aber

$$\begin{aligned} e^w &= 1, & \zeta &= 1 \\ e^w &= -1, & \zeta &= -1 \\ e^w &= \infty, & \zeta &= i, \end{aligned}$$

so dafs dem Verlangen genügt ist.

Aus (11) berechnen wir, wobei wir die Vorzeichen der Wurzeln so wählen wollen, dafs letztere für $e^w = 0$ in $+1$ übergehen,

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{\sqrt{1 + e^w} + \sqrt{1 - e^w}}{\sqrt{1 + e^w} - \sqrt{1 - e^w}} \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{1 - e^{2w}}}{2e^w} \end{aligned}$$

oder

$$(12) \qquad \zeta = e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}.$$

Aus (6) folgt

$$(13) \qquad z = \int \left[e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}\right] dw;$$

die Ausführung der Integration liefert, wenn dem Werte $\zeta = 1$ (also $e^w = 1$, $w = 0$) der Wert $z = -1$ zugeordnet wird*):

$$(14) \qquad z = -e^{-w} - \sqrt{e^{-2w} - 1} + \operatorname{arc\,tg} \sqrt{e^{-2w} - 1}.$$

Für $\psi = 0$ oder $\psi = \pi$ wird e^w reell; z wird (bei reellem w) reell, so lange $e^{-2\varphi} - 1 > 0$, d. h. $\varphi < 0$ ist. Für $\varphi > 0$ haben wir bei $\psi = 0$

$$z = x + iy = -e^{-\varphi} - i\sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \frac{i}{2}\log\frac{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}},$$

also

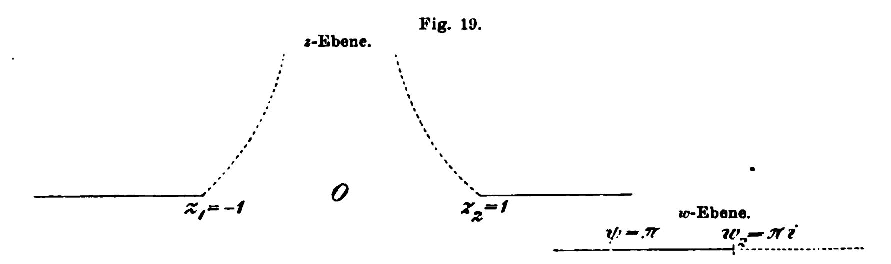
$$(15) \quad x = -e^{-\varphi}, \quad y = -\sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \tfrac{1}{2}\log\frac{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}$$

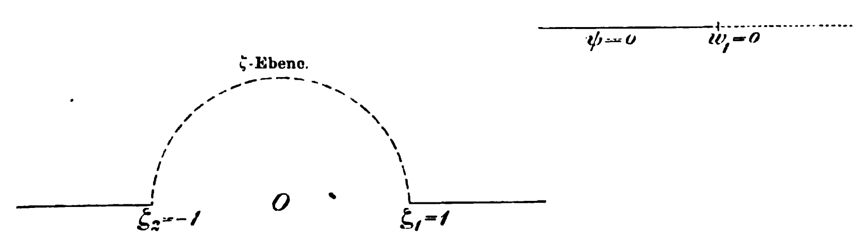
oder

$$(16) \qquad \begin{cases} y = -\sqrt{1 - x^2} - \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{1 + \sqrt{1 - x^2}} \\ \quad = -\sqrt{1 - x^2} + \log x - \log\left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right). \end{cases}$$

Da z für $\varphi < 0$ und $\psi = 0$ reell ist, so bildet die x-Achse eine feste Wand; dieselbe ist in dem Teile unterbrochen, der zwischen den

Fig. 19.





beiden Punkten liegt, für die $\zeta = \pm 1$ ist, d. h. zwischen den Punkten $z = \mp 1$ (Fig. 19). Da nach (16), wie leicht zu erweisen**), y für $\pm x < 1$

*) $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{e^{-2w} - 1}$ möge für $w = 0$ verschwinden.

**) Für $x^2 < 1$ ist $\sqrt{1 - x^2} = u < 1$. Wir haben nun $y = -u - \frac{1}{2}\log(1 - u) + \frac{1}{2}\log(1 + u)$ oder, wenn bei den Logarithmen die bekannten Reihen-

positiv ist (bei positivem φ), so stellt die Bewegung ein Überströmen der Flüssigkeit von der unteren Ebenenhälfte, welche ganz angefüllt ist, in die obere Hälfte, wo nur ein Strahl entsteht, dar. Die Gestalt des Strahles ist durch die Gleichung (16) gegeben, da die Grenze $\psi = \pi$ zu der untersuchten symmetrisch verläuft. Wie zu erwarten, wird für $x = \pm 1$ $y = 0$, d. h. der Strahl hat bei seinem Austritt aus der Öffnung die volle Breite der letzteren. Für verschwindend kleine x nähert sich y dem Unendlichen. Der Strahl verschmälert sich fortwährend, um im Unendlichen unendlich schmal zu werden.

Bekanntlich zeigt die Beobachtung, dafs beim Austritt eines Strahles durch eine Wandöffnung eines Gefäfses stets die sog. *contractio venae* eintritt, d. h. dafs der Durchschnitt des Strahles kleiner ist als die Öffnung. Doch ist diese Kontraktion keine unbegrenzte, so dafs das hier gefundene Resultat sich mit der Wirklichkeit sehr mangelhaft deckt.

7. Einen besseren, wenn auch nicht vollständigen Erfolg in Bezug auf die Bestimmung der *contractio venae*, bietet die folgende Abbildungsgleichung:

$$\left(\frac{\sqrt{\zeta}+\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta}-\sqrt{i}}\right)^2 = \frac{1+e^w}{1-e^w}. \tag{17}$$

Dieselbe liefert für irgend zwei der φ-Achse parallele Gerade im Abstande π dieselbe Abbildung. Die Verzweigungspunkte ziehen sich in den einzigen Punkt i zusammen. Es entsprechen sich die Punkte

$$\begin{aligned} e^w &= \pm 1, & \zeta &= i, \\ e^w &= \infty, & \zeta &= -i, \\ e^w &= 0, & \zeta &= \infty. \end{aligned}$$

Hieraus geht hervor, dafs ein Teil der Achse der reellen Zahlen in der w-Ebene als Kreis mit dem Radius 1 in der ζ-Ebene abgebildet wird; denn drei Punkten jener Achse entsprechen drei Punkte dieses Kreises — darunter zwei zusammenfallende. Aufserdem erscheint noch die η-Achse, vom Punkte $\zeta = i$ ab bis ins positiv Unendliche, als Abbildung eines Teiles jener Achse (wie aus (18) ersichtlich).

Wir berechnen aus (17), wobei wir das Vorzeichen der Wurzeln im rechtsstehenden Bruche wie in der vorigen Aufgabe festsetzen,

$$\sqrt{\zeta} = \sqrt{i}\,\frac{\sqrt{1+e^w}+\sqrt{1-e^w}}{\sqrt{1+e^w}-\sqrt{1-e^w}}$$

oder

$$\zeta = i\left(2e^{-2w} - 1 + 2e^{-w}\sqrt{e^{-2w}-1}\right), \tag{18}$$

woraus nach (6) folgt*)

---

entwicklungen vorgenommen werden, $y = \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + \cdots$, also $y > 0$, falls bei $\sqrt{1-x^2}$ das positive Zeichen gewählt wird. Dies entspricht aber der oben gemachten Festsetzung.

*) Der Logarithmus möge für $w = 0$ verschwinden.

$$(19)\quad \begin{cases} z = \int\limits_0^w \zeta\, dw = -i\left[e^{-2w} + w - 1 + e^{-w}\sqrt{e^{-2w} - 1}\right. \\ \qquad\qquad \left. - \log\left(e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}\right)\right]. \end{cases}$$

Bei dieser Wahl der Grenzen wird für $w = 0$, resp. $w = \pi i$, also $\zeta = i$, $z = 0$, resp. $z = 2\pi$, wenn $\log 1 = 0$ angenommen wird.

Für $\psi = 0$, $\varphi < 0$ wird

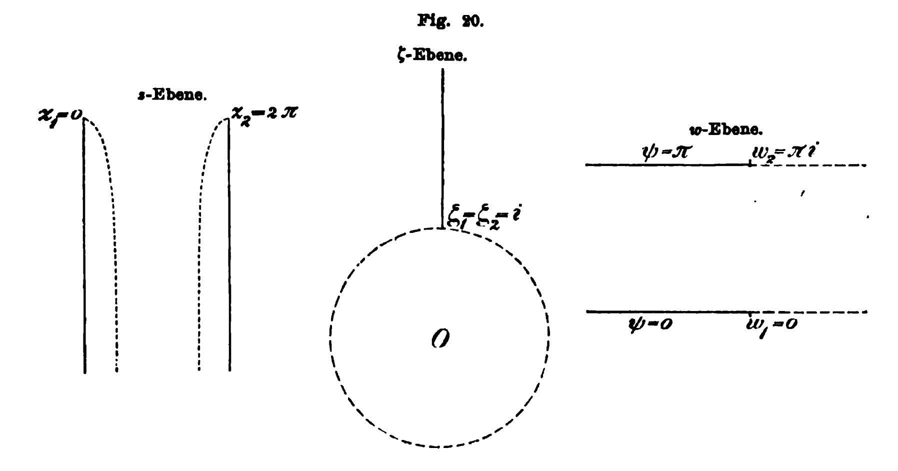
$$(20)\quad \begin{cases} x = 0, \\ y = -\left[e^{-2\varphi} + \varphi - 1 + e^{-\varphi}\sqrt{e^{-2\varphi} - 1} - \log\left(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}\right)\right]; \end{cases}$$

für $\psi = \pi$, $\varphi < 0$ aber

$$(21)\quad \begin{cases} x = 2\pi, \\ y = -\left[e^{-2\varphi} + \varphi - 1 + e^{-\varphi}\sqrt{e^{-2\varphi} - 1} - \log\left(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi} - 1}\right)\right]. \end{cases}$$

Durch die Gleichungen (20) und (21) sind die beiden festen Wände dargestellt; dieselben sind die negative y-Achse und eine Parallele zu ihr im Abstande 2π (Fig. 20). Die Flüssigkeitsbewegung stellt ein

Fig. 20.



Strömen im unendlichen Raume von der negativen zur positiven y-Richtung dar; nur der Raum zwischen den beiden festen Wänden ist von der zusammenhängenden Bewegung ausgeschlossen; in ihn ergieſst sich ein Strahl, dessen Grenzen wir erhalten, wenn wir $\psi = 0$ und $\psi = \pi$, aber $\varphi > 0$ annehmen. Wegen der herrschenden Symmetrie brauchen wir nur die erste Grenze zu untersuchen; wir finden*)

$$(22)\quad \begin{cases} x = e^{-\varphi}\sqrt{1 - e^{-2\varphi}} + \arccos e^{-\varphi}, \\ y = -e^{-2\varphi} - \varphi + 1. \end{cases}$$

*) Es ist nämlich, wenn $e^{-\varphi} = \cos\chi$ gesetzt wird, $\log\left(e^{-\varphi} + i\sqrt{1 - e^{-2\varphi}}\right) = \log(\cos\chi + i\sin\chi) = \log e^{i\chi} = i\chi = i \arccos e^{-\varphi}$.

Für $\varphi = \infty$ wird $y = -\infty$, $x = \frac{\pi}{2}$; der Strahl, dessen Breite immer abnimmt, besitzt im Unendlichen daher noch die Breite π, also die Hälfte der Breite des Kanals. Auch in diesem Fall ist die *contractio venae* stärker, als die in Wirklichkeit bei freilich anderem Arrangement beobachtete.

8. Einen bemerkenswerten Strömungsvorgang liefert uns noch die rein algebraische Funktionalbeziehung

$$\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{w}}{1-\sqrt{w}} \tag{23}$$

oder

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{w}} + \sqrt{\frac{1}{w} - 1}, \tag{24}$$

worin wir für reelle, positive w, die unterhalb 1 liegen, beiden Wurzeln das gleiche Zeichen geben wollen. Aus (6) folgt

$$z = \int^{\text{s}} \zeta\, dw = 2\sqrt{w} + \sqrt{w - w^2} + \text{arc sin}\sqrt{w}. \tag{25}$$

Das letzte Glied möge für $w = 0$ verschwinden.

Da

$$\begin{aligned} \zeta &= 1, & \sqrt{w} &= 1, \\ \zeta &= -1, & \sqrt{w} &= -1, \\ \zeta &= i, & \sqrt{w} &= \infty \end{aligned}$$

einander entsprechen, so wird der Kreis, welcher in der ζ-Ebene mit dem Radius 1 um den Nullpunkt beschrieben ist, in der Ebene, welche $\sqrt{w}$ entspricht, und daher auch in der w-Ebene selbst als die Achse der reellen Zahlen, resp. als ein Teil derselben abgebildet; er entspricht also teilweise $\psi = 0$. Leicht überzeugt man sich, daſs die obere Hälfte des Kreises in der ζ-Ebene, welche allein verwandt zu werden braucht, den Teilen der φ-Achse entspricht, welche aufserhalb der Grenzen $0 < \varphi \leq 1$ liegen. Der Teil der φ-Achse innerhalb dieser Grenzen bildet sich in der ζ-Ebene durch diejenigen Teile der ξ-Achse ab, welche aufserhalb der Grenzen $-1 \leq \xi \leq 1$ liegen.

Für $\psi = 0$ wird aus (25)

$$z = 2\sqrt{\varphi} + \sqrt{\varphi - \varphi^2} + \text{arc sin}\sqrt{\varphi}, \tag{26}$$

und diese Gröſse ist reell für

$$0 \leq \varphi < 1, \tag{27}$$

einer Ungleichheit, der

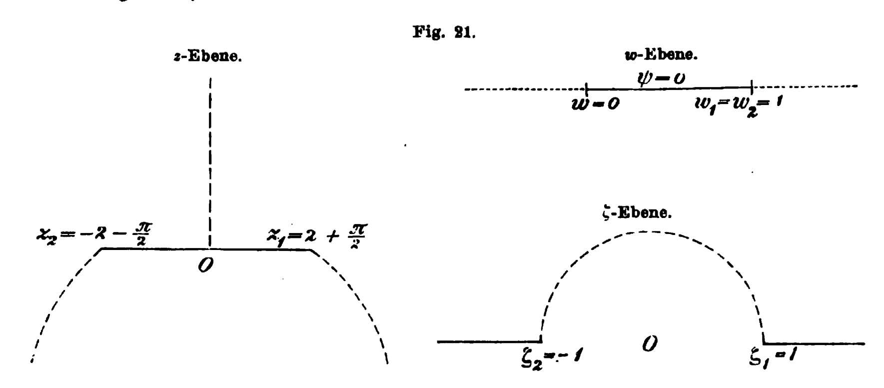
$$0 \leq x \leq 2 + \frac{\pi}{2}$$

entspricht, oder vielmehr, da auf der rechten Seite von (26) auch negative Zeichen zulässig sind,

$$(28) \qquad -2-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2+\frac{\pi}{2}.$$

Die feste Wand wird hier also durch eine einzige Gerade gebildet (Fig. 21), welche sich auf der x-Achse von $-2-\frac{\pi}{2}$ bis $2+\frac{\pi}{2}$ erstreckt, also die Länge $4+\pi$ besitzt.

Fig. 21.



Die freie Grenze erhalten wir, wenn wir in (26) solche φ eintreten lassen, die (27) nicht genügen. Für negative φ wird z rein imaginär, repräsentiert also die Hälfte der y-Achse, die wir als die positive betrachten wollen. Für $\varphi > 1$ hat die Trennung von Reellem und Imaginärem keine Schwierigkeit. Die Flüssigkeit strömt in der Richtung der negativen y-Achse gegen die feste Wand, um sich hier in zwei Zweige zu teilen.

§ 88.

Bewegung eines festen Körpers in einer Flüssigkeit.

1. Wir haben in § 84, 5, 6 Flüssigkeitsbewegungen kennen gelernt, bei denen ein festes Ellipsoid, resp. eine Kugel in Ruhe blieb, während in unendlicher Entfernung von demselben die Flüssigkeit mit der gleichmäfsigen Geschwindigkeit 1 in der Richtung der negativen z-Achse strömte. Denken wir uns nun, dafs die Flüssigkeit im Unendlichen in Ruhe sei, während der eingetauchte Körper sich mit der Geschwindigkeit 1 in der Richtung der positiven z-Achse bewegt, so bleibt die relative Bewegung die gleiche. So liefert uns die angeführte Untersuchung zugleich die Bewegung, welche eine mit gleichmäfsiger Geschwindigkeit in gerader Linie in der Richtung einer seiner Hauptachsen verschobenes Ellipsoid, resp. eine Kugel, in einer an sich ruhenden Flüssigkeit hervorruft.

2. Um die allgemeinere Frage zu erledigen: „Welcher Bewegungszustand wird in einer Flüssigkeit durch irgend welche eingetauchte, bewegte oder ruhende feste Körper hervorgerufen,“ müssen wir einen direkteren Weg wählen. Die soeben benutzte Über-

tragung ist nicht mehr anwendbar, wenn Drehungen der Körper vorkommen oder wenn mehrere Körper vorhanden sind, welche sich nicht gegeneinander im Zustande relativer Ruhe befinden.

Um die Bewegung des festen Körpers darzustellen, nehmen wir wie in § 52 aufser dem im Raume festen Koordinatensysteme x, y, z ein zweites ξ, η, ζ an, welches im Körper fest ist; beide Systeme seien durch die Gleichungen § 52, (1) ff. verknüpft. Die unendlich kleine Verschiebung, welche ein Punkt des Körpers gegen das feste System erleidet, wenn die Lage unendlich wenig geändert wird, ist durch § 52, (11) dargestellt. Lassen wir an Stelle der möglichen Bewegung sofort die wirkliche treten und setzen abkürzend

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{da}{dt} = u, & \dfrac{db}{dt} = v, \quad \dfrac{dc}{dt} = w, \\ \dfrac{d\alpha}{dt} = p, & \dfrac{d\beta}{dt} = q, \quad \dfrac{d\gamma}{dt} = r, \end{cases}$$

so erhalten wir für die Geschwindigkeitskomponenten eines Punktes des festen Körpers, dessen Koordinaten im Raume zur Zeit t x, y, z sind,

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u + (z - c)q - (y - b)r, \\ \dfrac{dy}{dt} = v + (x - a)r - (z - c)p, \\ \dfrac{dz}{dt} = w + (y - b)p - (x - a)q. \end{cases}$$

Wir machen nun wieder die Annahme, dafs ein Geschwindigkeitspotential φ der Flüssigkeitsbewegung vorhanden sei, aufserdem aber noch, dafs der von der Flüssigkeit erfüllte Raum einfach zusammenhängend, φ also eindeutig sei. Soll sich die Flüssigkeitsbewegung mit der gegebenen Bewegung des festen Körpers vertragen — wir nehmen für den Augenblick nur das Vorhandensein eines solchen an —, so mufs an der Oberfläche des Körpers die nach der augenblicklichen Normalen genommene relative Geschwindigkeitskomponente verschwinden. Bezeichnet n die vom Körper aus nach aufsen gerichtete Normale, so mufs

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = [u + (z - c)q - (y - b)r] \cos(n, x) \\ \qquad + [v + (x - a)r - (z - c)p] \cos(n, y) \\ \qquad + [w + (y - b)p - (x - a)q] \cos(n, z) \end{cases}$$

sein.

Die Funktion φ mufs, aufser der Bedingung (3), auch in dem von der Flüssigkeit erfüllten Raume die Gleichung $\Delta\varphi = 0$ befriedigen, aufserdem, wie schon vorausgesetzt, dort überall eindeutig sein. Weiter wollen wir φ als stetig in diesem Raume annehmen, und $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$ mögen im Unendlichen verschwinden, d. h. die Flüssigkeit möge im Unendlichen ruhen. Nach bekannten Sätzen über das Potential (§ 44, 3)

ist dann φ eindeutig bis auf eine additive Konstante bestimmt; wir können willkürlich annehmen, dafs es im Unendlichen den Wert Null erhalten möge.

3. Um nun den Ausdruck für φ abzuleiten, machen wir (nach Kirchhoff) die Annahme, dafs

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6 \tag{4}$$

sei. Die Gröfsen u, v, w, p, q, r sind hierin, weil die Bewegung des Körpers gegeben ist, lediglich als Funktionen der Zeit t aufzufassen. Schreiben wir nun vor, dafs die φ_α sämtlich der Gleichung $\Delta\varphi_\alpha = 0$ genügen und dafs sie nebst ihren Derivierten nach x, y, z im Unendlichen verschwinden, so sind sie eindeutig bestimmt und liefern das richtige φ, wenn ihnen nur noch, (3) entsprechend, die Bedingungen

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \cos(n, x), \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \cos(n, y), \quad \frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \cos(n, z),\\
&\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = (y - b)\cos(n, z) - (z - c)\cos(n, y),\\
&\frac{\partial\varphi_5}{\partial n} = (z - c)\cos(n, x) - (x - a)\cos(n, z),\\
&\frac{\partial\varphi_6}{\partial n} = (x - a)\cos(n, y) - (y - b)\cos(n, x)
\end{aligned}\right. \tag{5}$$

auferlegt werden. Hiermit ist zugleich die Zulässigkeit der gemachten Annahme erwiesen.

4. Sind n bewegte Körper gegeben, so mag der Körper α die Bewegungskomponenten $u_\alpha, v_\alpha, w_\alpha, p_\alpha, q_\alpha, r_\alpha$ besitzen. Wir setzen dann

$$\varphi = \sum^\alpha u_\alpha\varphi_{\alpha 1} + v_\alpha\varphi_{\alpha 2} + w_\alpha\varphi_{\alpha 3} + p_\alpha\varphi_{\alpha 4} + q_\alpha\varphi_{\alpha 5} + r_\alpha\varphi_{\alpha 6}$$

und haben den $\varphi_{\alpha\beta}$, aufser der Erfüllung der Gleichung $\Delta\varphi_{\alpha\beta} = 0$ und der Anforderung im Unendlichen noch die $6n$ Bedingungen

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_{\alpha 1}}{\partial n_\alpha} = \cos(n_\alpha, x) \text{ u. s. w.},\\
&\frac{\partial\varphi_{\alpha 4}}{\partial n_\alpha} = (y - b_\alpha)\cos(n_\alpha, z) - (z - c_\alpha)\cos(n_\alpha, y) \text{ u. s. w.}
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

aufzuerlegen.

5. Wir wollen diese Methode, wenigstens teilweise, zur Aufstellung des Geschwindigkeitspotentials anwenden, welches der durch eine beliebig bewegte Kugel vom Radius R in einer im Unendlichen unbewegten Flüssigkeit hervorgerufenen Bewegung entspricht. Da eine Drehung der Kugel auf die Bewegung einer nicht reibenden Flüssigkeit ohne Einflufs ist, so brauchen wir φ nur in der Form

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 \tag{7}$$

anzunehmen.

Nach § 84, (17) haben wir als Geschwindigkeitspotential bei einer ruhenden Kugel, deren Mittelpunkt a, b, c ist,

$$(8)\qquad \varphi = -\left(\frac{R^3}{2r^3} + 1\right) z = \frac{R^3}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - z,$$

worin

$$(9)\qquad r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

zu setzen ist. Die Geschwindigkeit ist im Unendlichen der Einheit gleich und besitzt die Richtung der negativen z-Achse. Denken wir uns nun die Flüssigkeit im Unendlichen ruhend, den Mittelpunkt der Kugel aber mit der Geschwindigkeit 1 in der Richtung der positiven z-Achse bewegt, so ist in (8) das Geschwindigkeitspotential um z zu vermehren, da dies einer Vermehrung der Geschwindigkeit in der Richtung der positiven z-Achse um 1 entspricht. Stellen wir schliefslich das Potential für den Fall auf, dafs die Geschwindigkeit des Kugelmittelpunktes in der Richtung der positiven z-Achse w ist, so erhalten wir

$$w \frac{R^3}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}.$$

Indem wir dasselbe Verfahren auf die Bewegung nach den beiden andern Koordinatenachsen anwenden, finden wir

$$(10)\qquad \varphi = \frac{R^3}{2}\left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right),$$

worin u, v, w, a, b, c als gegebene Funktionen von t zu betrachten sind. Führen wir das System ξ, η, ζ wieder ein, dessen Nullpunkt der Kugelmittelpunkt ist und dessen Achsen der x, y, z-Achse resp. parallel bleiben, so kann statt (10)

$$(11)\qquad \varphi = \frac{R^3}{2}\left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} + v \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \eta} + w \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \zeta}\right)$$

geschrieben werden, worin jetzt

$$(12)\qquad r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

ist, so dafs nur noch u, v, w von der Zeit abhängen.

6. Bisher nahmen wir die Bewegung des festen Körpers als eine gegebene an und untersuchten die durch sie verursachte Bewegung der Flüssigkeit. Nun kann weiter die Frage aufgeworfen werden: Welche Bewegung führt ein fester Körper, auf den gegebene Kräfte wirken, in einer Flüssigkeit aus, die ebenfalls gegebenen Kräften unterworfen sein kann? Häufig wird es vorteilhaft sein die Fragestellung umzukehren und die Aufgabe so zu formulieren: Welche Kräfte sind nötig, um einem Körper eine vorgeschriebene Bewegung in einer Flüssigkeit zu erteilen?

Man kann die Aufgabe allgemein in Angriff nehmen, indem man die Drucke der Flüssigkeit auf die einzelnen Teile der Körperoberfläche in Rechnung bringt und den übrigen Kräften beifügt. Andrerseits giebt es ein von Thomson und Tait begründetes, von Kirchhoff weiter ausgebildetes allgemeines Verfahren, welches die Theorie der Hamilton'schen Differentialgleichungen benutzt. Wir beschränken uns auf eine direkte Behandlung des einfachsten Falls: die Bewegung einer Kugel, deren Schwerpunkt mit ihrem Mittelpunkte zusammenfällt, bei der also auf Rotationen keine Rücksicht zu nehmen ist, in einer Flüssigkeit zu untersuchen.

7. Zunächst möge sich die Kugel mit der Geschwindigkeit 1 in der Richtung der z-Achse bewegen; Kräfte mögen keine in Wirksamkeit sein. Wir untersuchen, welche Drucke dann die einzelnen Teile der Kugeloberfläche erfahren; dabei können wir uns wieder die Kugel als ruhend, die Flüssigkeit aber in entgegengesetzter Richtung bewegt denken, also die Resultate von § 84, 6 verwenden. Die Gleichung § 83, (2) liefert hier, wo $U = 0$ und φ von der Zeit unabhängig ist, das schon in § 87 aufgestellte Resultat

$$(13) \qquad p = c - \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right].$$

Der Druck ist also hier, wo keine Kräfte wirken und ε konstant ist, lediglich eine Funktion der Geschwindigkeit.

Aus § 84, (18) ist aber ersichtlich, dafs das Quadrat der Geschwindigkeit in Punkten, welche sich nur durch das Vorzeichen von z unterscheiden, die also zur xy-Ebene symmetrisch liegen, das gleiche ist. Ebenso herrscht für alle Punkte, welche zur z-Achse die gleiche Lage haben, vollständige Symmetrie. Das Gleiche gilt nach (13) für die Druckkräfte. Ohne weitere Rechnung sehen wir daher ein, dafs sich die Druckkräfte, welche auf die Kugeloberfläche wirken, gegenseitig das Gleichgewicht halten. So finden wir das fast befremdlich erscheinende Resultat:

Bewegt sich eine Kugel ohne Einwirkung von Kräften mit einer gegebenen Anfangsgeschwindigkeit in einer unendlich ausgedehnten, idealen, inkompressibeln, im Unendlichen ruhenden und keine Rotationen aufweisenden Flüssigkeit, so behält sie ihre Geschwindigkeit der Gröfse und Richtung nach bei. Die Flüssigkeit übt also auf die Bewegung gar keinen Einflufs aus, sofern sie nur die Kugel von Anfang an umgab.

Infolge der Reibung stimmen die wirklichen Beobachtungen mit diesem theoretischen Resultate keineswegs überein. Auch ist zu beachten, dafs bei einer begrenzten Flüssigkeit das Resultat je nach ihrer Ausdehnung kleinere oder gröfsere Modifikationen erfährt.

8. Es sei nun die Bewegung der Kugel eine beliebig gegebene, und die hierdurch indizierten Druckkräfte seien gesucht. An Stelle von (13) tritt hier, da φ von t abhängig ist, nach § 83, (2)

$$(14)\qquad p = c - \frac{\varepsilon}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] - \varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Dieser Druck kann in zwei Teile zerlegt werden, von denen der erste mit (13) identisch ist, also auf die Bewegung der Kugel keinen Einfluſs übt, während der zweite durch

$$(15)\qquad p' = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

dargestellt wird. Durch Benutzung von (11) wird aus (15)

$$(16)\qquad p' = -\frac{R^3\varepsilon}{2}\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi} + \frac{dv}{dt}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta} + \frac{dw}{dt}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\right);$$

der wirksame Teil des Druckes hängt also von $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$, d. h. von den Komponenten der Beschleunigung des Kugelmittelpunktes ab.

Lassen wir die z-Achse mit der augenblicklichen Richtung der Gesamtbeschleunigung zusammenfallen, so reduziert sich (16) auf

$$(17)\qquad p' = -\frac{R^3\varepsilon}{2}\frac{dw}{dt}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta};$$

es genügt offenbar, die Wirkung der Druckkomponenten nach der z-Achse zu untersuchen, da der Symmetrie halber nach keiner anderen Richtung hin ein Druckeffekt erzielt wird. Die Komponente des Druckes nach der z-Achse wird für ein Oberflächenelement $d\omega$ durch Multiplikation von p' mit $\frac{\zeta}{R}d\omega$ erhalten; führen wir auſserdem in (17) die Differentiation nach ζ aus und setzen dann $r = R$, so finden wir für diese Komponente

$$(18)\qquad \frac{R^3\varepsilon}{2}\frac{dw}{dt}\frac{1}{R^2}\frac{\zeta^2}{R^2}d\omega = \frac{\zeta^2\varepsilon}{2R}\frac{dw}{dt}d\omega.$$

Die Summation über die Oberfläche der Kugel führen wir zunächst nach Zonen aus, deren Grundflächen auf der ζ-Achse senkrecht stehen; dann ist über alle Zonen zu summieren. Da der Flächeninhalt einer Zone von der Höhe $d\zeta$, in deren sämtlichen Elementen der Druck der gleiche ist, den Wert $2R\pi d\zeta$ hat, so erhalten wir für die gesamte Druckwirkung

$$(19)\qquad P = \pi\varepsilon\frac{dw}{dt}\int_{-R}^{+R}\zeta^2 d\zeta = \frac{2R^3\pi\varepsilon}{3}\frac{dw}{dt}.$$

Da $\frac{2R^3\pi\varepsilon}{3}$ die Hälfte der Masse ist, welche die mit der Flüssigkeit gefüllte Kugel besitzen würde, so haben wir das merkwürdige Resultat:

Bewegt sich eine Kugel in einer Flüssigkeit, so setzt letztere jeder Beschleunigung eine (im Mittelpunkte anzubringende) Kraft entgegen, die zu ihr entgegengesetzt gerichtet und dem

Produkte von ihr mit der halben Flüssigkeitsmasse gleich ist, welche die Kugel zu fassen vermag.

Bezeichnet Q die auf das Zentrum der Kugel wirkende Kraft ohne Rücksicht auf den Flüssigkeitsdruck, Q' die Kraft unter Berücksichtigung des Druckes, so mufs, wenn M die Masse der Kugel, m die Masse der gleichgrofsen Flüssigkeitskugel bezeichnet,

$$Q - Q' \frac{m}{2M} = Q' \tag{20}$$

also

$$Q' = \frac{QM}{M + \frac{m}{2}} \tag{21}$$

sein. Diese Relation läfst uns die Sache von einer andern Seite erblicken. Statt die auf den Körper wirkende **Kraft** zu ändern, können wir auch dessen **Masse** geändert denken. Wir ziehen aus (21) das folgende Resultat:

Bewegt sich eine feste Kugel, deren Schwerpunkt mit dem Mittelpunkte zusammenfällt, unter dem Einflufs einer in den Mittelpunkt zu verlegenden Kraft, so ist die Bewegung gleich derjenigen, welche die Kugel im freien Raume ausführen würde, wenn ihre Masse um die Hälfte der ihren Raum einnehmenden Flüssigkeitsmasse vergröfsert würde.

Die Bewegung einer Kugel in einer homogenen, unendlichen, nicht reibenden, nicht rotierenden, keiner Kraft unterworfenen Flüssigkeit wird durch letztere also nur insoweit beeinflufst, als die Flüssigkeit mit in Bewegung gesetzt, die bewegte Masse also vergröfsert wird. Ist die Bewegung einmal eingeleitet, so schreitet sie ungestört weiter fort, woraus sich das Bestehenbleiben des Beharrungsgesetzes erklärt.

9. Um die Bewegung einer Kugel der geforderten Art unter Einflufs der Schwerkraft in einer **schweren** Flüssigkeit zu ermitteln, müssen wir noch das Ergebnis von § 78, 3 mit in Betracht ziehen. Die Schwere der Flüssigkeit macht sich auf den völlig eingetauchten Körper in der Weise geltend, dafs ein **Auftrieb** mit einer Kraft stattfindet, welche der auf eine Flüssigkeitskugel vom Volumen der untersuchten wirkenden Schwerkraft gleich und entgegengesetzt ist. Daher wirkt auf die Kugel in vertikal absteigender Richtung die Kraft

$$gM - gm,$$

und die erzielte Beschleunigung des Mittelpunktes wird nach dem Vorhergehenden durch

$$g \frac{M - m}{M + \frac{m}{2}} \tag{22}$$

dargestellt. Also:

Eine in eine unendlich ausgedehnte, schwere u. s. w. Flüssigkeit eingetauchte Kugel der oben beschriebenen Art bewegt

sich unter dem Einflufs der Schwerkraft wie im freien Raume, wenn man nur die Beschleunigung g der Schwerkraft mit

$$\frac{M-m}{M+\frac{m}{2}} \tag{23}$$

multipliziert.

Ist die Flüssigkeit reines Wasser vom spezifischen Gewichte 1, während die Kugel das spezifische Gewicht s besitzt, so geht (23) in

$$\frac{s-1}{s+\frac{1}{2}} = 1 - \frac{3}{2s+1} \tag{24}$$

über. Ist $s < 1$, so bewegt sich die Kugel aufwärts; bei $s = 1$ bewegt sie sich wie ohne Einflufs einer Kraft.

§ 89.

Die Wirbelbewegung*).

1. In § 82 teilten wir sämtliche Flüssigkeitsbewegungen, die entweder ohne Wirkung einer Kraft oder solcher Kräfte, die eine Kräftefunktion besitzen, entstehen, in zwei Klassen ein: die Bewegungen ohne Rotation, bei denen ein Geschwindigkeitspotential auftritt, und die Bewegungen mit Rotation, bei denen kein solches vorhanden ist. Nachdem wir in den vorhergehenden Paragraphen nur Bewegungen der ersten Klasse untersucht haben, wenden wir uns jetzt der Behandlung der zweiten Klasse zu.

Bezeichnen wir die Komponenten der Drehung eines Flüssigkeitsteilchens mit ξ, η, ζ, so haben wir nach § 82, (8)

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \varepsilon\left(A\frac{\partial x}{\partial a} + B\frac{\partial x}{\partial b} + C\frac{\partial x}{\partial c}\right), \\ \eta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \varepsilon\left(A\frac{\partial y}{\partial a} + B\frac{\partial y}{\partial b} + C\frac{\partial y}{\partial c}\right), \\ \zeta &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \varepsilon\left(A\frac{\partial z}{\partial a} + B\frac{\partial z}{\partial b} + C\frac{\partial z}{\partial c}\right); \end{aligned}\right. \tag{1}$$

die Gröfsen A, B, C sind von a, b, c — den Gröfsen, welche einen Punkt der Flüssigkeit fixieren — abhängig, von der Zeit aber unabhängig.

*) Die Theorie der Wirbelbewegung ist eine Errungenschaft der neuesten Zeit. Obgleich bereits früher Svanberg einige Sätze herleitete, so wurde doch die Wirbeltheorie erst durch die wichtige Untersuchung von v. Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, Ges. Werke, B. 1, p. 101, recht eigentlich begründet. Thomson glaubte hieran eine eigenartige Atomtheorie anknüpfen zu können. Wichtige Arbeiten über den Gegenstand wurden von Beltrami, Gröbli, Hankel, Kirchhoff, Veltmann u. A. geliefert. Eine ausführliche Übersicht der Theorie und ihrer Litteratur findet man bei Auerbach, die theoretische Hydrodynamik.

In § 82 wurde bereits bewiesen, dafs ein Teilchen, welches in irgend einem Momente nicht rotiert, überhaupt nie rotiert. Bezeichnen a, b, c speziell — was in der Folge angenommen werden soll — die Koordinaten des Flüssigkeitspunktes zur Zeit $t = t_0$, so sind nach § 82 εA, εB, εC die Drehungskomponenten für die Zeit t_0.

Die folgenden Entwicklungen gelten auch für kompressible Flüssigkeiten.

2. Bevor wir auf weitere Untersuchungen über die Drehung der Flüssigkeitsteilchen eingehen, wollen wir uns von dem Drehungsvorgange selbst ein klares Bild zu machen suchen. Ein Flüssigkeitsteilchen kann, abgesehen von einer Deformation, eine Lagenänderung erleiden; letztere kann man, wie aus den Untersuchungen von § 51 hervorgeht, in eine Rotation um eine durch das Teilchen selbst gehende Achse und eine Translation zerlegen. In Bezug auf die Rotationen der einzelnen Teilchen einer Flüssigkeitsmasse sind nun sehr verschiedene Vorkommnisse möglich. Denken wir uns einen Cylinder von kreisförmiger Basis mit Flüssigkeit gefüllt und dann ohne Änderung der gegenseitigen Lage der Flüssigkeitsteilchen um seine Achse gedreht, so haben alle Teilchen eine Rotation erfahren*), deren Achse man sich in das Teilchen selbst (unter Hinzunahme einer Translation) verlegt denken mufs.

Aber es kommt auch sehr häufig vor, dafs nur in einzelnen Linien Rotation herrscht. In einem ringförmigen Raume kann eine Flüssigkeit fliefsen, ohne dafs ein Teilchen eine Rotation ausführt und ohne dafs hierdurch eine Diskontinuität einzutreten brauchte. Denkt man sich aus dem obigen Cylinder einen kleineren Cylinder mit derselben Achse ausgeschnitten, so kann in dem entstehenden Cylinderringe sich die Flüssigkeit ohne Rotation bewegen. Nun lasse man den inneren Cylinder immer schmäler werden, bis er sich auf die Achse selbst zusammenzieht. An der inneren Ringfläche ist dann notwendigerweise die Bewegung der Flüssigkeit gegen die feste Wand diskontinuierlich. Fällt der innere Cylinder ganz weg, ohne dafs die Bewegung in den schon bestehenden Teilen eine Änderung erfährt, so können die Teilchen der Achse selbst unmöglich in Ruhe bleiben, wenn keine Diskontinuität eintreten soll; es kann hier nur eine Drehung stattfinden. Hier ist also nur eine Linie der Rotation vorhanden, und ähnlich verhält es sich in anderen Fällen. Natürlich kann man sich immer dann, wenn nicht die ganze Flüssigkeit von der Rotation ergriffen ist, die nicht rotierenden Teile abgesondert denken; für sie mufs dann ein Flüssigkeitspotential bestehen. Die Linien der Drehung spielen hier eine ähnliche Rolle, wie im allgemeinen bei stetigen Funktionen die Unstetigkeitspunkte; wir werden bei speziellen Beispielen sehen, dafs die Rotationsgeschwindigkeit in solchen isolierten Linien der Drehung als unendlich betrachtet werden mufs.

---

*) Hiermit soll nicht ausgesprochen sein, dafs es überhaupt möglich ist, gerade diese Bewegung hervorzurufen.

3. Wir betrachten nun zwei unendlich benachbarte Punkte, welche so gelegen sind, dafs zur Zeit t_0 ihre Verbindungslinie mit der Rotationsachse zusammenfällt. Ihre Koordinaten seien zur Zeit t_0: a, b, c und $a + da$, $b + db$, $c + dc$, also zur Zeit t: x, y, z und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$. Das Zusammenfallen von Verbindungslinie und Rotationsachse zur Anfangszeit wird durch die Doppelgleichung*)

$$da : db : dc = A : B : C \tag{2}$$

ausgedrückt, statt deren wir auch

$$da = kA, \quad db = kB, \quad dc = kC \tag{3}$$

schreiben können, worin k eine unendlich kleine, von t unabhängige Gröfse bedeutet. Führen wir die aus (3) folgenden Werte für A, B, C in (1) ein, so erhalten wir

$$\begin{cases} \xi = \frac{\varepsilon}{k}\left(\frac{\partial x}{\partial a}da + \frac{\partial x}{\partial b}db + \frac{\partial x}{\partial z}dc\right) = \frac{\varepsilon}{k}dx, \\ \eta = \frac{\varepsilon}{k}dy, \quad \zeta = \frac{\varepsilon}{k}dz, \end{cases} \tag{4}$$

also

$$dx : dy : dz = \xi : \eta : \zeta. \tag{5}$$

Diese Gleichungen sagen aus, dafs auch zur Zeit t die Verbindungslinie der Punkte mit der Rotationsachse zusammenfällt. Also:

Liegen zwei Flüssigkeitsteilchen zu irgend einer Zeit auf einer Rotationsachse, so liegen sie zu jeder Zeit auf einer solchen.

Von irgend einem rotierenden Flüssigkeitsteilchen können wir zu einem zweiten übergehen, welches zur Zeit t_0 auf der Rotationsachse des ersten liegt, von diesem zu einem dritten, welches sich auf der Rotationsachse des zweiten befindet u. s. w. So können wir eine zusammenhängende Linie konstruieren, deren Elemente zur Zeit t_0 die Rotationsachsen für die betreffenden Stellen bestimmen. Nach dem eben gefundenen Resultate behält die Linie andauernd diese Eigenschaft bei. Man nennt sie eine Wirbellinie:

Jede Wirbellinie behält ihre Eigenschaft als solche fortdauernd bei.

4. Sind die Wirbellinien nicht vereinzelt oder in einzelnen Flächen vorhanden, so kann man den Flüssigkeitsteil ins Auge fassen, der durch die Wirbellinien umgrenzt wird, welche durch die Punkte des Umfanges einer unendlich kleinen Fläche gelegt sind. Man nennt einen solchen Flüssigkeitsteil einen Wirbelfaden. Infolge der eben behandelten Eigenschaft der Wirbellinien besteht ein Wirbelfaden und insbesondere auch seine Oberfläche stets aus denselben Flüssigkeitselementen.

---

*) Die Richtungskosinus der Hauptdrehungsachse verhalten sich wie die Komponenten der Drehung (vgl. z. B. § 66 (3)).

Die Drehungsgeschwindigkeit zur Zeit t im Punkte x, y, z ist nach (4) durch

$$(6)\qquad \sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2} = \frac{\varepsilon}{k}\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}$$

dargestellt; sie ist dem Produkte der Dichtigkeit in den variabeln Abstand zweier unendlich benachbarten Punkte in der Wirbellinie proportional.

Nun denken wir uns aus einem Wirbelfaden ein unendlich kleines Stück durch zur Längsrichtung senkrechte Querschnitte von dem Flächeninhalte q ausgeschnitten; die Länge desselben sei l. Dann ist die mit der Zeit unveränderliche Masse des Fadenteiles $ql\varepsilon$. Jeder Änderung von $l\varepsilon$ entspricht daher eine ihr umgekehrt proportionale Änderung von q. Hieraus folgt der Satz:

Das Produkt der jeweiligen Drehungsgeschwindigkeit in den entsprechenden Querschnitt des Wirbelfadens ist bei einer inkompressibeln Flüssigkeit konstant.

Bei einfachen Wirbellinien behält nur der erste der beiden ausgesprochenen Sätze seine Gültigkeit.

5. Nach § 43, (4) ist bei der gewöhnlichen Bezeichnung für einen beliebig abgegrenzt gedachten Teil der Flüssigkeit

$$(7)\left\{\begin{aligned} \int\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)d\tau &= -\int[\xi\cos(n,x)+\eta\cos(n,y)+\zeta\cos(n,z)]\,ds \\ &= -\int\varkappa\cos(\varkappa,n)\,ds, \end{aligned}\right.$$

wenn $\varkappa$ gleichzeitig die Gröfse der Drehungsgeschwindigkeit und die Richtung der Drehungsachse bezeichnet. Da sich aber aus (1)

$$(8)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0$$

ergiebt, so folgt

$$(9)\qquad \int\varkappa\cos(\varkappa,n)\,ds=0.$$

Wir wenden dieses Resultat auf einen endlichen Teil eines Wirbelfadens an, welcher durch die zur Längsrichtung senkrechten Querschnitte q_1 und q_2 begrenzt wird; $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ mögen die Drehungsgeschwindigkeiten sein, welche diesen Querschnitten entsprechen. Für den einen dieser Querschnitte ist $\cos(\varkappa, n) = 1$, für den andern $= -1$; für die übrige Oberfläche verschwindet $\cos(\varkappa, n)$. Demgemäfs liefert (9) einfach

$$(10)\qquad q_1\varkappa_1 = q_2\varkappa_2;$$

also:

Das Produkt aus der Drehungsgeschwindigkeit in den entsprechenden Querschnitt des Wirbelfadens ist nicht nur an derselben Stelle im Laufe der Zeit, sondern auch für alle Teile des Fadens das gleiche.

Falls die Bewegung der Flüssigkeit keine diskontinuierliche ist, so kann daher ein Wirbelfaden nicht im Innern der Flüssigkeit endigen. Ein Wirbelfaden läuft immer ringförmig in sich selbst zurück oder endigt beiderseits in den Grenzflächen der Flüssigkeit.

Durch Grenzübergang folgern wir die gleiche Eigenschaft für eine einfache, isolierte Wirbellinie. Niemals kann ein einzelner rotierender Punkt in einer (räumlich ausgedehnten) Flüssigkeit vorkommen.

6. Während die bisherigen Betrachtungen auch bei kompressiblen Flüssigkeiten ihre Gültigkeit behalten, wollen wir jetzt die Gleichung der Inkompressibilität zu den Bewegungsgleichungen hinzunehmen; es sei also

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Wir behaupten nun: Wenn die Drehungskomponenten ξ, η, ζ für jeden Punkt zu jeder Zeit gegeben sind, die Wirbelfäden sich ganz im Endlichen befinden, die Flüssigkeit sich aber ins Unendliche erstreckt und daselbst ruht und im übrigen stetige Änderung von u, v, w mit den Koordinaten x, y, z vorausgesetzt wird, so ist die Bewegung eindeutig bestimmt.

Gäbe es nämlich zwei Wertesysteme für u, v, w, welche allen Bedingungen genügen, und setzten wir die Differenzen entsprechender Komponenten gleich u', v', w', so hätten wir wegen (1)

$$\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 0,$$

d. h. u', v', w' wären die partiellen Differentialquotienten derselben Funktion — wir nennen sie φ' — nach x, y, z. Aus (11) folgt mittels dieser Beziehungen

$$\Delta \varphi' = 0.$$

Nach § 44, 3*) ist dann φ' eine Konstante, also $u' = v' = w' = 0$.

7. Wir beschäftigen uns jetzt mit den Wirbelbewegungen in einer inkompressibeln Flüssigkeit, welche sich parallel zur xy-Ebene derart bewegt, dafs in allen Punkten, welche sich nur durch ihre z-Koordinate unterscheiden, die Bewegung die gleiche ist. Die Flüssigkeit möge durch zwei zur xy-Ebene parallele Ebenen begrenzt sein, im übrigen aber sich allseitig ins Unendliche erstrecken und daselbst ruhen. Etwa vorhandene Wirbellinien müssen dann der z-Achse parallel sein und in allen ihren Punkten gleiche Geschwindigkeit aufweisen. Da keine Änderung in dem Abstand ihrer Punkte eintritt, so ist die Drehungsgeschwindigkeit nach Nr. 4 auch zu verschiedenen Zeiten die gleiche. Dagegen können die Wirbellinien selbst ihre Stelle ändern. Von den Drehungskomponenten (1) tritt hier nur die eine:

---

*) Die Zeit kann während der ganzen Untersuchung als konstante Gröfse behandelt werden.

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{12}$$

auf.

Es mögen nur isolierte Wirbellinien vorhanden sein; von Wirbelfäden kann man dann nur in uneigentlichem Sinne sprechen. Denkt man sich die Wirbellinien durch unendlich schmale Cylinder ausgeschlossen, die natürlich ihre Lage ändern können, so ist die Flüssigkeitsbewegung in dem übrig bleibenden, nunmehr mehrfach zusammenhängenden Raume von Drehung frei; sie besitzt demnach hier ein Geschwindigkeitspotential. Die Wirbellinien qualifizieren sich also in diesem Falle als Linien, in denen das sonst vorhandene Geschwindigkeitspotential seine Stetigkeit verliert. Sie bilden eine Art Stetigkeitsunterbrechung der sonst stetigen Flüssigkeitsbewegung.

8. Die Gleichung der Inkompressibilität nimmt hier die Form

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(-v)}{\partial y} \tag{13}$$

an; sie sagt aus, dafs u und $-v$ die partiellen Differentialquotienten derselben Funktion W nach y und x sind. Setzen wir aber

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}, \tag{14}$$

so wird aus (12)

$$-2\zeta = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \tag{15}$$

Hiernach zeigt W die Eigenschaften eines logarithmischen Potentials, welches von Massen ausgeht, die man sich in den Wirbellinien konzentriert denken mufs. Nach § 48, (4) (worin rechts — vorzusetzen ist) und (7) setzen wir

$$W = -\frac{1}{\pi}\int \zeta \log \varrho \, df, \tag{16}$$

worin ϱ die Entfernung des untersuchten Punktes von einer der Wirbellinien, df aber ein Element des Querschnittes eines (unendlich dünnen) Wirbelfadens bedeutet. Die Integration ist über alle Wirbelfäden auszudehnen.

Soll W von Null verschieden sein, so mufs, wegen der unendlichen Dünne der Wirbelfaden, ζ unendlich sein*). (16) geht über in

$$W = -\frac{1}{\pi}\sum^{\alpha} m_\alpha \log \varrho_\alpha. \tag{17}$$

Hierin bedeutet m_α eine für jede Wirbellinie α charakteristische, unveränderliche Gröfse, welche aus $\int \zeta df$, ausgeführt für die betreffende Linie, hervorgegangen gedacht werden kann; ϱ_α ist die Entfernung des untersuchten Punktes von der Wirbellinie α. Je nach dem positiven oder negativen Sinne der Drehung ist m_α positiv oder negativ.

*) Dies hat nichts Befremdliches, wenn man bedenkt, dafs die Rotation hier nur als eine Stetigkeitsunterbrechung in einer Linie erscheint.

9. W ist nicht das Geschwindigkeitspotential für die rotationsfreie Flüssigkeit; doch steht es mit diesem in enger Beziehung. Gelingt es nämlich, eine Funktion Z von x und y zu konstruieren, so daſs (φ und W sind reell)

$$Z = \varphi + iW \tag{18}$$

wird, so ist φ das Geschwindigkeitspotential. Nach § 86, (6) ist nämlich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial y}, \tag{19}$$

also wegen (14)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v. \tag{20}$$

10. Den Wirbellinien kann man eine Schwerlinie mit den Koordinaten x_0, y_0 zuschreiben, indem man

$$x_0 \sum^{\alpha} m_\alpha = \sum^{\alpha} x_\alpha m_\alpha, \quad y_0 \sum^{\alpha} m_\alpha = \sum^{\alpha} y_\alpha m_\alpha \tag{21}$$

setzt, worin sich x_α, y_α auf die Wirbellinie α beziehen. Man kann dann behaupten, daſs die Schwerlinie der Wirbellinien in Ruhe bleibt, wenn nicht $\Sigma m_\alpha = 0$ ist. Das letztere kann eintreten, wenn die Drehungsrichtung nicht bei allen Wirbellinien die gleiche ist.

Um den ausgesprochenen Satz zu beweisen, differentiieren wir (21) nach t:

$$\frac{dx_0}{dt} \sum^{\alpha} m_\alpha = \sum^{\alpha} u_\alpha m_\alpha, \quad \frac{dy_0}{dt} \sum^{\alpha} m_\alpha = \sum^{\alpha} v_\alpha m_\alpha. \tag{22}$$

Nach (17) und (14) ist

$$u = -\frac{1}{\pi} \sum^{\alpha} \frac{m_\alpha (y - y_\alpha)}{\varrho_\alpha^2}, \quad v = \frac{1}{\pi} \sum^{\alpha} \frac{m_\alpha (x - x_\alpha)}{\varrho_\alpha^2}, \tag{23}$$

so daſs aus (22)

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_0}{dt} \sum^{\alpha} m_\alpha &= -\frac{1}{\pi} \sum^{\alpha} \sum^{\beta} \frac{m_\alpha m_\beta (y_\alpha - y_\beta)}{\varrho_{\alpha\beta}^2}, \\ \frac{dy_0}{dt} \sum^{\alpha} m_\alpha &= \frac{1}{\pi} \sum^{\alpha} \sum^{\beta} \frac{m_\alpha m_\beta (x_\alpha - x_\beta)}{\varrho_{\alpha\beta}^2} \end{aligned}\right. \tag{24}$$

wird, worin sich α und β auf je zwei Wirbelfäden beziehen, $\varrho_{\alpha\beta}$ aber den Abstand derselben angiebt. Da sich in jeder der Doppelsummen je zwei Glieder zerstören, so verschwinden sie, und wir haben

$$\frac{dx_0}{dt} \sum^{\alpha} m_\alpha = 0, \quad \frac{dy_0}{dt} \sum^{\alpha} m_\alpha = 0, \tag{25}$$

woraus das Behauptete folgt.

11. An (23) knüpfen wir eine Bemerkung an, die sich auch verallgemeinern läſst. Die Geschwindigkeitskomponenten u und v irgend eines Flüssigkeitselementes setzen sich aus einer Summe von Einzelbestandteilen zusammen, die Beziehung zu je einer Wirbellinie haben.

Man kann daher von der Auffassung ausgehen, dafs zu der Geschwindigkeit eines Punktes x, y jede Wirbellinie einen bestimmten Anteil liefert. Die Anteile der Wirbellinie α sind

$$u_\alpha = -\frac{m_\alpha (y - y_\alpha)}{\pi \varrho_\alpha^2}, \quad v_\alpha = \frac{m_\alpha (x - x_\alpha)}{\pi \varrho_\alpha^2}, \tag{26}$$

woraus ein Anteil an Geschwindigkeit*)

$$\sqrt{u_\alpha^2 + v_\alpha^2} = \pm \frac{m_\alpha}{\pi \varrho_\alpha} \tag{27}$$

mit den Richtungskosinus

$$\frac{u_\alpha}{\sqrt{u_\alpha^2 + v_\alpha^2}} = \mp \frac{y - y_\alpha}{\varrho_\alpha}, \quad \frac{v_\alpha}{\sqrt{u_\alpha^2 + v_\alpha^2}} = \pm \frac{x - x_\alpha}{\varrho_\alpha} \tag{28}$$

folgt. Beachten wir nun, dafs

$$\frac{x - x_\alpha}{\varrho_\alpha}, \quad \frac{y - y_\alpha}{\varrho_\alpha}$$

die Richtungskosinus des von x, y auf die Wirbellinie gefällten Perpendikels sind, so erkennen wir, dafs der Geschwindigkeitsanteil auf diesem Perpendikel senkrecht steht und in der Richtung vor sich geht, in welcher Punkt x, y fortgeführt würde, wenn sich die Rotation um die Wirbellinie bis zu ihm erstreckte. Fassen wir Alles zusammen, so können wir das Resultat aussprechen:

Jeder Punkt einer inkompressibeln Flüssigkeit, welcher sich in der oben angegebenen Weise bewegt, empfängt von jeder der vorhandenen Wirbellinien (α) einen Geschwindigkeitsanteil, welcher der Gröfse m_α direkt, der Entfernung von der Wirbellinie umgekehrt proportional ist und den Punkt in der Richtung bewegt, in der er durch die um die Wirbellinie vor sich gehende Rotation fortgeführt würde.

12. Ist nur eine Wirbellinie vorhanden, so behält dieselbe ihre Lage bei; sie möge durch den Nullpunkt gehen. Es ist dann

$$W = -\frac{m}{\pi} \log \varrho = -\frac{m}{2\pi} \log (x^2 + y^2), \tag{29}$$

also

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{m y}{\pi (x^2 + y^2)}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{m x}{\pi (x^2 + y^2)} \tag{30}$$

oder, wenn wir Polarkoordinaten durch

$$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \sin \vartheta \tag{31}$$

einführen,

$$u = -\frac{m \sin \vartheta}{\pi \varrho}, \quad v = \frac{m \cos \vartheta}{\pi \varrho}. \tag{32}$$

*) In (27) ist immer der positive Wert zu wählen, auch wenn m_α negativ ist.

Jedes Teilchen beschreibt um die Wirbellinie einen Kreis mit der konstanten Geschwindigkeit

$$\pm \frac{m}{\pi \varrho}. \tag{33}$$

Das Geschwindigkeitspotential lautet in diesem Falle

$$\varphi = \frac{m\vartheta}{\pi} = \frac{m}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}; \tag{34}$$

für $x = y = 0$ wird dasselbe unbestimmt.

13. Bei zwei Wirbellinien ist

$$W = -\frac{1}{\pi}(m_1 \log \varrho_1 + m_2 \log \varrho_2), \tag{35}$$

woraus

$$\left\{\begin{aligned} u &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{m_1(y-y_1)}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} + \frac{m_2(y-y_2)}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\right], \\ v &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{m_1(x-x_1)}{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} + \frac{m_2(x-x_2)}{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}\right] \end{aligned}\right. \tag{36}$$

folgt. Für je einen Punkt der ersten und zweiten Wirbellinie haben wir insbesondere*)

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{\pi}\frac{m_2(y_1-y_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}, \quad v_1 = \frac{1}{\pi}\frac{m_2(x_1-x_2)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}, \\ u_2 &= -\frac{1}{\pi}\frac{m_1(y_2-y_1)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}, \quad v_2 = \frac{1}{\pi}\frac{m_1(x_2-x_1)}{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

Verlegen wir nun den Nullpunkt des Koordinatensystems in die Schwerlinie der beiden Wirbellinien, so wird

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0, \quad m_1 y_1 + m_2 y_2 = 0. \tag{38}$$

Durch Elimination von x_2 und y_2 mittels (38) folgen aus den beiden ersten Relationen (37)

$$\left\{\begin{aligned} u_1 &= -\frac{1}{\pi}\frac{m_2^2}{m_1+m_2}\frac{y_1}{x_1^2+y_1^2}, \\ v_1 &= \frac{1}{\pi}\frac{m_2^2}{m_1+m_2}\frac{x_1}{x_1^2+y_1^2} \end{aligned}\right. \tag{39}$$

und analoge Resultate aus den beiden andern oder, wenn

$$x_1 = r_1 \cos\vartheta_1, \quad y_1 = r_1 \sin\vartheta_1; \quad x_2 = r_2 \cos\vartheta_2, \quad y_2 = r_2 \sin\vartheta_2 \tag{40}$$

gesetzt wird,

*) In (36) werden allerdings für $x = x_1$, $y = y_1$ die ersten Glieder von u und v unbestimmt; in der That ist in unendlicher Nachbarschaft des Wirbelfadens die Bewegung unstetig; die Geschwindigkeit ändert unendlich rasch ihre Richtung. Wollen wir aber die Bewegung der Wirbellinie selbst feststellen, so gehen wir von den Betrachtungen der letzten Nummer aus. Der Bewegungsanteil, den die erste Wirbellinie selbst liefert, kommt hier nicht zur Geltung, weil er sich auf eine Drehung um diese Linie bezieht; der Bewegungsanteil der zweiten Wirbellinie bestimmt also allein die Bewegung der ersten und umgekehrt.

$$(41)\qquad \begin{cases} u_1 = -\dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{m_2^2}{m_1+m_2}\,\dfrac{\sin\vartheta_1}{r_1}, \\ v_1 = \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{m_2^2}{m_1+m_2}\,\dfrac{\cos\vartheta_1}{r_1} \quad \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Komponente der Geschwindigkeit von x_1, y_1 in der Richtung r_1 ist

$$(42)\qquad u_1 \cos\vartheta_1 + v_1 \sin\vartheta_1 = 0;$$

die hierauf senkrechte Komponente (im positiven Drehungssinne um die Schwerlinie als positiv gerechnet) ist

$$(43)\qquad -u_1 \sin\vartheta_1 + v_1 \cos\vartheta_1 = \frac{1}{\pi}\,\frac{m_2^2}{m_1+m_2}\,\frac{1}{r_1}.$$

Da beide Wirbellinien, wie aus (38) hervorgeht, mit ihrer Schwerlinie in derselben Ebene liegen, so folgt aus dem letzten, daſs sie von der Schwerlinie immer den gleichen Abstand beibehalten und um sie eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit

$$(44)\qquad \omega = \frac{1}{\pi}\,\frac{m_2^2}{m_1+m_2}\,\frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{\pi}\,\frac{m_1^2}{m_1+m_2}\,\frac{1}{r_2^2}$$

ausführen.

14. Ist $m_2 = -m_1$, so folgt aus (37)

$$(45)\qquad u_1 = u_2, \quad v_1 = v_2.$$

Ist für irgend einen Zeitpunkt

$$y_1 = y_2 = 0, \quad x_2 = -x_1$$

so wird

$$(46)\qquad u_1 = u_2 = 0, \quad v_1 = v_2 = -\frac{m_1}{2\pi x_1}.$$

Die beiden Wirbellinien schreiten also mit gleichbleibender Geschwindigkeit in der zu ihrer Ebene senkrechten Richtung fort, und zwar in demselben Sinne, wie die zwischen ihnen strömenden Teilchen.

Auch für drei Wirbellinien läſst sich die Rechnung durchführen, liefert jedoch schon recht verwickelte Resultate.

Auſser den geraden Wirbellinien wurden auch kreisförmige untersucht. Bei einer kreisförmigen Wirbellinie gelangt man zu einem ganz analogen Resultate wie bei zwei parallelen, geraden mit entgegengesetzt gleicher Drehungsgeschwindigkeit. Die unmittelbare Anschauung zeigt schon die Verwandtschaft beider Probleme.

§ 90.

Die Wellenbewegung.

1. In einem Gefäſse sei eine lediglich der Schwerkraft unterworfene inkompressible Flüssigkeit enthalten; die Oberfläche sei frei. Befindet sich die Flüssigkeit im Zustande der Ruhe, so bildet die freie Oberfläche eine horizontale Ebene, in welche wir den Nullpunkt des Koordinatensystems verlegen wollen, während die z-Achse vertikal abwärts gerichtet

sei. Wird nun an irgend einer Stelle die Ruhelage der Flüssigkeit durch einen Stofs u. dgl. gestört, so teilt sich diese Störung der ganzen Flüssigkeit mit; sie macht sich (insbesondere an der Oberfläche) als sogenannte Wellenbewegung geltend*). Diese Wellenbewegung ist in den einfacheren Fällen der Rechnung zugänglich; wir behandeln sie zunächst unter der Voraussetzung, dafs die Verschiebungen, welche die einzelnen Punkte der Flüssigkeit erfahren, unendlich klein sind.

Wir gehen von der Annahme aus, dafs keine Rotationen von Flüssigkeitsteilchen vorkommen, dafs also ein Geschwindigkeitspotential φ existiert. Das Potential der Schwerkraft ist

$$U = gz. \tag{1}$$

Aus der Gleichung § 83, (2) wird hier, wenn wir die Dichtigkeit der Flüssigkeit der Einheit gleichsetzen und die Konstante durch geeignete Wahl von φ verschwinden lassen,

$$gz - p = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{2}$$

Da im Falle der Ruhe an der Oberfläche p konstant Null ist, so wird aus (2) für Punkte der Oberfläche, also sehr kleine z,

$$gz = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right]. \tag{3}$$

Bei der Voraussetzung, dafs alle Teilchen nur unendlich kleine Verschiebungen erfahren, müssen auch die Geschwindigkeiten als unendlich klein angenommen werden; vernachlässigen wir nun unendlich kleine Gröfsen zweiter Ordnung, also das Quadrat der Geschwindigkeit, so vereinfacht sich (3) zu

$$gz = \frac{\partial \varphi}{\partial t}. \tag{4}$$

Durch Differentiation nach t folgt hieraus

$$g\frac{dz}{dt} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial z}\frac{dz}{dt}$$

oder bei derselben Vernachlässigung und nach Ersatz von $\frac{dz}{dt}$ durch $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$

$$g\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{5}$$

2. Für diese partielle Differentialgleichung, welche von derjenigen verschieden ist, die bei Schwingungen von Saiten oder elastischen Stäben auftritt, lassen sich Lösungen angeben; von diesen kommen nur diejenigen in Betracht, welche zugleich die Relation

$$\Delta \varphi = 0 \tag{6}$$

befriedigen. Wir machen die spezielle Annahme, dafs

*) Die Grundlagen der Theorie der Wasserwellen wurden von Cauchy, Poisson, Airy, Russel, Green u. A. gelegt.

$$\varphi = \psi\chi \tag{7}$$

sei, worin ψ nur von z und t, χ nur von x und y abhängt; (5) geht dann über in die Gleichung

$$g\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \tag{8}$$

die ihrer Herleitung entsprechend nur für verschwindend kleine z gilt, (6) in

$$\psi\left(\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2}\right) + \chi\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \tag{9}$$

Der letzteren Relation wird durch die Annahme

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \varkappa^2\psi, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} = -\varkappa^2\chi \tag{11}$$

genügt, worin $\varkappa$ eine Konstante bedeutet. Die Gleichung (10) giebt integriert nach § 8, 3

$$\psi = Ae^{\varkappa z} + Be^{-\varkappa z}. \tag{12}$$

Nehmen wir an, dafs der Boden des Gefäfses eben und horizontal in der Tiefe $z = h$ sei, so mufs für $z = h$ $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ sein, wodurch aus (12) folgt

$$\psi = C\left(e^{\varkappa(h-z)} + e^{-\varkappa(h-z)}\right). \tag{13}$$

C kann hierin noch eine Funktion von t sein; wir bestimmen sie durch Einsetzen von ψ in (8). Es folgt

$$\frac{d^2C}{dt^2} = -g\varkappa\frac{e^{\varkappa(h-z)} - e^{-\varkappa(h-z)}}{e^{\varkappa(h-z)} + e^{-\varkappa(h-z)}}C, \tag{14}$$

worin wir wegen der beschränkten Gültigkeit von (8) $z = 0$ setzen dürfen. Somit wird

$$\frac{d^2C}{dt^2} = -g\varkappa\frac{e^{\varkappa h} - e^{-\varkappa h}}{e^{\varkappa h} + e^{-\varkappa h}}C. \tag{15}$$

Integriert giebt diese Gleichung

$$C = A\cos 2\pi\frac{t - t_0}{T}, \tag{16}$$

worin A und t_0 willkürliche Konstanten sind, T aber durch die Gleichung

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g\varkappa}\frac{e^{\varkappa h} + e^{-\varkappa h}}{e^{\varkappa h} - e^{-\varkappa h}}} \tag{17}$$

bestimmt ist.

3. Die Bestimmung von χ hängt von der seitlichen Begrenzung der Flüssigkeit ab. Unter allen Umständen soll diese Begrenzung durch vertikale Wände gebildet werden. Wir wollen annehmen, dafs zwei Seitenwände der x-Achse parallel laufen und dafs die Flüssigkeit in der Richtung der x-Achse sich ins Unendliche erstrecke; die Bewegung möge

in allen Ebenen, welche der xz-Ebene parallel sind, die gleiche sein. Dann wird (11) einfach

$$\frac{d^2\chi}{dx^2} = -\varkappa^2\chi, \tag{18}$$

also

$$\chi = B\cos 2\pi\frac{x-x_0}{\lambda}, \tag{19}$$

wenn

$$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{\varkappa} \tag{20}$$

gesetzt wird, worin λ ebenso wie vorher $\varkappa$ willkürlich ist.

Durch Einsetzen der gefundenen Werte für ψ und χ in (7) erhalten wir eine mögliche Bewegung, die sich mit unendlich vielen analog gebildeten durch Addition kombinieren kann. In dem fertigen Ausdrucke tritt das Produkt

$$\cos 2\pi\frac{t-t_0}{T}\cos 2\pi\frac{x-x_0}{\lambda}$$

auf; dasselbe können wir nach der Formel

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) \tag{21}$$

behandeln. Beachten wir, dafs zu dem einen Ausdrucke für φ noch beliebig viele analog gebildete addiert werden können, so erkennen wir — was auch direkt zu verifizieren ist —, dafs wir bei geeigneter Verlegung des Nullpunktes der Zeit speziell

$$\varphi = A\left(e^{2\pi\frac{h-z}{\lambda}} + e^{-2\pi\frac{h-z}{\lambda}}\right)\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) \tag{22}$$

setzen dürfen, worin A und λ beliebig, dagegen

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}\,\frac{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} + e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} - e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}} \tag{23}$$

ist.

4. Um die wirkliche Bewegung zu erhalten, bilden wir, indem wir die Koordinaten eines Teilchens, welche zur Zeit $t = 0$ x, y, z sind, mit $x + \xi$, y, $z + \zeta$ bezeichnen,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{2\pi A}{\lambda}\left(e^{2\pi\frac{h-z}{\lambda}} + e^{-2\pi\frac{h-z}{\lambda}}\right)\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \\ \frac{d\zeta}{dt} &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{2\pi A}{\lambda}\left(e^{2\pi\frac{h-z}{\lambda}} - e^{-2\pi\frac{h-z}{\lambda}}\right)\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right), \end{aligned}\right. \tag{24}$$

woraus durch Integration nach t folgt

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= -\frac{AT}{\lambda}\left(e^{2\pi\frac{h-z}{\lambda}} + e^{-2\pi\frac{h-z}{\lambda}}\right)\left[\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) - \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right], \\ \zeta &= -\frac{AT}{\lambda}\left(e^{2\pi\frac{h-z}{\lambda}} - e^{-2\pi\frac{h-z}{\lambda}}\right)\left[\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right]. \end{aligned}\right. \tag{25}$$

Berechnen wir hieraus $\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ und $\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$, quadrieren und addieren, so erhalten wir die Gleichung der Bahn eines Teilchens in der Form

$$\left(\frac{\xi}{a}-\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{\zeta}{b}+\sin\frac{2\pi x}{\lambda}\right)^2=1, \tag{26}$$

worin zur Abkürzung

$$\begin{cases} a=\frac{AT}{\lambda}\left(e^{2\pi\frac{h-z}{\lambda}}+e^{-2\pi\frac{h-z}{\lambda}}\right), \\ b=\frac{AT}{\lambda}\left(e^{2\pi\frac{h-z}{\lambda}}-e^{-2\pi\frac{h-z}{\lambda}}\right) \end{cases} \tag{27}$$

gesetzt wurde. (26) ist die Gleichung einer Ellipse, deren grofse Achse $\pm 2a$ horizontal liegt; $\pm 2b$ ist die kleine Achse.

Für $a=b$, d. h.

$$e^{-2\pi\frac{h-z}{\lambda}}=0,$$

also $h=\infty$ bei endlichem λ und verschwindend kleinem A, geht diese in einen Kreis über.

5. Die durch (25) und (23) gegebene Bewegung ist in Bezug auf t und x periodisch. Nach Ablauf der Zeit T wiederholt sich derselbe Bewegungsvorgang, und in Punkten, welche in der Richtung der x-Achse den Abstand λ haben, ist die Bewegung die gleiche; T ist die Dauer einer Oszillation, λ die Wellenlänge, $\frac{\lambda}{T}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung. Die Bewegung verläuft in derselben Weise wie die durch § 73, (5) dargestellte. Die Wellenbewegung schreitet in der Richtung der wachsenden x fort, wenn λ positiv ist.

Besondere Aufmerksamkeit verdient der Einflufs der Tiefe der Flüssigkeit, sowie das Verhalten derselben in verschiedenen Tiefen. Während die Wellenlänge willkürlich angenommen werden kann, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit

$$\frac{\lambda}{T}=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}\frac{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}}-e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}{e^{\frac{2\pi h}{\lambda}}+e^{-\frac{2\pi h}{\lambda}}}} \tag{28}$$

von λ und h abhängig. Bei gleichbleibendem λ nimmt sie mit wachsendem h zu; für $h=0$ verschwindet sie, für $h=\infty$ wird sie

$$\frac{\lambda}{T}=\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}, \tag{29}$$

ein Wert, dem sie sich rasch nähert, wenn h die Wellenlänge λ übertrifft.

Bei gleichbleibendem h erreicht die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ihren Maximalwert für $\lambda = \infty$. Da hierbei

$$(30) \qquad e^{\frac{2\pi h}{\lambda}} = 1 + \frac{2\pi h}{\lambda}, \quad e^{\frac{-2\pi h}{\lambda}} = 1 - \frac{2\pi h}{\lambda}$$

gesetzt werden kann, so wird

$$(31) \qquad \frac{\lambda}{T} = \sqrt{gh};$$

übertrifft also die Wellenlänge die Tiefe einigermafsen, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit nahezu von der Wellenlänge unabhängig, aber der Quadratwurzel aus der Tiefe proportional.

Die Oszillationsdauer T nimmt mit wachsendem λ zu, mit wachsendem h aber ab.

Die Vertikalbewegung der Flüssigkeitsteilchen ist an der Oberfläche am stärksten; am Boden verschwindet sie. Die Horizontalbewegung nimmt ebenfalls mit der Tiefe ab, ohne jedoch hier zu verschwinden.

Auch wenn der Kanal abgeschlossen ist, bietet die Verfolgung der Bewegung keine Schwierigkeiten.

6. Die gegebene Behandlung der Wellenbewegung hat das Mifsliche, dafs sie von Annahmen ausgeht, welche nicht immer zutreffend sind; namentlich die Voraussetzung des Vorhandenseins eines Geschwindigkeitspotentials, also der Abwesenheit jeder Rotation, ist bedenklich. Wir wollen nun, ohne solche Annahmen zu machen, die Wellenbewegung in einer Flüssigkeit verfolgen, welche sich in Parallelebenen zur xz-Ebene gleichartig bewegt*); freilich werden wir nur eine ganz spezielle Bewegungsweise anzugeben im stande sein. In der Richtung der x-Achse soll die Flüssigkeit unbegrenzt sein; ebenso nehmen wir die Tiefe als unendlich an.

Die Lagrange'schen Gleichungen § 81, (9), (17), (18) liefern**), wenn wir das Koordinatensystem wie vorhin legen, $b = y$ und $\varepsilon = 1$ setzen,

$$(32) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial a} + \left(\dfrac{d^2z}{dt^2} - g\right)\dfrac{\partial z}{\partial a} + \dfrac{\partial p}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{d^2x}{dt^2}\dfrac{\partial x}{\partial c} + \left(\dfrac{d^2z}{dt^2} - g\right)\dfrac{\partial z}{\partial c} + \dfrac{\partial p}{\partial c} = 0, \end{cases}$$

$$(33) \qquad D = \frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}, \quad \frac{dD}{dt} = 0.$$

Wir können nun behaupten, dafs die Annahmen

$$(34) \qquad \begin{cases} x = a + r\sin\vartheta, \quad z = c + r\cos\vartheta, \\ \vartheta = 2\pi\left(\dfrac{a}{\lambda} - \dfrac{t}{T}\right) \end{cases}$$

die Gleichungen (32) und (33) befriedigen, wenn λ und T als Konstanten, r aber als noch zu bestimmende Funktion von c angesehen werden. Es

---

*) Rankine, Philos. Trans. 1863, Part. I, p. 227.

**) a, b, c sollen die Werte von x, y, z für $t = 0$ sein.

wird hierdurch eine kreisförmige Bewegung jedes Teilchens mit einem Radius, der von der Tiefe unter der Oberfläche abhängt, festgesetzt; nach der Zeit T, sowie im Abstande λ in der Richtung der x-Achse wiederholt sich die Bewegung.

Um die Richtigkeit der Annahme zu beweisen, bilden wir

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial a} = 1 + \dfrac{2\pi}{\lambda} r \cos \vartheta, & \dfrac{\partial x}{\partial c} = \dfrac{dr}{dc} \sin \vartheta, \\ \dfrac{\partial z}{\partial a} = -\dfrac{2\pi}{\lambda} r \sin \vartheta, & \dfrac{\partial z}{\partial c} = 1 + \dfrac{dr}{dc} \cos \vartheta \end{cases}$$

und hiernach

$$(36)\qquad D = 1 + \frac{2\pi}{\lambda} r \frac{dr}{dc} + \left(\frac{dr}{dc} + \frac{2\pi}{\lambda} r\right) \cos \vartheta.$$

Um D von t unabhängig zu machen, mufs

$$(37)\qquad \frac{dr}{dc} = -\frac{2\pi}{\lambda} r$$

angenommen werden; hieraus folgt durch Integration

$$(38)\qquad r = Ce^{-\frac{2\pi}{\lambda} c},$$

worin C eine Konstante ist. D wird zu

$$(39)\qquad D = 1 + \frac{2\pi}{\lambda} r \frac{dr}{dc}.$$

Weiter folgt aus (34)

$$(40)\qquad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \sin \vartheta, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \cos \vartheta.$$

Unter Benutzung aller gefundenen Relationen, insbesondere auch (37), erhalten wir aus (32)

$$(41)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial a} = 2\pi \left(\dfrac{2\pi}{T^2} - \dfrac{g}{\lambda}\right) r \sin \vartheta, \\ \dfrac{\partial p}{\partial c} = 2\pi \left(\dfrac{2\pi}{T^2} - \dfrac{g}{\lambda}\right) r \cos \vartheta + g - \dfrac{8\pi^3}{\lambda T^2} r^2. \end{cases}$$

Setzen wir jetzt zwischen den beiden bisher willkürlichen Konstanten λ und T die Beziehung

$$(42)\qquad \frac{g}{\lambda} = \frac{2\pi}{T^2}$$

fest, so gehen die Gleichungen (41) in

$$(43)\qquad \frac{\partial p}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial c} = g - \frac{4\pi^2 g}{\lambda^2} r^2 = g\left(1 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} C^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda} c}\right)$$

über. Aus der ersten dieser Gleichungen folgt, dafs p von a unabhängig ist; die zweite liefert durch Integration, wenn der Druck für $c = 0$,

d. h. für die freie Oberfläche, die immer von denselben Teilchen gebildet wird, gleich p_0 (**Atmosphärendruck**) gesetzt wird,

$$p = p_0 + g\left[c - \frac{\pi}{\lambda}C^2\left(1 - e^{-\frac{4\pi}{\lambda}c}\right)\right]. \tag{44}$$

Hiermit ist die Möglichkeit der angegebenen Bewegung dargethan, wenn nur die Konstante C so gewählt wird, dafs die Gröfse D nicht verschwindet oder negativ wird*). Da nun aus (39) durch (38)

$$D = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}C\right)^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda}c} \tag{45}$$

wird, so mufs, weil c von 0 bis ∞ variiert,

$$C^2 < \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2 \tag{46}$$

sein.

7. Die Gleichung der freien Oberfläche zur Zeit t erhält man, wenn man in den Gleichungen (34) r aus (38) einfügt, $c = 0$ setzt und dann a und ϑ eliminiert. Die Elimination von a giebt

$$\begin{cases} x = \frac{\lambda t}{T} + \frac{\lambda\vartheta}{2\pi} + C\sin\vartheta, \\ z = C\cos\vartheta, \end{cases} \tag{47}$$

woraus

$$x = \frac{\lambda t}{T} + \sqrt{C^2 - z^2} + \frac{\lambda}{2\pi}\arccos\frac{z}{C} \tag{48}$$

folgt.

Dies ist für ein festes t und y die Gleichung einer **Cykloide im weiteren Sinne**, die durch einen Punkt beschrieben wird, welcher mit einem auf der unteren Seite einer zur x-Achse parallelen Geraden rollenden Kreise fest verbunden ist. Die Bewegung bleibt in verschiedenen Zeiten zu sich selbst kongruent. Sie schreitet mit der Geschwindigkeit $\frac{\lambda}{T}$ in der Richtung der x-Achse fort. Der rollende Kreis hat den Radius $\frac{\lambda}{2\pi}$, sein Mittelpunkt bewegt sich in der x-Achse, und der die Kurve beschreibende Punkt hat vom Mittelpunkte den Abstand C.

Wird $C^2 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2$, so erhält die Cykloide Spitzen; die Wellen spitzen sich nach oben zu, während sie für $C^2 < \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2$ abgerundet erscheinen. Wird $C^2 > \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2$, so geht die Cykloide in eine Schleifenlinie über; die Wasserteilchen müfsten sich einander durchsetzen, was nicht möglich ist; es stimmt dies mit dem Resultate (46) überein. Dieses Ergebnifs ist mit der Wirklichkeit insofern im Einklang, als bei einer im Vergleich

*) D ist seiner Bedeutung nach wesentlich **positiv**.

zur Wellenlänge sehr grofsen Wellenhöhe ein *Spritzen* und *Schäumen* des Wassers, also eine *diskontinuierliche* Bewegung eintritt.

8. Bei der abgeleiteten Bewegung ist *kein* Geschwindigkeitspotential vorhanden, vielmehr befinden sich sämtliche Teilchen in Rotation um eine Parallele zur y-Achse. Aus § 82, (8), (7) und (2) folgt nämlich für diese Rotationsgeschwindigkeit

$$\eta = -\frac{B'}{D} = -\frac{1}{2D}\left(\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}\right),$$

also nach (34), (35), (38)

$$\eta = \frac{8\pi^3 r^2}{D\lambda^2 T} = \frac{8\pi^3 C^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda}c}}{D\lambda^2 T}. \tag{49}$$

Die Rotationsgeschwindigkeit, die von der Zeit unabhängig ist, erreicht in der Oberfläche ihr Maximum

$$\frac{8\pi^3 C^2}{(\lambda^2 - 4\pi^2 C^2)\,T} \tag{50}$$

und verschwindet in der Tiefe mehr und mehr.

§ 91.

Die Reibung der Flüssigkeiten.

1. Wenn die Resultate, welche die Theorie der *idealen* Flüssigkeiten liefert, mit der Wirklichkeit oft nur sehr unvollkommen zusammenstimmen, so liegt dies ganz besonders in dem Umstande, dafs die gegenseitige Verschiebung zweier benachbarten Flüssigkeitsteilchen keine unbedingt freie ist. Die molekularen Kräfte, welche zwischen den Flüssigkeitsteilchen thätig sind, setzen einer solchen Verschiebung einen Widerstand entgegen, den man als *innere Reibung* bezeichnet. Steht die Flüssigkeit mit festen Körpern in Berührung, so macht sich an den Grenzflächen eine *äufsere Reibung* geltend.

Die Theorien der Reibung, welche *Navier, Cauchy, Poisson, de St. Vénant, Stokes, Meyer, Stefan, Kirchhoff* aufstellten, stimmen zwar für inkompressible Flüssigkeiten, aber nicht alle für Gase völlig überein. In der That ist man auf nicht ganz sichere Annahmen angewiesen, die der Natur der Sache nach durch Experimente kaum scharf bestätigt werden können.

Verwandt mit den Untersuchungen über reibende Flüssigkeiten sind diejenigen über die Mechanik *halbflüssiger* (pulverförmiger oder plastischer) Substanzen, welche in der neuesten Zeit von *Boussinesq, Lévy, de St. Vénant* u. A. angestellt wurden. Wir werden uns mit diesen Theorien nicht weiter beschäftigen und nur die eigentlichen reibenden Flüssigkeiten behandeln.

2. Wir gehen von der Annahme aus, dafs infolge der Reibung in

der Flüssigkeit seitliche Druckkomponenten auftreten, die bei den idealen Flüssigkeiten nicht vorhanden sind. Hieraus folgt zugleich, dafs die Normaldrucke nicht alle gleich sein können (vgl. § 67, 10), dafs sie also ebenfalls Modifikationen erleiden müssen. Verschieben sich zwei Flüssigkeitsteilchen nebeneinander, so wird ein seitlicher Druck involviert, welcher von der Geschwindigkeitsdifferenz beider abhängt. Auch wenn sich zwei Teilchen hintereinander in derselben Richtung verschieben, macht sich die Reibung im Falle einer Geschwindigkeitsdifferenz geltend; denn der hierdurch notwendig werdenden Deformation der Teilchen setzt sich die Reibung entgegen.

Wir wollen nun zunächst annehmen, dafs die Koordinatenachsen mit den Hauptachsen des Druckellipsoids eines Teilchens x, y, z gleiche Richtung haben, so dafs die seitlichen Druckkomponenten Y_z, Z_x, X_y verschwinden. Dann gehen wir von der Annahme aus, dafs die Druckkomponenten X_x, Y_y, Z_z sich von dem Drucke p, welcher der idealen Flüssigkeit zukommen würde, nur um eine Gröfse unterscheiden, die der Differenz der Geschwindigkeit des Teilchens und der resp. in der x, y, z-Richtung liegenden Nachbarteilchen (bezogen auf gleichen Abstand) proportional und bei positivem Druck negativ ist. Bei dem gleichartigen Verhalten der Flüssigkeit nach allen Richtungen hin setzen wir daher

$$(1) \quad \begin{cases} X_x = p - 2k\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\ Y_y = p - 2k\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ Z_z = p - 2k\dfrac{\partial w}{\partial z}, \end{cases}$$

worin u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten sind und k eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Konstante, die sog. Reibungskonstante oder der Reibungskoeffizient ist.

Fügen wir nun die weitere Annahme hinzu, dafs das Druckellipsoid und das Dilatationsellipsoid jederzeit die gleichen Achsen haben, so geschieht die Übertragung dieser Druckrelationen in ein beliebig gelegenes Koordinatensystem in derselben Weise, wie in § 68, 9, wo die analoge Rechnung für elastische feste Körper durchgeführt wurde. Bei dieser Übertragung können wir die beiden Glieder auf den rechten Seiten von (1) gesondert behandeln. Der Druck p ist derselbe wie bei der idealen Flüssigkeit; er tritt daher bei jeder Lage des Koordinatensystems in X_x, Y_y, Z_z auf, während die seitlichen Druckkomponenten von ihm frei sind. Die zweiten Teile der rechten Seiten von (1) werden aber mit den Gröfsen p_1, p_2, p_3 in § 68, (15) formell identisch, wenn man in diesen $\vartheta = 0$ und k an Stelle von K setzt. Da nun die Gleichungen § 68, (15) durch Koordinatentransformation in § 68, (23) übergehen, so erhalten wir die allgemeinen Gleichungen der Druckkomponenten für reibende Flüssigkeiten in der Form

$$
(2)\qquad \begin{cases}
X_x = p - 2k\dfrac{\partial u}{\partial x}, \\
Y_y = p - 2k\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\
Z_z = p - 2k\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\
Y_z = Z_y = -k\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\
Z_x = X_z = -k\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \\
X_y = Y_x = -k\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right).
\end{cases}
$$

Es ist wohl zu beachten, dafs u, v, w hier die Geschwindigkeitskomponenten, in § 68 aber die Verschiebungskomponenten bedeuten. Für die hier durchzuführende Rechnung ist dies jedoch irrelevant, da die Geschwindigkeitskomponenten den Verschiebungskomponenten proportional werden, wenn letztere für die im Verlaufe des Zeitteilchens dt eintretende Änderung gebildet werden.

3. Als Differentialgleichungen der Bewegung ergeben sich für die reibende inkompressible Flüssigkeit nach § 67, (4), wenn man die Relationen beachtet, welche aus der Gleichung der Inkompressibilität

$$
(3)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0
$$

durch Differentiation nach x, y, z folgen,

$$
(4)\qquad \begin{cases}
\varepsilon\dfrac{d^2 x}{dt^2} = \varepsilon X - \dfrac{\partial p}{\partial x} + k\Delta u, \\
\varepsilon\dfrac{d^2 y}{dt^2} = \varepsilon Y - \dfrac{\partial p}{\partial y} + k\Delta v, \\
\varepsilon\dfrac{d^2 z}{dt^2} = \varepsilon Z - \dfrac{\partial p}{\partial z} + k\Delta w.
\end{cases}
$$

Die Euler'schen Gleichungen (in der Form § 81, (7)) nehmen, wenn wieder

$$
(5)\qquad P = \frac{p}{\varepsilon}
$$

gesetzt und die Existenz einer Kräftefunktion vorausgesetzt wird, die Gestalt an

$$
(6)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial (U-P)}{\partial x} + \frac{k}{\varepsilon}\Delta u
$$

u. s. w.

Ist keine Kraft in Thätigkeit, so haben wir

$$
(7)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{k}{\varepsilon}\Delta u
$$

u. s. w.

4. Wenn die Flüssigkeit mit festen Körpern, resp. festen Wänden in Berührung ist, so müssen an diesen die normalen Geschwindigkeitskomponenten beiderseits übereinstimmen. Bezeichnen wir die Geschwindigkeitskomponenten der Flüssigkeit wie bisher mit u, v, w, die eines Körperteilchens mit u_1, v_1, w_1, mit n die nach dem Innern des Körpers gehende Normale, so ist also für einen Punkt der Grenze

$$(8)\quad (u-u_1)\cos(n,x)+(v-v_1)\cos(n,y)+(w-w_1)\cos(n,z)=0.$$

Bei einer idealen Flüssigkeit sind die Geschwindigkeiten in tangentialer Richtung an der Grenzfläche vollkommen voneinander unabhängig, und es finden hier keine seitlichen Drucke statt. Besteht dagegen zwischen Flüssigkeit und festem Körper Reibung, so treten seitliche Drucke auf. Wir machen die Hypothese, dafs die Komponenten der seitlichen Drucke den Differenzen der entsprechenden Geschwindigkeitskomponenten proportional sind.

Wir wollen die Komponenten des Druckes, welcher von dem festen Körper aus an einer Stelle auf ein Element der Grenzfläche einwirkt, bezogen auf die Flächeneinheit, mit X_n, Y_n, Z_n bezeichnen. Selbstverständlich steht dieser Druck im allgemeinen nicht auf dem Flächenelemente senkrecht. Wir können ihn in zwei Komponenten zerlegen, von denen die erste in die Richtung n, die zweite in die Tangentialebene fällt; die erste ist

$$(9)\quad X_n\cos(n,x)+Y_n\cos(n,y)+Z_n\cos(n,z).$$

Die Komponenten der zweiten Druckkomponente, genommen nach den Koordinatenachsen, erhalten wir, indem wir von X_n, Y_n, Z_n die Komponenten von (9) nach den Koordinatenachsen abziehen; die erhaltenen Gröfsen sind dann den mit einem konstanten Faktor $\varkappa$ multiplizierten Komponenten der Geschwindigkeitsdifferenzen gleichzusetzen. So erhalten wir

$$(10)\quad \begin{cases} X_n-[X_n\cos(n,x)+Y_n\cos(n,y)+Z_n\cos(n,z)]\cos(n,x)=\varkappa(u_1-u),\\ Y_n-[X_n\cos(n,x)+Y_n\cos(n,y)+Z_n\cos(n,z)]\cos(n,y)=\varkappa(v_1-v),\\ Z_n-[X_n\cos(n,x)+Y_n\cos(n,y)+Z_n\cos(n,z)]\cos(n,z)=\varkappa(w_1-w).\end{cases}$$

Die Gröfse $\varkappa$, welche die Stärke der Reibung zwischen Flüssigkeit und festem Körper bestimmt, ist von k wesentlich verschieden; sie hängt von der Natur der beiden sich berührenden Körper ab. Ist $\varkappa=0$, so folgt

$$(11)\quad X_n : Y_n : Z_n = \cos(n,x) : \cos(n,y) : \cos(n,z),$$

der Druck ist also normal; in diesem Falle findet an der Grenzfläche keine Reibung statt. Nehmen wir $\varkappa=\infty$, so mufs

$$(12)\quad u=u_1,\quad v=v_1,\quad w=w_1$$

sein, d. h. die Flüssigkeitsteilchen an der Grenzfläche führen dieselbe Bewegung aus, wie die berührenden Teile des festen Körpers; die Flüssigkeit haftet an dem letzteren.

5. Aus den Relationen (4) und (10) ist ersichtlich, dafs k und $\varkappa$ die folgenden Dimensionen besitzen:

$$k: \qquad l^{-1}\,t^{-1}m,$$
$$\varkappa: \qquad l^{-2}\,t^{-1}m.$$

§ 92.

Bewegung einer reibenden Flüssigkeit in einem Rohre; Theorie der Meeresströmungen.

1. Dem Experiment am bequemsten zugänglich ist die Bewegung einer reibenden Flüssigkeit in einem cylindrischen Rohre. Die Längsachse des Rohres sei der z-Achse parallel. Kräfte mögen nicht wirken, was dem Vorgange in horizontalen Rohren nahe kommt. Der Ein- und Ausflufs sei so geregelt, dafs die Bewegung überall parallel zur z-Achse vor sich geht, dafs also

$$u = v = 0 \tag{1}$$

ist. Zudem möge die Bewegung eine stationäre sein.

Aus den Gleichungen § 91, (7) und (3) wird dann

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \dfrac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad w\dfrac{\partial w}{\partial z} + \dfrac{1}{\varepsilon}\dfrac{\partial p}{\partial z} - \dfrac{k}{\varepsilon}\Delta w = 0, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Wir schliefsen hieraus, dafs p von x und y unabhängig, also für alle Punkte desselben Querschnittes gleichwertig ist; ferner, dafs w von z unabhängig ist, also in jedem Stromfaden denselben Wert behält, so dafs in entsprechenden Punkten zweier Querschnitte die gleiche Geschwindigkeit stattfindet.

Die dritte Gleichung (2) vereinfacht sich durch die vierte zu

$$\frac{\partial p}{\partial z} = k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{3}$$

Da die linke Seite derselben von x und y, die rechte von z unabhängig ist, während t überhaupt nicht auftritt, so können wir sie in die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial p}{\partial z} = c, \quad k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = c \tag{4}$$

zerfällen, in denen c eine Konstante bedeutet. Aus der ersten Gleichung (4) folgt durch Integration

$$p = cz + c_1, \tag{5}$$

so dafs sich beim Fortschreiten längs der Röhre der Druck proportional mit dem zurückgelegten Wege ändert.

2. Die zweite Gleichung (4) können wir in dem Falle, dafs der Querschnitt ein Kreis ist, dessen Mittelpunkt in der z-Achse liegt und

dafs die Bewegung in gleichem Abstande vom Mittelpunkte die gleiche ist, leicht integrieren. Wir setzen

$$(6) \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = \varrho$$

und haben

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{dw}{d\varrho}\dfrac{\partial \varrho}{\partial x} = \dfrac{x}{\varrho}\dfrac{dw}{d\varrho}, \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(\dfrac{x}{\varrho}\right)^2 \dfrac{d^2 w}{d\varrho^2} + \left(\dfrac{1}{\varrho} - \dfrac{x^2}{\varrho^3}\right)\dfrac{dw}{d\varrho} \\ \qquad = \left(\dfrac{x}{\varrho}\right)^2 \dfrac{d^2 w}{d\varrho^2} + \dfrac{y^2}{\varrho^3}\dfrac{dw}{d\varrho} \end{cases}$$

u. s. w.,

so dafs die zweite Gleichung (4) in

$$(8) \qquad k\left(\frac{d^2 w}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{dw}{d\varrho}\right) = c$$

übergeht. Integriert giebt dieselbe

$$(9) \qquad w = \frac{c}{4k}\varrho^2 + A \log \varrho + B,$$

worin A und B neue Konstanten sind.

3. Zur Bestimmung der Konstanten müssen wir die Grenzbedingungen verwenden. Es ist allgemein nach dem Vorhergehenden und § 91, (2)

$$(10) \qquad \begin{cases} X_x = p, \quad Y_y = p, \quad Z_z = p, \\ Z_y = -k\dfrac{\partial w}{\partial y} = -\dfrac{ky}{\varrho}\dfrac{dw}{d\varrho}, \\ Z_x = -\dfrac{kx}{\varrho}\dfrac{dw}{d\varrho}, \\ X_y = 0. \end{cases}$$

Die Druckkomponente nach der z-Achse für einen Punkt der Röhrenwandung, wo $\varrho = r$ sein möge, ist daher

$$(11) \qquad -Z_x\frac{x}{\varrho} - Z_y\frac{y}{\varrho} = k\frac{dw}{d\varrho}.$$

Nach § 91, (10) haben wir (bei direkter Bildung der linken Seite) zu setzen

$$(12) \qquad k\frac{dw}{d\varrho} = -\varkappa w \quad \text{für } \varrho = r$$

oder unter Benutzung von (9)

$$(13) \qquad \frac{cr}{2} + \frac{kA}{r} + \frac{c\varkappa r^2}{4k} + \varkappa A \log r + \varkappa B = 0.$$

Aufserdem mufs $A = 0$ sein, wenn w für $\varrho = 0$ nicht unendlich werden soll. Demnach finden wir

$$(14) \qquad B = -\frac{cr}{2\varkappa} - \frac{cr^2}{4k},$$

also

$$(15) \qquad w = \frac{c}{4k}(\varrho^2 - r^2) - \frac{cr}{2\varkappa}.$$

Wird noch festgesetzt, resp. beobachtet, dafs für $z = 0$ und $z = l$ die Werte $p = p_0$ und $p = p_l$ statthaben, so ergiebt sich aus (5)

$$c_1 = p_0, \quad c = \frac{p_l - p_0}{l}. \tag{16}$$

4. Das Flüssigkeitsvolumen Q, welches in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt strömt, ist

$$Q = 2\pi \int_0^r w \varrho \, d\varrho \tag{17}$$

oder nach Benutzung von (15) und (16) und Ausführung der Integration

$$Q = \pi \frac{p_0 - p_l}{8kl} \left(r^4 + 4 \frac{k}{\varkappa} r^3 \right). \tag{18}$$

Gerade diese Menge der durchfliefsenden Flüssigkeit läfst sich am leichtesten messen. Führt man die Beobachtung für verschiedene r aus (Poiseuille), so findet man, dafs die Annahme $\varkappa = \infty$ sich mit den Thatsachen am besten verträgt. Dann kann k für verschiedene Flüssigkeiten ermittelt werden.

5. Unter den mannigfachen Theorien, welche die Entstehung der Meeresströmungen zu erklären suchen, dürfte sich die von Zöppritz*) aufgestellte gegenwärtig die meiste Geltung erworben haben. Hiernach entstehen im Meere Strömungen infolge andauernd in näherungsweise gleicher Richtung wehende Winde, wie die Passatwinde. Dieselben setzen die oberste Wasserschicht in eine gleichlaufende Bewegung, und diese Bewegung teilt sich infolge der Reibung nach und nach auch den tieferen Schichten mit. Vorübergehende Änderungen in der Windrichtung werden die Strömung nur ganz oberflächlich beeinflussen, da das Vordringen der Bewegung in die Tiefe ein sehr langsames ist. Es ist nicht unsere Absicht, die etwas komplizierteren Rechnungen zu reproduzieren, mittels welcher Zöppritz dieses allmähliche Vordringen verfolgt; wir wollen nur die einfache Frage erledigen: wie bewegt sich die Wassermasse, nachdem die Strömung *stationär* geworden ist?

Wir behandeln die Aufgabe unter den gleichen Voraussetzungen wie die soeben gelöste. Die Bewegung möge in der horizontalen z-Richtung vor sich gehen; die freie Oberfläche sei wie der Meeresgrund durchaus horizontal. Die positive x-Achse sei vertikal nach unten gerichtet, der Nullpunkt liege in der Oberfläche. Nach der z-Richtung hin sei die Wassermenge unbegrenzt; in der y-Richtung kann sie ebenfalls unbegrenzt oder durch zwei zur xz-Ebene parallele Ebenen begrenzt sein. Im Falle der Begrenzung möge an den vertikalen Wänden keine Reibung stattfinden; unter allen Umständen sei die Bewegung von y unabhängig. Am Boden, der in der

*) Hydrodynamische Probleme in Beziehung zur Theorie der Meeresströmungen, Wiedemann's Ann. d. Phys. u. Chem., neue Folge, B. 3, p. 582.

Tiefe h unter der Oberfläche liege, hafte das Wasser, so dafs hier keine Bewegung stattfindet. An der Oberfläche sei infolge der Windbewegung, die sich durch Reibung dem Wasser mitteilt, eine konstante Geschwindigkeit a im Sinne der positiven z-Achse vorhanden.

Da die Schwere und der vertikale Druck auf die Oberfläche offenbar gar nicht in Betracht kommen, so können wir die Gleichungen (1), (2), (3) und (4) ohne weiteres in Anwendung bringen und sie durch die neue Relation

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \tag{19}$$

noch vereinfachen. So wird aus (4)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = c, \quad k\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = c, \tag{20}$$

worin noch $c = 0$ zu setzen ist, da keine Kraft in der z-Richtung wirkt, die eine Druckdifferenz nach dieser Richtung veranlassen könnte. Wir haben also schliefslich nur

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{21}$$

zu integrieren und finden

$$w = bx + b_1. \tag{22}$$

Da für $x = 0$ und $x = h$ resp. $w = a$ und $w = 0$ sein soll, so wird hieraus

$$w = \frac{a}{h}(h - x). \tag{23}$$

Die Geschwindigkeit nimmt also proportional zur Tiefe ab.

§ 93.

Bewegung einer festen Kugel in einer reibenden Flüssigkeit.

1. In § 88 fanden wir, dafs sich eine feste Kugel in einer nicht reibenden inkompressibeln Flüssigkeit ebenso bewegt wie im leeren Raume, nur dafs ihre Masse vergröfsert erscheint. Wir wollen jetzt auch die Bewegung der Kugel in einer reibenden Flüssigkeit untersuchen unter der Voraussetzung, dafs letztere an der Kugel haftet. Die Flüssigkeit wird nicht nur der fortschreitenden Bewegung der Kugel einen Widerstand entgegensetzen, sondern auch auf die Drehung der Kugel von Einflufs sein.

Wegen der Schwierigkeiten, denen die allgemeine Untersuchung begegnet, wollen wir die Geschwindigkeitskomponenten nebst ihren Differentialquotienten als so klein voraussetzen, dafs ihre zweiten Dimensionen vernachlässigt werden dürfen. Die Gleichungen § 91, (7) nehmen dann die Gestalt an:

$$(1)\qquad \begin{cases} \varepsilon \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + k\Delta u, \\ \varepsilon \dfrac{\partial v}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + k\Delta v, \\ \varepsilon \dfrac{\partial w}{\partial t} = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + k\Delta w, \end{cases}$$

wozu

$$(2)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

hinzukommt. In dem spezielleren Falle einer stationären Bewegung wird aus (1)

$$(3)\qquad \frac{\partial p}{\partial x} = k\Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = k\Delta v, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = k\Delta w.$$

2. Für die Gleichungen (2) und (3) läfst sich eine spezielle Lösungsgruppe angeben. Setzen wir nämlich

$$(4)\qquad p = \text{Const.}, \quad u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = 0,$$

so werden jene Gleichungen befriedigt, wenn nur W der partiellen Differentialgleichung

$$(5)\qquad \Delta W = 0$$

Genüge leistet. Für W dürfen wir also — von einem Faktor abgesehen — irgend ein Potential von Massen nehmen, welche aufserhalb des von der Flüssigkeit erfüllten Raumes liegen. So können wir z. B.

$$(6)\qquad W = \frac{c}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

also

$$(7)\qquad p = \text{Const.}, \quad u = -\frac{cy}{r^3}, \quad v = \frac{cx}{r^3}, \quad w = 0$$

setzen und haben dann eine brauchbare Lösung, wenn der Nullpunkt nicht in die Flüssigkeit fällt.

Aus den Gleichungen § 52, (13) und dem Ausdrucke § 52, (18) folgern wir leicht, dafs für konstante r, d. h. für die Punkte einer Kugelfläche, die Bewegung in einer Drehung um die z-Achse mit einer Winkelgeschwindigkeit

$$(8)\qquad \omega = \frac{c}{r^3}$$

besteht, so dafs die Punkte der Kugelfläche keine gegenseitige Verschiebung erfahren.

Denken wir uns nun in der Flüssigkeit eine feste Kugel mit dem Radius R, welche den Nullpunkt zum Mittelpunkte hat, so stellt (7) eine mögliche Flüssigkeitsbewegung dar, wenn die Kugel mit der Winkelgeschwindigkeit

$$(9)\qquad \frac{c}{R^3}$$

um die z-Achse rotiert.

Die Bewegung der Flüssigkeit besteht, wie wir sahen, in einer Rotation um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit (8) im Abstande r vom Nullpunkte. Im Unendlichen wird nicht nur die Winkelgeschwindigkeit, sondern auch die lineare Geschwindigkeit unendlich klein; die Flüssigkeit ruht im Unendlichen.

3. Um die Kugel in der angegebenen Drehung inmitten der reibenden Flüssigkeit zu erhalten, sind konstante Kräfte nötig, welche ein Drehungsmoment hervorbringen, das dem durch die Drucke der Flüssigkeit indizierten Drehungsmomente M entgegengesetzt gleich ist. Bezeichnet ds ein Oberflächenelement der Kugel, n die nach aufsen gehende Normale desselben, so ist nach § 56, (4)

$$M = \int (x Y_n - y X_n)\, ds, \tag{10}$$

wo die Integration über die ganze Kugeloberfläche auszudehnen ist. Nun ist

$$\begin{cases} Y_n = Y_x \frac{x}{r} + Y_y \frac{y}{r} + Y_z \frac{z}{r}, \\ X_n = X_x \frac{x}{r} + X_y \frac{y}{r} + X_z \frac{z}{r} \end{cases} \tag{11}$$

und nach § 91, (2) sowie dem Obigen

$$\begin{cases} X_x = p - 6kc\frac{xy}{r^5}, \quad Y_y = p + 6kc\frac{xy}{r^5}, \quad Z_z = p, \\ Y_z = Z_y = 3kc\frac{xz}{r^5}, \quad Z_x = X_z = -3kc\frac{yz}{r^5}, \\ X_y = Y_x = 3kc\frac{x^2 - y^2}{r^5}, \end{cases} \tag{12}$$

also

$$\begin{cases} Y_n = \frac{py}{r} + \frac{3kcx}{r^4}, \\ X_n = \frac{px}{r} - \frac{3kcy}{r^4}, \end{cases} \tag{13}$$

worin $r = R$ zu setzen ist. Wir haben somit

$$M = \frac{3kc}{R^4}\int (x^2 + y^2)\, ds. \tag{14}$$

Nun ist offenbar bei Ausdehnung der Integration über die Kugeloberfläche

$$\int x^2 ds = \int y^2 ds = \int z^2 ds$$

und

$$\int x^2 ds + \int y^2 ds + \int z^2 ds = R^2 \int ds = 4R^4\pi,$$

also

$$\int x^2 ds = \int y^2 ds = \int z^2 ds = \frac{4R^4\pi}{3}, \tag{15}$$

folglich

(16) $$M = 8kc\pi$$

oder nach (8)

(17) $$M = 8kR^3\pi\omega.$$

Bezeichnet J den Inhalt der Kugel, so können wir auch schreiben

(18) $$M = 6Jk\omega.$$

Das zur Unterhaltung der Bewegung notwendige Drehungsmoment ist dem Inhalte der Kugel, der Reibungskonstante der Flüssigkeit und der Winkelgeschwindigkeit der Drehung proportional.

4. Um eine mögliche geradlinige, rotationsfreie Bewegung der Kugel in der Flüssigkeit zu erhalten, denken wir uns zunächst wieder die Kugel fest, wobei ihr Mittelpunkt der Nullpunkt des Koordinatensystems sei. Unter Zuhilfenahme von (2) folgern wir aus (3) leicht

(19) $$\Delta p = 0,$$

und die Potentialtheorie bietet uns die Mittel, geeignete partikuläre Lösungen dieser Gleichung anzugeben. Ist p demgemäfs bestimmt, so wollen wir eine Funktion V aufstellen, welche der Gleichung

(20) $$\Delta V = \frac{p}{k}$$

Genüge leistet. Dann befriedigen wir die Gleichungen (2) und (3) durch die Annahme

(21) $$u = \frac{\partial V}{\partial x} + u', \quad v = \frac{\partial V}{\partial y} + v', \quad w = \frac{\partial V}{\partial z} + w',$$

worin u', v', w' so zu wählen sind, dafs

(22) $$\Delta u' = 0, \quad \Delta v' = 0, \quad \Delta w' = 0$$

und

(23) $$\frac{\partial' u}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{p}{k}$$

wird.

Eine spezielle Annahme dieser Art ist $(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$

(24) $$\frac{p}{k} = 2c\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \quad u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = -\frac{2c}{r}$$

und

(25) $$V = az + b\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + c\frac{\partial r}{\partial z};$$

Bei dieser Festsetzung folgt nämlich

(26) $$\Delta V = c\frac{\partial \Delta r}{\partial z} = 2c\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = \frac{p}{k} \quad \text{u. s. w.}$$

Hiernach ist

$$(27)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{3bxz}{r^5} - \dfrac{cxz}{r^3}, \quad v = \dfrac{3byz}{r^5} - \dfrac{cyz}{r^3}, \\ w = a + b\left(\dfrac{3z^2}{r^5} - \dfrac{1}{r^3}\right) - c\left(\dfrac{z^2}{r^3} + \dfrac{1}{r}\right). \end{cases}$$

Die Größen a, b, c sind willkürliche Konstanten; wir wollen sie so bestimmen, daß für $r = R$

$$(28)\qquad u = v = w = 0$$

wird. Dies tritt ein, wenn

$$(29)\qquad 3b = cR^2, \quad a = \frac{b}{R^3} + \frac{c}{R}$$

oder

$$(30)\qquad b = \frac{aR^3}{4}, \quad c = \frac{3aR}{4}$$

gesetzt wird. Wir haben dann

$$(31)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{3aRxz(R^2 - r^2)}{4r^5}, \quad v = \dfrac{3aRyz(R^2 - r^2)}{4r^5}, \\ w = \dfrac{a}{4}\left[\dfrac{3z^2R(R^2 - r^2)}{r^5} - \dfrac{R}{r^3}(R^2 + 3r^2) + 4\right]. \end{cases}$$

Die Gleichungen (31) stellen eine Bewegung der Flüssigkeit dar, bei welcher an der Oberfläche der Kugel Ruhe herrscht. Im Unendlichen wird

$$(32)\qquad u = v = 0, \quad w = a;$$

die Flüssigkeit bewegt sich also im Unendlichen in der Richtung der positiven z-Achse mit der Geschwindigkeit a.

Umgekehrt haben wir hiermit eine mögliche Bewegung aufgestellt, bei der die Flüssigkeit im Unendlichen ruht, während die Kugel sich mit gleichbleibender Geschwindigkeit a in der Richtung der negativen z-Achse bewegt.

5. Die Kraft, welche auf die Kugel ausgeübt werden muß, um ihr die letzterwähnte Bewegung zu erteilen, wird durch

$$(33)\qquad Z = \int Z_n ds = \int\left(Z_x \frac{x}{r} + Z_y \frac{y}{r} + Z_z \frac{z}{r}\right) ds$$

dargestellt. Nach § 91, (2) können wir hierfür schreiben

$$(34)\quad Z = \int\left[\frac{pz}{r} - \frac{k}{r}\left(x\frac{\partial u}{\partial z} + y\frac{\partial v}{\partial z} + z\frac{\partial w}{\partial z} + x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right] ds.$$

Nun ist für $r = R$, was für die Kugeloberfläche allein in Betracht kommt, nach (31)

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial z} = -\dfrac{3axz^2}{2R^4}, \quad \dfrac{\partial v}{\partial z} = -\dfrac{3ayz^2}{2R^4}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} = \dfrac{3a}{2}\left[-\dfrac{z^3}{R^4} + \dfrac{z}{R^2}\right], \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{3a}{2}\left[-\dfrac{xz^2}{R^4} + \dfrac{x}{R^2}\right], \quad \dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{3a}{2}\left[-\dfrac{yz^2}{R^4} + \dfrac{y}{R^2}\right], \end{cases}$$

so daß unter weiterer Benutzung von (24) und (30)

$$Z = -\frac{3ak}{2R}\int ds = -\frac{3ak}{2R}\cdot 4R^2\pi$$

oder

$$Z = -6akR\pi \tag{36}$$

wird.

Der Widerstand, welchen die Kugel in der reibenden Flüssigkeit erfährt, ist also bei sonst gleichen Verhältnissen der Geschwindigkeit proportional.

6. Ein mit Vorliebe behandeltes Problem ist die Untersuchung der Schwingungen eines Pendels in einer reibenden Flüssigkeit*). Man kommt hierdurch der Pendelbewegung in der Luft, trotz der Kompressibilität der letzteren, ziemlich nahe. Wir wollen annehmen, dafs das Pendel aus einer schweren, homogenen Kugel bestehe, welche an einem masselosen Faden aufgehängt ist. Das Pendel möge so kleine Schwingungen ausführen, dafs dieselben als geradlinig angesehen werden können. Die Resultate der vorigen Nummer sind dann keineswegs unmittelbar anwendbar, da es sich hier um keine gleichmäfsig schnelle Bewegung handelt.

Es liegt nicht in unserer Absicht, den Gegenstand in aller Strenge zu erledigen; es möge genügen, ein ungefähres Bild der statthabenden Verhältnisse zu geben. Zu diesem gelangen wir durch Kombination der Ergebnisse von § 88 mit den hier erlangten. Bei der nicht reibenden Flüssigkeit wird die Bewegung der Kugel lediglich in der Weise beeinflufst, dafs ihre Masse vergröfsert erscheint; dieser Einflufs macht sich nur bei ungleichförmiger Bewegung bemerklich. Wir wollen ihn den Trägheitswiderstand der Flüssigkeit nennen. Bei einer reibenden Flüssigkeit wird er allerdings einen anderen, komplizierteren Wert annehmen, als bei einer nicht reibenden. Zu diesem Trägheitswiderstand tritt nun in der reibenden Flüssigkeit ein Reibungswiderstand hinzu, welcher durch (36) bestimmt und der Geschwindigkeit proportional ist.

Die Pendelbewegung in der reibenden Flüssigkeit werden wir hiernach mit einiger Annäherung darstellen können, indem wir uns einerseits die Masse der Pendelkugel vergröfsert oder — was auf dasselbe hinausläuft — die Intensität der Schwerkraft entsprechend verringert denken, andrerseits aber noch einen der Geschwindigkeit proportionalen Reibungswiderstand in Rechnung bringen. Wir gelangen so nahezu zu der in § 8, 8, 9 erörterten Bewegung, bei der das logarithmische Dekrement eintritt.

§ 94.

Theorie der Kapillarität.

1. Wenn sich Flüssigkeiten in Gefäfsen unter alleiniger Einwirkung der Schwere im Zustande des Gleichgewichtes befinden, so machen sich

*) Das Problem wurde von Stokes, Meyer u. A. behandelt. Über die Litteratur findet man ausführliche Angaben bei Auerbach, a. a. O. p. 122 ff.

in Bezug auf die Oberflächengestaltung mehr oder weniger beträchtliche Abweichungen von den in § 78 entwickelten Gesetzen bemerklich. Namentlich wenn Teile der Gefäfse sehr eng sind, treten diese Abweichungen besonders deutlich hervor; ebenso am Rande der Flüssigkeit. Man bezeichnet die Abweichungen von den Archimedischen Gesetzen als Erscheinungen der Kapillarität und schreibt sie molekularen Kräften zu, welche in der Flüssigkeit thätig sind.

Die Theorie der Kapillarität wurde zuerst mathematisch behandelt von Laplace, dann in exakterer Weise von Gauss*). Im folgenden werden wir die Grundprinzipien in ziemlich elementarer Weise entwickeln, ohne dafs deshalb die Strenge eine wesentliche Einbufse erlitte.

2. Die Kapillaritätstheorie geht von der Hypothese aus, dafs die Teilchen der Flüssigkeit aufeinander eine Attraktion ausüben, deren genaueres Gesetz zwar unbekannt ist, die aber mit der Entfernung derart abnimmt, dafs sie bei einer mefsbaren Entfernung der Teilchen voneinander verschwindend klein wird; im übrigen soll die Gröfse dieser Attraktion nur von der Natur der Flüssigkeit abhängen, also in allen Teilen derselben die gleiche sein. Wenn zwei Flüssigkeiten aneinander grenzen, so sollen ihre Teilchen aufeinander eine Attraktion derselben Art ausüben, die von der Beschaffenheit beider Flüssigkeiten abhängt. Grenzt eine Flüssigkeit an einen festen Körper, so sollen die Teilchen des letzteren auf diejenigen der ersteren wiederum eine Attraktion der gleichen Art ausüben, die von der Beschaffenheit beider Substanzen abhängig ist.

Wir werden nun zu untersuchen haben, wie sich aus diesen noch recht vagen Hypothesen die Kapillaritätserscheinungen erklären. Dabei wollen wir der Einfachheit halber nur eine tropfbare Flüssigkeit in Betracht ziehen, die teils an feste Wände, teils an den leer zu denkenden Raum angrenzt.

3. Auf jedes Teilchen M im Inneren der Flüssigkeit, welches hinlänglich weit von allen Grenzflächen entfernt ist, wirken von allen Seiten her Attraktionen ein; nur diejenigen von ihnen sind in Betracht zu ziehen, die von Teilchen ausgehen, deren Entfernungen von M eine gewisse sehr kleine Gröfse δ nicht überschreiten. Mit δ als Radius denken wir uns um M eine Kugel beschrieben und haben nun blofs die Attraktionen zu untersuchen, welche von den in ihrem Innern — innerhalb der „Attraktionssphäre" — gelegenen Teilchen auf M ausgeübt werden. Da diese Attraktionen um M ganz symmetrisch verteilt sind und eine Kompression der Flüssigkeit ausgeschlossen ist, so wird sich eine bewegende Wirkung auf M nicht geltend machen. Die Molekularkräfte im Inneren der Flüssigkeiten kommen daher überhaupt nicht zur Geltung.

Anders gestaltet sich die Sache an einer freien Oberfläche. Die

*) Laplace, Théorie capillaire, im Supplement zum 10. Buche der Mécanique céléste; Gauss, Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii, Ges. Werke, B. 5, p. 29.

Teilchen der Flüssigkeit, deren Wirkung auf ein nicht an einer Grenzlinie gelegenes Oberflächenteilchen in Betracht kommen, füllen, von unendlich kleinen Gröfsen höherer Ordnung abgesehen, eine Halbkugel mit dem Radius δ aus*). Die Kraftwirkung, welche sie auf M ausüben, ist doppelter Art. Zunächst leuchtet ein, dafs sich die Attraktionen zu einer Resultante vereinigen, welche auf der Oberfläche normal steht und nach dem Inneren der Flüssigkeit gerichtet ist. Diese Resultante verursacht im Zustande des Gleichgewichtes einen überall gleich grofsen normalen Oberflächendruck; Ausnahmen finden an den weiter unten zu besprechenden Grenzlinien der freien Oberfläche statt.

In der Richtung der Fläche selbst tritt keine Kraft auf, welche unmittelbar eine Verschiebung von M bewirken könnte; doch macht sich infolge der gegenseitigen Anziehung der benachbarten Teilchen eine Spannung an der Oberfläche geltend, welche die letztere zusammenzuziehen bestrebt ist, und diese Spannung ist gerade für die Kapillaritätserscheinungen von der gröfsten Wichtigkeit. Soweit diese Spannung nur in der Richtung der Tangentialebene der Oberfläche der Flüssigkeit wirksam ist, wirkt sie nicht gestaltend auf diese Oberfläche ein, da sie in allen Punkten und nach allen Richtungen die gleiche ist. Allein infolge der Krümmung der Oberfläche wird auch eine normale Komponente hervorgerufen. Um diese beurteilen zu können, müssen wir uns an mehrere Resultate aus der Theorie der Krümmung der Flächen erinnern.

4. Legt man durch die Normale in einem Punkte A einer hier stetigen Fläche α beliebige Ebenen**), so schneiden sie aus der Fläche sog. Normalschnitte aus, deren jeder in A einen bestimmten Krümmungsradius besitzt. Unter letzteren möge ϱ_1 der gröfste, ϱ_2 der kleinste der Hauptkrümmungsradien sein, falls nicht alle gleich sind. Die Normalschnitte, zu welchen diese beiden Krümmungsradien gehören, stehen dann aufeinander senkrecht. Nach dem bekannten Euler'schen Satze haben wir für den Krümmungsradius ϱ eines anderen Normalschnittes, dessen Ebene mit der Ebene des Schnittes, zu dem ϱ_1 gehört, den Winkel φ bildet,

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2\varphi}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi}{\varrho_2}. \tag{1}$$

Sind ϱ und ϱ' die Krümmungsradien von irgend zwei Normalschnitten, deren Ebenen aufeinander senkrecht stehen, so ist

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{\cos^2\varphi + \cos^2(\varphi + 90^0)}{\varrho_1} + \frac{\sin^2\varphi + \sin^2(\varphi + 90^0)}{\varrho_2}$$

oder

$$\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho'} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}. \tag{2}$$

*) Die Wirkung bei der Oberfläche unendlich nahen Teilchen ist eine analoge.

**) Man findet die hier benutzten Sätze bei Joachimsthal a. a. O. p. 64 ff.

Die Summe der reciproken Werte von irgend zwei Krümmungsradien, deren Normalschnittflächen aufeinander senkrecht stehen, ist die gleiche.

5. Wir suchen jetzt die Normalkomponente der Oberflächenspannung in einem Punkte A der Flüssigkeitsoberfläche zu bestimmen. Die betreffende Komponente der Spannung, welche in der Richtung von A nach einem unendlich benachbarten Punkte B der Oberfläche*) wirkt, erhalten wir, indem wir die Gröfse der Spannung mit dem Kosinus des Winkels multiplizieren, welchen ihre Richtung mit der Normalen bildet. Dieser Winkel ist aber komplementär zu demjenigen, den die beiden in A und B errichteten Normalen des Normalschnittes, welcher durch A und B gelegt ist, miteinander bilden. Der Sinus des letzteren Winkels ist dem reciproken Werte des betreffenden Krümmungsradius umgekehrt proportional. Wir können daher die Normalkomponente der Spannung nach dieser Richtung durch $\frac{h}{\varrho}$ darstellen, worin h eine von der Richtung von AB unabhängige Konstante ist. Für die zu AB in der Oberfläche normale Richtung AC ist (für $AC = AB$ u. s. w.) die Komponente $\frac{h}{\varrho'}$, beide zusammen liefern also

$$(3)\qquad h\left(\frac{1}{\varrho}+\frac{1}{\varrho'}\right) = h\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right).$$

Führt man diese Betrachtung für alle Paare aufeinander senkrechter Richtungen aus, so erhält man als Normalkomponente der Gesamtspannung den Wert

$$(4)\qquad A\left(\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}\right),$$

worin A für alle Punkte der freien Oberfläche den gleichen Wert besitzt.

Um die Richtung der Normalkomponente festzustellen, müssen wir auf die Vorzeichen von ϱ_1 und ϱ_2 achten. Wir wollen festsetzen, dafs die Krümmungshalbmesser an der Oberfläche als positiv oder negativ gerechnet werden, wenn sie nach dem Inneren der Flüssigkeit oder nach aufsen gerichtet sind. (3) giebt dann den Wert der Komponente nach der gegen innen gerichteten Normalen. Ist die Oberfläche konvex, so geht die Komponente nach innen, ist die Oberfläche konkav, so geht jene nach aufsen; wechselt die Krümmung der Fläche nach verschiedenen Richtungen ihren Sinn, so setzt (3) ebenfalls die Richtung der Komponente fest. Bei einer ebenen Oberfläche verschwindet die normale Spannungskomponente.

Die normale Spannungskomponente ist gegen den vorhin betrachteten Normaldruck verschwindend klein; denn sie erscheint als Summe der Projektionen der einzelnen Bestandteile der Oberflächen-

---

*) In in der Linie AB denken wir uns, wie in den analogen, eine bestimmte, unendlich kleine Masse konzentriert.

spannung, die mit dem Normaldruck von gleicher Gröſsenordnung ist, auf eine Gerade, die mit den einzelnen Spannungsrichtungen Winkel bildet, welche von einem Rechten nur unendlich wenig abweichen.

6. Das gefundene Resultat setzt uns in den Stand, die Differentialgleichung der freien Oberfläche aufzustellen. Nach § 77, (4) muſs für sie

$$U = \frac{p}{\varepsilon} + \text{Const.} \tag{5}$$

sein, worin U das Potential der auf Punkte der Oberfläche wirkenden Kräfte ist. Hierin ist $U = gz$ zu setzen, wenn die z-Achse normal abwärts gerichtet ist. Für p kommt an der Oberfläche nicht die normale Druckkomponente der Molekularkräfte in Betracht, da diese konstant ist und man sie also in die Konstante eingehen lassen kann. Wohl ist aber die variable normale Komponente der Spannung zu berücksichtigen. Betrachten wir A als positiv, so ist

$$g\varepsilon z - A\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = \text{Const.} \tag{6}$$

zu setzen, wodurch wir eine Differentialgleichung für die Oberfläche haben, da für ϱ_1 und ϱ_2 die betreffenden Differentialausdrücke einzuführen sind.

Durch geeignete Wahl des Nullpunktes kann man die Konstante rechts zum Verschwinden bringen. Wir haben dann

$$g\varepsilon z - A\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) = 0; \tag{7}$$

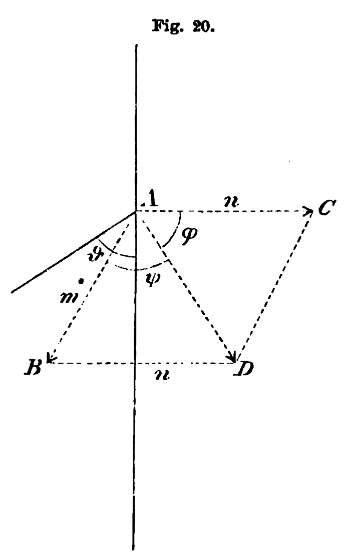
der Anfangspunkt der Koordinaten ist alsdann so gelegt, daſs er bei einer horizontalen, ebenen Oberfläche in diese fallen würde. Wir nennen in diesem Falle die xy-Ebene die Niveauebene.

7. Die festen Körper, welche die Flüssigkeit begrenzen, üben gleichfalls nur auf die unendlich benachbarten Teilchen der letzteren Attraktionen aus, deren resultierende Kraft senkrecht zur Grenzfläche steht und auf die Oberflächengestaltung, wie überhaupt auf den Gleichgewichtszustand der Flüssigkeit, ganz ohne Einfluſs ist, da sie durch den Widerstand der festen Grenze doch paralysiert wird.

Eine Ausnahmestellung in jeder Beziehung nimmt die Umgebung der Linie ein, in der Flüssigkeit, fester Körper und leerer Raum aneinander grenzen. Von den vier Kräften, welche hier auf die Flüssigkeit einwirken: Attraktion durch den festen Körper, direkte Attraktion durch die benachbarten Flüssigkeitsteilchen, Oberflächenspannung und Schwere kommen nur die beiden ersten in Betracht. Die Molekularkräfte, welche bei Teilchen, die um ein Endliches voneinander entfernt sind, verschwinden, übertreffen bei unendlicher Nähe derselben jede konstante Kraft, wie die Schwerkraft, um Unendliches. Die Oberflächenspannung ist ebenfalls, wie wir bereits sahen, verschwindend klein gegen die direkte Wirkung der Molekularkräfte, muſs also überall da vernachlässigt werden, wo die Wirkung der letzteren nicht überhaupt auſser Spiel tritt.

Sei ϑ der Winkel („Randwinkel"), welchen an einer Stelle jener Grenzlinie die freie Oberfläche der Flüssigkeit mit der festen Grenzfläche bildet, gemessen durch das Innere der Flüssigkeit hindurch. Die Komponente AB der Flüssigkeitsattraktion für die Grenzlinie halbiert dann offenbar (Fig. 22) den Randwinkel, während die Attraktion des festen Körpers (AC) normal zur Grenzfläche steht. Die Resultante AD beider Kräfte mufs im Falle des Gleichgewichtes auf der freien Oberfläche normal stehen. Wählen wir die Bezeichnung von Fig. 22 und setzen das Verhältnis der Wirkungen der Flüssigkeitsteilchen und der festen Wand gleich $m : n$, so haben wir nach dem Parallelogramm der Kräfte

Fig. 20.



$$m : n = \sin\varphi : \sin\psi, \tag{8}$$

ferner

$$\psi = 90^0 - \frac{\vartheta}{2}, \quad \psi - \frac{\vartheta}{2} + \varphi = 90^0, \tag{9}$$

also

$$\varphi = \vartheta \tag{10}$$

und somit

$$m : n = \sin\vartheta : \cos\frac{\vartheta}{2} = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} : \cos\frac{\vartheta}{2}$$

oder

$$m : n = 2\sin\frac{\vartheta}{2}. \tag{11}$$

Hierin ist allerdings $m : n$ noch von ϑ abhängig, da sich mit dem Randwinkel die Stärke der Flüssigkeitsattraktion ändert. Jedenfalls geht aber aus (11) hervor, dafs ϑ durch das Verhältnis der Attraktionskraft der Flüssigkeit und des festen Körpers bestimmt ist. So haben wir das wichtige Resultat:

Der Randwinkel, welchen die freie Oberfläche einer Flüssigkeit mit einer Grenzfläche bildet, hängt nur von der Natur der Flüssigkeit und des begrenzenden festen Körpers ab, ist also an derselben Grenzlinie, soweit der feste Körper an ihr homogen ist, konstant.

Im äufsersten Falle wird der Grenzwinkel Null, die Flüssigkeit benetzt den festen Körper. Damit dies eintritt, mufs die Attraktion der Flüssigkeitsteilchen aufeinander gegen diejenige des festen Körpers verschwindend klein sein. — Die Konstanten A (Dimension: $t^{-2}m$) und ϑ der Kapillarität sind von der Temperatur der Flüssigkeit abhängig.

Die Festsetzung des Randwinkels, der experimentell zu finden ist, tritt als Grenzbedingung bei der Lösung der Differentialgleichung (7) in Geltung.

8. Wenn die Gleichung (7) integriert werden soll, so müssen die entwickelten Werte für ϱ_1 und ϱ_2 in sie eingeführt werden. Denken wir uns die Gleichung der Oberfläche in der Form

$$z = F(x, y) \tag{12}$$

gegeben und setzen wir

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = q, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t, \end{cases} \tag{13}$$

so sind ϱ_1 und ϱ_2 die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung*)

$$\begin{cases} (rt - s^2)\varrho^2 - [(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\varrho \\ \quad + (1+p^2+q^2)^2 = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Dividieren wir diese Gleichung durch $(1+p^2+q^2)^2\varrho^2$, so erhalten wir eine Gleichung für $\frac{1}{\varrho}$, deren Lösungen daher $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ sind. Da aufserdem der Koeffizient von $\frac{1}{\varrho^2}$ der Einheit gleich gemacht wurde, so muſs der Koeffizient von $\frac{1}{\varrho}$ die negative Summe dieser beiden Lösungen darstellen. Somit haben wir

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}. \tag{15}$$

9. In speziellen Fällen nimmt dieser Ausdruck eine weit einfachere Gestalt an. Ist die Flüssigkeit von zwei parallelen, vertikalen, beiderseits sich ins Unendliche erstreckenden festen Wänden begrenzt, die zur xz-Ebene parallel laufen, so ist die Oberfläche cylindrisch. Ihre Gleichung besitzt dann die einfachere Gestalt

$$z = F(y), \tag{16}$$

so daſs

$$p = r = s = 0$$

wird. Wir haben dann

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{t}{(1+q^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\dfrac{d^2 z}{dy^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{17}$$

Dieses Resultat hätten wir auch unmittelbar durch die Bemerkung ableiten können, daſs hier $\varrho_1 = \infty$ und ϱ_2 der Krümmungsradius eines Querschnittes der Cylinderfläche ist.

Ist die Oberfläche eine Rotationsfläche, deren Rotationsachse mit der z-Achse zusammenfällt, so lautet die Flächengleichung, da z hier nur eine Funktion des Abstandes von der Achse ist,

*) S. z. B. Joachimsthal, a. a. O., p. 83.

$$z = F(\varrho), \tag{18}$$

wenn jetzt

$$\varrho^2 = x^2 + y^2 \tag{19}$$

gesetzt wird. Wir haben dann

$$\left\{\begin{aligned} & p = F'\frac{x}{\varrho}, \quad q = F'\frac{y}{\varrho}, \\ & r = F''\frac{x^2}{\varrho^2} + F'\frac{y^2}{\varrho^3}, \quad s = F''\frac{xy}{\varrho^2} - F'\frac{xy}{\varrho^3}, \quad t = F''\frac{y^2}{\varrho^2} + F'\frac{x^2}{\varrho^3} \end{aligned}\right. \tag{20}$$

und somit

$$\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{F'(1 + F'^2) + F''\varrho}{\varrho(1 + F'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{dz}{d\varrho}\left[1 + \left(\frac{dz}{d\varrho}\right)^2\right] + \varrho\frac{d^2z}{d\varrho^2}}{\varrho\left[1 + \left(\frac{dz}{d\varrho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \tag{21}$$

Der eine Hauptkrümmungsradius gehört dem Schnitte zu, welcher durch die Achse gelegt ist; er ist also

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dz}{d\varrho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{d\varrho^2}}; \tag{22}$$

für den anderen finden wir demnach

$$\frac{\varrho\left[1 + \left(\frac{dz}{d\varrho}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{dz}{d\varrho}} = \varrho\left[1 + \left(\frac{d\varrho}{dz}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{23}$$

10. Im Falle einer cylindrischen Oberfläche mit der Längsrichtung x wird aus (7)

$$g\varepsilon z - \frac{A\frac{d^2z}{dy^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0. \tag{24}$$

Wir bezeichnen den Winkel, welchen die Tangentialebene in einem Punkte der Oberfläche mit der xy-Ebene bildet*), durch φ, setzen also

$$\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dy} = \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\frac{d\varphi}{dz} \tag{25}$$

und verwandeln so (24) in

$$g\varepsilon z - A\sin\varphi\frac{d\varphi}{dz} = 0, \tag{26}$$

woraus durch Integration, bei Einführung einer Konstanten h,

$$\frac{g\varepsilon z^2}{2} = -A\cos\varphi + Ah = A(h - \cos\varphi) \tag{27}$$

folgt. Wir schreiben hierfür

*) Nach der Richtung der positiven z hin als positiv gerechnet.

(28) $$z^2 = a^2(h - \cos\varphi),$$

indem wir

(29) $$a^2 = \frac{2A}{g\varepsilon}$$

setzen.

Aus (28) können wir φ berechnen, um es in die erste Gleichung (25) einzutragen; wir erhalten dann nach Ausführung einer zweiten Integration y durch ein von z abhängendes elliptisches Integral ausgedrückt. Andrerseits können wir auch, was für die Konstantenbestimmung von Vorteil ist, aus der ersten Gleichung (25) und (28) z eliminieren und y als Funktion von φ darstellen; wir finden so

(30) $$y = \pm \frac{a}{2}\int^{\varphi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{h - \cos\varphi}}.$$

Sind die beiden Wände, welche die Flüssigkeit begrenzen, von gleichem Stoffe, wird also der Randwinkel an beiden der gleiche, und haben diese Wände die Gleichungen

(31) $$y = +e \quad \text{und} \quad y = -e,$$

so wird die Oberfläche in Bezug auf die xz-Ebene symmetrisch. Für $y = 0$ mufs $\varphi = 0$ sein, so dafs für (30) bestimmter

(32) $$y = \pm \frac{a}{2}\int_0^{\varphi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{h - \cos\varphi}}$$

zu setzen ist. Für $y = +e$ und $y = -e$ mufs φ zueinander supplementäre Werte φ_0 und $180^0 - \varphi_0$ annehmen, wo φ_0 zu dem festen Randwinkel ϑ in der einfachen Beziehung

(33) $$\varphi_0 - \vartheta = 270^0$$

steht. Während a lediglich von der Natur der Flüssigkeit abhängt, wird h aus der Gleichung

(34) $$e = \pm \frac{a}{2}\int_0^{\varphi_0} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{\sqrt{h - \cos\varphi}}$$

bestimmt. Das Vorzeichen ist in jedem Falle so zu wählen, dafs die rechte Seite positiv wird.

Auch ohne die Integration auszuführen, macht man sich leicht, falls der Randwinkel bekannt ist, einen ungefähren Begriff von der Gestalt der Oberfläche. Für $h < 1$ kann kein Teil der Oberfläche horizontal sein, das Integral eignet sich also nicht für die Darstellung des Gleichgewichtszustandes in unserem Spezialfalle. Für $h = 1$ ist die ganze Oberfläche eben, da e schon für ein unendlich kleines φ_0 jeden beliebigen Wert annimmt. In allen andern Fällen ist $h > 1$.

11. Die Gleichung (24) ist nach früheren Auseinandersetzungen nur gültig, wenn der Nullpunkt des Koordinatensystems in die freie

Oberfläche (Niveauebene) gelegt wird, welche die Flüssigkeit ohne Wirkung der Kapillarkräfte haben würde. Nun folgt aus (27) für $\varphi = 0$, d. h. für $y = 0$,

$$(35) \qquad z = \pm \sqrt{\frac{2A(h-1)}{g\varepsilon}} = \pm a\sqrt{h-1}.$$

Dieser Ausdruck giebt an, um wieviel die Mitte der Flüssigkeitsoberfläche infolge der Kapillarität über, resp. unter der Niveauebene liegt. Wann überhaupt eine Hebung, wann eine Senkung eintritt, geht aus (26) hervor. Wenn bei positivem φ mit z auch φ zunimmt, d. h. wenn die Flüssigkeitsoberfläche nach oben **konvex** ist, so ist z positiv; ist die Oberfläche nach oben **konkav**, so ist z negativ. Das erstere tritt bei einem stumpfen, das letztere bei einem spitzen Randwinkel ein. So wird z. B. Wasser zwischen zwei Glasplatten durch die Kapillarität gehoben, Quecksilber aber gesenkt. Am einfachsten ist dies experimentell nachzuweisen, wenn die Flüssigkeit zwischen den Glasplatten mit einer gröfseren Flüssigkeitsmasse aufserhalb derselben kommuniziert.

Der Wert von h hängt nach (34) bei gegebenem Randwinkel von dem Abstande $2e$ der Platten ab. Da durch Vergröfserung von h jedes Element des rechts stehenden Integrales verkleinert wird, so nimmt h, also auch $\pm z$ mit abnehmendem e zu. Ist h sehr grofs, also e sehr klein, so nähert sich e nach (34') dem Werte

$$(36) \qquad e = \pm \frac{a}{\sqrt{h}} \int_0^{\varphi_0} \cos\varphi \, d\varphi = \pm \frac{a \sin\varphi_0}{\sqrt{h}}.$$

Es wird hierdurch aus (35) näherungsweise

$$(37) \qquad z = \pm \frac{a^2 \sin\varphi_0}{e}.$$

Bei sehr kleinem Abstande der beiden Platten ist die Hebung oder Senkung der Flüssigkeit diesem Abstande nahezu umgekehrt proportional.

12. Analog sind die Resultate bei **vertikalen cylindrischen Röhren mit kreisförmiger Basis.** Wir haben hier nach (7) und (21)

$$(38) \qquad g\varepsilon z - A \frac{\frac{dz}{d\varrho}\left[1 + \left(\frac{dz}{d\varrho}\right)^2\right] + \varrho \frac{d^2 z}{d\varrho^2}}{\varrho\left[1 + \left(\frac{dz}{d\varrho}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Wir substituieren

$$(39) \qquad \frac{dz}{d\varrho} = \operatorname{tg}\varphi, \quad \frac{d^2 z}{d\varrho^2} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\frac{d\varphi}{d\varrho},$$

worin φ dieselbe Bedeutung hat wie in (25), und erhalten

$$(40) \qquad g\varepsilon z - A \frac{\sin\varphi + \varrho\cos\varphi \frac{d\varphi}{d\varrho}}{\varrho} = 0$$

oder bei Benutzung von (29)

$$z = \frac{a^2}{2\varrho}\left(\sin\varphi + \varrho\cos\varphi\frac{d\varphi}{d\varrho}\right) = \frac{a^2}{2\varrho}\,\frac{d(\varrho\sin\varphi)}{d\varrho}. \tag{41}$$

Die weitere Berechnung läfst sich bei geeigneten Vernachlässigungen durchführen. Da indessen die ungefähre Gestalt der Oberfläche nach dem Vorhergehenden an sich einleuchtend ist, überhaupt die Verhältnisse ganz ähnlich wie in den vorhergehenden Nummern sind, so begnügen wir uns mit der Berechnung der Steighöhe infolge der Kapillarität. Auch diese wollen wir nur für eine die Wand benetzende Flüssigkeit und zwar für den Rand aufsuchen. Ist R der Radius der cylindrischen Röhre, so erhalten wir in unserem Falle aus (41)

$$z = \frac{a^2}{2R}. \tag{42}$$

Man ersieht hieraus, dafs in diesem Falle die Steighöhe dem Radius der Röhre umgekehrt proportional ist.

13. Die Theorie der Kapillarität löst noch eine Reihe von interessanten Problemen, auf die wir jedoch nicht weiter eingehen wollen. Insbesondere gehört auch die Tropfenbildung hierher. Dafs für eine Flüssigkeit, auf welche keine Kräfte einwirken und welche an keinen festen Körper angrenzt, die Kugel infolge der Gleichheit der Normalkomponenten der Oberflächenspannung eine Gleichgewichtsfigur bildet, ist einleuchtend. Unschwer läfst sich auch die Gestalt eines Tropfens feststellen, der an die ebene Fläche eines festen Körpers angrenzt. Wir können um so eher auf die rechnende Behandlung derartiger Probleme verzichten, da man sich sehr leicht auch ohne eine solche von der resultierenden Gleichgewichtsgestalt eine Vorstellung machen kann, wenn man nur den konstanten Randwinkel in Betracht zieht.

Achter Abschnitt.

Aeromechanik.

§ 95.

Einleitung.

1. Die Aeromechanik, die Mechanik der gasförmigen Flüssigkeiten, steht mit der Hydromechanik im engsten Zusammenhange, soweit sie sich lediglich auf Beobachtungsthatsachen, nicht auf Hypothesen über die Bewegungen der Atome stützt. Die dynamische Gastheorie, welche den letzteren Weg einschlägt, soll nicht in den Bereich unserer Untersuchungen gezogen werden, entsprechend dem Charakter der meisten übrigen Entwicklungen, welche wir in diesem Buche geben.

Die auf Beobachtungsthatsachen begründete Aeromechanik geht von denselben Annahmen über Flüssigkeiten aus, welche der Hydromechanik zu Grunde liegen. Sie hat also mit dieser die Grundgleichungen gemein, bei denen man auch, wie dort, die Reibung in Rechnung bringen kann. Die einzige Ausnahme bildet die geänderte Beziehung zwischen Druck und Dichtigkeit. Die Gleichung der Inkompressibilität kommt in Wegfall, um durch eine Gleichung ersetzt zu werden, welche die Dichtigkeit in einem Punkte als Funktion des Druckes in diesem darstellt.

2. Wie schon in § 76 hervorgehoben wurde, pflegt das bekannte Mariotte'sche Gesetz der Aeromechanik zu Grunde gelegt zu werden. Dasselbe sagt aus, dafs die Dichtigkeit in einem Punkte dem daselbst herrschenden Drucke proportional sei, dafs mithin die Beziehung

$$p = c\varepsilon = a^2\varepsilon \tag{1}$$

stattfindet, worin c oder a^2 eine für das Gas charakteristische positive Konstante bedeutet. Die Kontinuitätsgleichung § 76, (7) wird hiernach

$$\frac{dp}{dt} + p\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \tag{2}$$

Das Mariotte'sche Gesetz ist nach den sehr zahlreichen darüber angestellten Experimentaluntersuchungen nicht in vollkommener Strenge gültig. Bei starkem Druck nimmt das Volumen der Gase meistens stärker ab, als das Gesetz vorschreibt, während bei schwachem Druck das Ver-

halten der Gase dem durch das Gesetz vorgeschriebenen am nächsten kommt. Wir ziehen die Abweichungen von dem Gesetze nicht in den Bereich unserer Betrachtungen.

§ 96.

Statik einer schweren gasförmigen Flüssigkeit.

1. In der Aerostatik, welche sich mit dem Gleichgewichte gasförmiger Flüssigkeiten zu beschäftigen hat, kommen die Resultate von § 77 zur Anwendung. Gleichgewicht ist auch bei Gasen nur möglich, wenn die wirkenden Kräfte eine Kräftefunktion besitzen. Aus den Gleichungen § 77, (1) wird durch § 95, (1)

$$X = \frac{a^2}{p}\frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{u. s. w.,} \tag{1}$$

und die Kräftefunktion lautet

$$U = a^2 \int \frac{dp}{p} = a^2 \log p + \text{Const.} \tag{2}$$

Die Niveauflächen von U sind hier nicht nur Flächen gleichen Drucks, sondern nach § 95, (1) auch Flächen gleicher Dichtigkeit.

2. Wir können hiernach leicht berechnen, wie auf einem als eben zu betrachtenden Teile der Erdoberfläche der Luftdruck und die Luftdichtigkeit mit der Höhe abnimmt. Denken wir uns die x-Achse vertikal nach oben gerichtet, so ist das Potential der Schwerkraft

$$U = -gx. \tag{3}$$

Aus (2) wird daher

$$gx + a^2 \log p + \text{Const.} = 0. \tag{4}$$

Verlegen wir den Nullpunkt des Koordinatensystems in die Erdoberfläche und setzen fest, dafs hier der Druck p_0 und die Dichtigkeit ε_0 herrschen möge, so dafs also

$$a^2 \log p_0 + \text{Const.} = 0 \tag{5}$$

ist, so nimmt (4) die Gestalt

$$gx = a^2 \log \frac{p_0}{p} \tag{6}$$

oder, da

$$a^2 = \frac{p_0}{\varepsilon_0} \tag{7}$$

ist,

$$x = \frac{p_0}{g\varepsilon_0} \log \frac{p_0}{p} \tag{8}$$

oder

$$p = p_0 e^{-\frac{\varepsilon_0 g x}{p_0}}, \qquad \varepsilon = \varepsilon_0 e^{-\frac{\varepsilon_0 g x}{p_0}} \tag{9}$$

an.

Der Logarithmus des Luftdrucks oder der Luftdichtigkeit ist also der Höhe über dem Horizont umgekehrt proportional. Die Abnahme des Drucks mit der Höhe ist desto stärker, je gröſser die Beschleunigung der Schwerkraft ist.

Die gefundenen Formeln, welche die Grundlage der barometrischen Höhenmessung bilden, nehmen keine Rücksicht auf die Abnahme der Intensität der Schwerkraft wie auch der Änderung der Temperatur mit der Höhe. Auch wird vorausgesetzt, daſs sich die Luft wie ein einheitliches Gas verhalte, was nach Dalton's Ansicht*) nicht der Fall ist.

Nimmt man das spezifische Gewicht der Luft bei 0,76 m Barometerstand und einer Temperatur von 0^0 zu 0,001293 an, während das spezifische Gewicht des Quecksilbers 13,596 beträgt und $g = 9{,}809$ ist, so berechnet man (Maſseinheiten: Meter und Sekunde)

$$a^2 = \frac{9{,}809 \,.\, 13{,}596 \,.\, 0{,}76}{0{,}001293} = 78\,388,$$

also

$$a = 280,$$

$$\frac{\varepsilon_0 g}{p_0} = 0{,}0001251,$$

$$\frac{p_0}{g\varepsilon_0} = 7991{,}5.$$

3. Die Formel (9) liefert keine obere Grenze für die Atmosphäre; vielmehr hat ε für beliebig groſse x noch einen von Null verschiedenen Wert. Inwiefern sich die Atmosphäre der Erde gegen den Himmelsäther abgrenzt, ist eine unerledigte Frage (vgl. § 97).

Die Masse der unendlichen Luftsäule, welche sich über einer Grundfläche q erhebt, ist trotz der (theoretisch) unendlichen Höhe eine endliche. Wir haben nämlich für sie

$$M = q\int_0^\infty \varepsilon\, dx = q\varepsilon_0 \int_0^\infty e^{-\frac{\varepsilon_0 g x}{p_0}}\, dx$$

oder

$$(10) \qquad M = \frac{q p_0}{g}, \quad p_0 = \frac{Mg}{q}.$$

Man ersieht hieraus, daſs der Druck an irgend einer Stelle der Masse der über der Flächeneinheit lagernden Luftschicht und der Beschleunigung der Schwere direkt proportional ist.

4. Wenn ein fester Körper in eine schwere gasförmige Flüssigkeit eingetaucht ist, so bleibt das in § 78 entwickelte Archimedische Prinzip vollkommen in Gültigkeit. Die am angeführten Orte angestellten Untersuchungen über die horizontalen Komponenten der Flüssigkeitsdrucke gegen die Körperoberfläche werden nämlich in keiner Weise modifiziert.

---

*) Eingehendes über diesen Gegenstand s. bei F. Neumann, Einleitung in die theoretische Physik, herausg. von Pape, Leipzig 1883.

Dagegen tritt an Stelle der Gleichung § 78, (4), welche die Differenz der Drucke auf die horizontalen Grundflächen einer vertikalen Säule bestimmt, eine andere Beziehung. Nach (9) haben wir nämlich für diese Druckdifferenz, wenn x_0 und x_1 die Höhe der oberen und der unteren Grundfläche $d\sigma'$ über einer beliebigen Horizontalebene bezeichnen, für welche $p = p_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ ist,

$$(11) \qquad p_0 \left(e^{-\frac{\varepsilon_0 g x_1}{p_0}} - e^{-\frac{\varepsilon_0 g x_0}{p_0}}\right) d\sigma'.$$

Andrerseits wird die Masse der Gasmenge, welche die Säule bei Abwesenheit des festen Körpers anfüllen würde, durch

$$d\sigma' \int_{x_1}^{x_0} \varepsilon\, dx = d\sigma' \varepsilon_0 \int_{x_1}^{x_0} e^{-\frac{\varepsilon_0 g x}{p_0}} dx$$

oder

$$(12) \qquad \frac{p_0}{g} \left(e^{-\frac{\varepsilon_0 g x_1}{p_0}} - e^{-\frac{\varepsilon_0 g x_0}{p_0}}\right) d\sigma'$$

dargestellt. Will man den Druck dieser Gassäule auf ihre Unterlage ermitteln, so mufs man gemäfs (10) ihre Masse mit g multiplizieren. Aus dem Vergleich von (11) und (12) geht hervor:

Jeder in eine gasförmige Flüssigkeit eingetauchter fester Körper verliert an Gewicht so viel, wie die verdrängte Flüssigkeitsmasse beträgt.

§ 97.

Statik zentrischer Gasmassen.

1. Wir wollen hier das Gleichgewicht von Gasmassen untersuchen, welche eine mehr oder weniger kugelförmige Gestalt aufweisen. Zunächst vervollständigen wir die Betrachtungen von § 96 durch die Behandlung des Gleichgewichtes der Erdatmosphäre, unter der Voraussetzung, dafs die Erde eine aus homogenen konzentrischen Schichten zusammengesetzte Kugel ist. Die Attraktion der Atmosphäre selbst kann dabei als unbedeutend vernachlässigt werden. Das Potential lautet hier, wenn r den Abstand vom Erdmittelpunkte bezeichnet,

$$(1) \qquad U = \frac{K}{r},$$

wo K so zu bestimmen ist, dafs an der Erdoberfläche (für $r = R$) die Attraktion mit g identisch wird; es ist daher

$$(2) \qquad \frac{K}{R^2} = g, \quad \text{also } K = gR^2$$

zu setzen, und wir haben

$$(3) \qquad U = \frac{gR^2}{r}.$$

Aus § 96, (2) und (7) folgt dann, wenn an der Erdoberfläche der Druck p_0 herrscht,

$$gR\left(1-\frac{R}{r}\right)=\frac{p_0}{\varepsilon_0}\log\frac{p_0}{p} \tag{4}$$

oder

$$p=p_0 e^{-\frac{gR\varepsilon_0}{p_0}\left(1-\frac{R}{r}\right)}. \tag{5}$$

Für $r=\infty$ wird

$$p_\infty=p_0 e^{-\frac{gR\varepsilon_0}{p_0}}, \tag{6}$$

der Druck also und damit die Dichtigkeit endlich.

Setzt man die in § 96, 2 berechneten Werte und $R=6\,366\,197$ m ein, so erhält man $\frac{gR\varepsilon_0}{p_0}=796{,}62$,

$$p_\infty=\frac{p_0}{9{,}33\,.\,10^{345}},\quad \varepsilon_\infty=\frac{\varepsilon_0}{9{,}33\,.\,10^{345}}. \tag{6a}$$

Dieser überaus geringe Wert würde, wenn die Voraussetzungen der Rechnung alle zutreffend wären, die Dichtigkeit des Weltäthers angeben.

2. Wir wollen nunmehr die Aufgabe auch unter der Voraussetzung behandeln, daſs die Erde eine Rotation mit der Winkelgeschwindigkeit ω ausführt, die sich auch der umgebenden Atmosphäre mitgeteilt hat. Freilich ist diese Annahme nur in beschränktem Maſse zulässig, da eine Flüssigkeit nicht in derselben Weise rotieren kann wie ein fester Körper. Nach § 79, (1) haben wir bei Anwendung der gleichen Bezeichnung

$$U=\frac{K}{r}+\frac{\omega^2}{2}(y^2+z^2) \tag{7}$$

und erhalten so

$$\frac{K}{r}+\frac{\omega^2}{2}(y^2+z^2)=\frac{p_0}{\varepsilon_0}\log p+\text{Const.} \tag{8}$$

Setzen wir

$$y^2+z^2=r^2\cos^2\varphi, \tag{9}$$

so daſs für einen Punkt der Erdoberfläche φ die geographische Breite bezeichnet, und bestimmen wir, daſs für $r=R$, $\varphi=\pm 90^0$, also für einen Pol $p=p_0$ und $\varepsilon=\varepsilon_0$ sei, während g_0 die Beschleunigung der Schwere am Pole bezeichnet, so wird bei Rücksicht auf (2) aus (8)

$$\log\frac{p_0}{p}=\frac{\varepsilon_0}{p_0}\left[g_0 R\left(1-\frac{R}{r}\right)-\frac{\omega^2 r^2\cos^2\varphi}{2}\right] \tag{10}$$

oder

$$p=p_0 e^{-\frac{\varepsilon_0}{p_0}\left[g_0 R\left(1-\frac{R}{r}\right)-\frac{\omega^2 r^2\cos^2\varphi}{2}\right]}. \tag{11}$$

Für $r=R$ haben wir insbesondere

$$p=p_0 e^{\frac{\varepsilon_0\omega^2 R^2\cos^2\varphi}{2p_0}}. \tag{11a}$$

Setzen wir für die rechts auftretenden Konstanten die bereits benutzten

Werte ein (s. auch § 20, 2), so erhalten wir für $\varphi = 0$, d. h. für einen Punkt des Äquators, wenn wir von der Abplattung der Erde absehen:

$$p = p_0 \,.\, 3{,}954, \tag{11b}$$

d. h. einen ganz unmöglichen Wert. Bei Rücksicht auf die Abplattung ergiebt sich gleichfalls ein unbrauchbarer Wert. Noch paradoxer werden die Resultate, wenn man für r grösere Werte nimmt. Ausser für $\varphi = 90^0$ wird p im Unendlichen unendlich. Die Annahme einer Atmosphäre, welche, bis in die höheren Schichten mit dem Erdkörper fest verbunden, die Erdrotation mitmacht, ist eben unzulässig.

3. Sehr leicht ist das Problem der atmosphärischen Ebbe und Flut zu erledigen. Die in Betracht kommenden Niveauflächen sind genau dieselben wie die in § 80 für das Wasser abgeleiteten. Diese Niveauflächen sind Flächen gleichen Drucks und gleicher Dichtigkeit. Nach den Resultaten von § 80 hat die Luft zur Zeit der Mond-, resp. Sonnenflut in einer Höhe von 0,55 m, resp. 0,24 m über dem Erdboden dieselbe Dichtigkeit, wie zur Zeit der Ebbe auf dem Erdboden. Der Barometerstand erhöht sich daher zur Zeit der beiden Fluten im Vergleich zur Ebbe um einen Betrag, welcher dem Drucke einer Luftschicht (von der an der Erdoberfläche herrschenden Dichtigkeit) von 0,55 m, resp. 0,24 m Höhe entspricht. Man berechnet für diese barometrischen Differenzen:

Mondflut: 0,052 Millimeter,
Sonnenflut: 0,023 Millimeter.

Diese Beträge sind so gering, dass ein Nachweis der atmosphärischen Gezeiten durch Beobachtung kaum möglich erscheint; doch liefert auch hier die von Laplace behandelte dynamische Theorie weit grösere Werte.

4. Von besonderer Wichtigkeit für die Frage nach der Möglichkeit gasförmiger Himmelskörper ist die Untersuchung, ob ein Gas sich selbst durch die Attraktion seiner Teile nach dem Newton'schen Gesetze in einem Gleichgewichtszustande halten kann, ohne sich zu unendlich geringer Dichtigkeit zu verdünnen. Wir gehen von der Annahme aus, dass das Gas sich kugelförmig anordnet, so dass in gleicher Entfernung r von einem Zentrum, welches der Nullpunkt des Koordinatensystems sein möge, der gleiche Druck und also auch die gleiche Dichtigkeit herrscht*).

Um die Attraktion der Gesamtgasmasse auf einen Punkt zu finden, welcher die Entfernung r vom Zentrum hat, brauchen wir nur die Masse M des Gases in Betracht zu ziehen, welches innerhalb der mit dem Radius r um das Zentrum beschriebenen Kugel liegt (§ 37, 2); die Attraktion beträgt, wenn f die Attraktion der Masseneinheit in der Einheit der Entfernung bezeichnet (vgl. § 9),

$$-\frac{Mf}{r^2}. \tag{12}$$

Für M haben wir

*) Der Gegenstand wurde von Zöllner in seinem Werke: „Über die Natur der Kometen" behandelt.

$$M = 4\pi \int_0^r \varepsilon r^2 dr = \frac{4\pi}{a^2} \int_0^r p r^2 dr. \tag{13}$$

Wollen wir das Potential U dieser Attraktion bestimmen, so müssen wir über (12) nach r integrieren; wir finden

$$U = -\frac{4\pi f}{a^2} \int \frac{dr}{r^2} \int_0^r p r^2 dr, \tag{14}$$

wobei es auf eine additive Konstante nicht ankommt. Aus § 96, (2) folgt

$$\frac{4\pi f}{a^2} \int \frac{dr}{r^2} \int_0^r p r^2 dr + a^2 \log p + \text{Const.} \tag{15}$$

und hieraus durch Differentiation nach r

$$\frac{4\pi f}{a^2 r^2} \int_0^r p r^2 dr + \frac{a^2}{p} \frac{dp}{dr} = 0. \tag{16}$$

Multiplizieren wir mit r^2 und differentiieren nochmals nach r, so gelangen wir zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{p} \left(\frac{dp}{dr}\right)^2 + \frac{4\pi f p^2}{a^4} = 0. \tag{17}$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung ist nicht bekannt; dasselbe könnte wegen seiner beiden Konstanten zwei Grenzbedingungen genügen; es könnte z. B. die Dichtigkeit oder der Druck auf zwei konzentrischen Kugelflächen, welche die Grenze bildeten, vorgeschrieben sein. Sehr leicht ist es aber, spezielle Integrale anzugeben, welche einer freien Gasmasse entsprechen. Wir versuchen es zunächst mit

$$p = \text{Const.};$$

aus (17) folgt unmittelbar, dafs dann

$$p = 0 \tag{18}$$

sein müsste. Eine gleichmäfsige Ausbreitung eines Gases, welches dem Mariotte'schen Gesetze genügt, ist also bei endlichem Druck und endlicher Dichte nicht möglich.

Eine weitere Lösung, welche sich den Verhältnissen eines unbegrenzten, von festen Körpern freien Raumes sehr wohl anpafst, ist

$$p = \frac{a^4}{2\pi f r^2}, \tag{19}$$

was leicht zu verifizieren ist. Der Druck, und damit die Dichtigkeit, nimmt umgekehrt proportional zu dem Quadrate des Abstandes vom Zentrum ab. Aus (13) folgt für die Masse innerhalb der Kugel mit dem Radius r

$$(20) \qquad M = \frac{2a^2}{f}\int_0^r dr = \frac{2a^2 r}{f}.$$

Im Zentrum werden Druck und Dichtigkeit unendlich grofs; doch umfafst eine endliche Kugel nur eine endliche Gasmenge, während die Gesamtmenge im unendlichen Raume unendlich ist. Da eine unendliche Dichte eines Gases nicht denkbar ist, so mufs angenommen werden, dafs in der Nachbarschaft des Zentrums eine Kondensation des Gases stattfindet.

§ 98.

Ausflufs von Gasen aus Gefäfsen.

1. Bei der Behandlung aerodynamischer Aufgaben müssen wir uns daran erinnern, dafs ein Teil der Fundamentalrelationen der Hydrodynamik auch auf kompressible Flüssigkeiten Anwendung findet. So bleibt die in § 82 abgeleitete Unterscheidung von drehender und nicht drehender Flüssigkeitsbewegung auch für Gase in Geltung. Das gleiche gilt für das Flüssigkeitspotential, wenn nur beachtet wird, dafs die Gleichung § 83, (3), welche durch Umformung der Gleichung der Inkompressibilität hergeleitet wurde, durch eine andere ersetzt werden mufs. Dieselbe geht aus § 81, (7a) oder (8) hervor, wobei p statt ε eingeführt werden kann; wir finden

$$(1) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}{\partial z} = 0$$

oder

$$(2) \qquad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\Delta\varphi = 0.$$

Die Gleichung § 83, (2)

$$(3) \qquad U - P = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + C$$

bleibt in Gültigkeit; es ist in ihr nach § 81, (6)

$$(4) \qquad P = \int\frac{dp}{\varepsilon} = a^2\int\frac{dp}{p} = a^2\log p + \text{Const.}$$

zu nehmen.

2. Die Gleichung (3) giebt uns die Möglichkeit, die Ausflufsgeschwindigkeit eines Gases zu berechnen. Im Gegensatz zu der Rechnung bei inkompressibeln Flüssigkeiten wollen wir den Druck aufser acht lassen, welchen das Gas durch seine eigene Schwere erfährt; infolge des geringen spezifischen Gewichtes der Gase kann dieser Druck in der That bei einer Gasmenge von nicht zu grofser Ausdehnung vernachlässigt werden; auch möge keine Kraft aufser dem Oberflächendruck wirken. Das Gas befinde sich in einem Gefäfse mit überall festen Wänden, die

nur eine Ausflufsöffnung besitzen; im Inneren sei der Gasdruck konstant $= p$, im Äufseren $= p_0$. Die Anordnung möge so getroffen sein, dafs wenigstens während einer kürzeren Zeit die Bewegung als stationär betrachtet werden kann; ein Geschwindigkeitspotential möge als vorhanden angenommen werden.

Die Gleichung (3) nimmt die Gestalt an (die Konstante ist natürlich hier von t unabhängig)

$$(5) \qquad -a^2 \log p = \frac{v^2}{2} + \text{Const.},$$

wenn v die Geschwindigkeit in irgend einem Punkte bedeutet. Ist nun v im Inneren des Gefäfses verschwindend klein, so folgt

$$(6) \qquad \text{Const.} = -a^2 \log p_1,$$

also für v an der Stelle des Ausflusses

$$(7) \qquad -a^2 \log p_0 = \frac{v^2}{2} - a^2 \log p_1$$

oder

$$(8) \qquad \frac{v^2}{2} = a^2 \log \frac{p_1}{p_0}.$$

Da $a^2 = \frac{p_0}{\varepsilon_0}$ der Dichtigkeit des Gases, bezogen auf den gleichen Druck, umgekehrt proportional ist, so folgt das Gesetz:

Die Dichtigkeit zweier Gase bei demselben Druck ist dem Quadrate ihrer Ausflufsgeschwindigkeit unter sonst gleichen Verhältnissen umgekehrt proportional.

3. Beim wirklichen Ausströmen eines Gases aus einem Gefäfse nimmt der innere Druck beständig ab. Das gefundene Gesetz bleibt jedoch trotzdem für einen kürzeren Zeitraum näherungsweise in Richtigkeit. Wir denken uns nun zwei Gase, welche die Dichtigkeiten ε und ε' besitzen, beide unter gleichem Druck in übereinstimmende Gefäfse eingeschlossen sind und aus diesen unter gleichen Umständen ausströmen. Wir untersuchen die Zeiten, welche dieselbe kleine Gasmenge in beiden Fällen gebraucht, um auszuströmen; dabei bemerken wir, dafs nach Ausflufs dieser Mengen in beiden Gefäfsen wieder der gleiche Druck herrscht. Die Zeitdauer des Ausströmens ist nun *ceteris paribus* der Ausflufsgeschwindigkeit umgekehrt, also nach dem Vorhergehenden der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit (unter gleichem Druck) direkt proportional. Da dieses Gesetz für den Ausflufs jeweilig entsprechender Gasmengen gilt, so behält es auch für die gesamte Dauer des Ausflusses seine Gültigkeit. So gelangen wir zu dem wichtigen Gesetze, welches von Bunsen als vorzügliches Mittel zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes von Gasen benutzt wurde:

Die Dichtigkeiten zweier Gase verhalten sich ***ceteris paribus*** wie die Quadrate ihrer Ausflufszeiten.

§ 99.

Die Schallschwingungen in gasförmigen Flüssigkeiten.

1. Es mufs von vornherein erwartet werden, dafs in kompressibeln Flüssigkeiten ähnliche Wellenbewegungen wie in elastisch festen Körpern möglich sind; ihre Untersuchung bildet einen der wichtigsten Teile der Aerodynamik. Wir machen die Annahme, dafs die Bewegung ein Geschwindigkeitspotential besitze und dafs die Verschiebungen eines Teilchens der unbegrenzten und keiner Kraft unterworfenen elastischen Flüssigkeit nur sehr kleine seien, so dafs auch die Geschwindigkeiten in jedem Augenblicke als sehr klein betrachtet werden können. Bei diesen Voraussetzungen darf in der Gleichung § 98, (3) das Quadrat der Geschwindigkeit als unendlich kleine Gröfse zweiter Ordnung vernachlässigt werden, so dafs wir unter Benutzung von § 98, (4) die einfache Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \log p = \text{Const.} \tag{1}$$

erhalten.

Diese Gleichung vereinfacht sich noch weiter, wenn wir die Kleinheit der Dichtigkeitsänderungen unter den vorausgesetzten Verhältnissen in Betracht ziehen. Wir können

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \sigma) \tag{2}$$

setzen, worin σ als die Verdichtung der Flüssigkeit bezeichnet werden kann und eine sehr kleine Gröfse ist. Alsdann folgt aus

$$p = a^2 \varepsilon = a^2 \varepsilon_0 (1 + \sigma) \tag{3}$$

bei Vernachlässigung der Potenzen von σ

$$\log p = \log a^2 \varepsilon_0 + \log (1 + \sigma) = \log a^2 \varepsilon_0 + \sigma, \tag{4}$$

und (1) geht in

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \sigma = \text{Const.} \tag{5}$$

über. Verfügen wir in geeigneter Weise über eine willkürlich φ additiv zuzufügende Funktion von t, so kann die Konstante zum Verschwinden gebracht werden, und wir erhalten

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + a^2 \sigma = 0. \tag{6}$$

2. Die Gleichung § 98, (2) kann, weil die Gröfsen

$$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} = a^2 \varepsilon_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{u. s. w.,} \quad \sigma \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{u. s. w.} \tag{7}$$

als unendlich klein von der zweiten Ordnung angesehen werden dürfen, in die Form

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \Delta \varphi = 0 \tag{8}$$

gesetzt werden. Differentiiert man (6) nach t und eliminiert $\frac{\partial \sigma}{\partial t}$ mittels (8), so ergiebt sich endlich

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi. \tag{9}$$

Ist φ gemäfs (9) bestimmt, so sind die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, sowie auch nach (6) σ unmittelbar bekannt.

3. Die Integration von (9) läfst sich allgemein ausführen. Wir schreiben statt dieser Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{10}$$

und übersehen sofort, dafs wir ganz analog wie in § 47, 1, 2 verfahren können. Wir setzen

$$\varphi = \psi(Ax + By + Cz + Dt) \tag{11}$$

und erhalten durch Einfügen in (10) die Bedingung

$$A^2 + B^2 + C^2 - \frac{D^2}{a^2} = 0, \tag{12}$$

durch die (11) in

$$\varphi = \psi(Ax + By + Cz \pm a\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\, t) \tag{13}$$

übergeht. Jede Summe von Funktionen (13), in denen A, B, C ganz willkürlich genommen werden, bildet eine Lösung von (10).

4. Zunächst wollen wir die Bewegung für den Fall diskutieren, dafs die Lösung von (10) die einfache Form (13) besitzt, wo rechts vor a das Minuszeichen gewählt werden möge, während a selbst positiv oder negativ sein kann. Geben wir t einen festen Wert, so erhält φ den gleichen Wert für alle Punkte x, y, z, welche einer Gleichung

$$Ax + By + Cz = \text{Const.} \tag{14}$$

genügen, also auf einer Ebene liegen, welche zu einem Systeme von unendlich vielen Parallelebenen gehört. Der Einfachheit halber wollen wir die z-Achse normal zu diesen Ebenen annehmen, wodurch $A = B = 0$ wird; dann geht (13) in

$$\varphi = \psi(z - at) \tag{15}$$

über.

Der Vergleich mit § 73, (7) zeigt, dafs (15) eine Wellenbewegung mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit a nach der Richtung der z-Achse darstellt. Aus (15) und (6) folgt

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = w = \psi'(z - at), \\ \sigma = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{1}{a}\psi'(z - at), \end{cases} \tag{16}$$

so dafs

$$\sigma = \frac{w}{a} \tag{17}$$

ist. Die Bewegung eines Teilchens geht also in der Richtung der z-Achse, d. h. der Fortpflanzungsrichtung der Wellen vor sich. Die Verdichtung ist der jeweiligen Geschwindigkeit proportional.

In § 75 fanden wir für einen isotropen elastisch festen Körper eine doppelte Art der Wellenbewegung; es sind hier longitudinale und transversale Wellen möglich, die sich mit verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. In einer elastischen Flüssigkeit können nur longitudinale Wellen entstehen.

Die allgemeinere Lösung von (12) setzt sich aus einer beliebigen Zahl von Bewegungen der besprochenen Art zusammen; die Fortpflanzungsrichtung ist bei den Einzelbewegungen ganz beliebig. Dagegen ist der absolute Betrag der Fortpflanzungsgeschwindigkeit bei allen derselbe, nämlich $\pm a$. Weiter ist nach § 95, (1)

$$a = \sqrt{\frac{p}{\varepsilon}}; \tag{18}$$

dies giebt das Gesetz: Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellenbewegung in zwei verschiedenen Gasen ist der Quadratwurzel aus der Dichtigkeit, welche sie bei gleichem Druck besitzen, umgekehrt proportional. Eine Änderung des Druckes führt bei demselben Gase keine Änderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit herbei.

5. Aus (18) findet man nach § 96, 2 als Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen in der atmosphärischen Luft bei einer Temperatur von 0^0 Celsius:

$$a = 280 \text{ Meter für die Sekunde}, \tag{19}$$

während die Beobachtungen c. 332 Meter liefern. Dieser bedeutende Unterschied erklärt sich durch die Temperaturänderungen, welche die Verdichtung und Verdünnung der Luft hervorruft*). Der berechnete Wert ist bei der Luft mit $\sqrt{1{,}405}$ zu multiplizieren, worin 1,405 das Verhältnis der spezifischen Wärme der Luft bei konstantem Druck zur spezifischen Wärme bei konstantem Volumen ist. Wir können diesen Gegenstand, welcher in die Wärmelehre gehört, hier nicht weiter verfolgen.

6. Wie wir schon in § 73 hervorhoben, empfindet das Ohr ihm mitgeteilte, periodische Schwingungen von nicht zu grofser oder zu kleiner Schwingungsdauer als Töne. Diese Töne müssen durch ein Medium, welches im stande ist eine Wellenbewegung auszuführen, von der Erregungsstelle zum Ohre fortgeleitet werden, und zwar durch longitudinale Wellen. Die elastisch festen Körper sind, wie aus § 75 hervorgeht, hierzu geeignete Medien. Das gleiche gilt von den elastischen Flüssig-

*) Laplace, Mécanique céleste, T. V, Livre XII.

keiten. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist nach dem Vorhergehenden von der Dichtigkeit der Flüssigkeit für einen gewissen Normaldruck, nicht aber von dem Drucke abhängig. Bei der Berechnung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Töne in der Luft braucht daher der Barometerstand nicht in Betracht gezogen zu werden. Dagegen ist die Temperatur von Einfluſs, da sie nach dem Gay-Lussac'schen Gesetze die Dichtigkeit unabhängig vom Drucke ändert (vgl. auch die vorige Nummer). Für hohe und tiefe Töne sollte nach der Theorie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit die gleiche sein; doch stimmt dies nicht vollkommen zu den Beobachtungen.

7. Durch geeignete Kombination mehrerer Funktionen φ vom Typus (13) läſst sich eine Bewegung herstellen, welche lediglich eine Funktion der Zeit und des Abstandes r (in der Gleichgewichtslage) von einem festen Punkte ist, den wir zum Nullpunkte des Koordinatensystems nehmen wollen. Diese Bewegung ist jedoch am einfachsten aus (10) direkt herzuleiten, indem man in dieser Gleichung Polarkoordinaten einführt. Wenn wir φ lediglich als Funktion von t und r betrachten, so ist

$$(20)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial r}\frac{r^2 - x^2}{r^3} \quad \text{u. s. w.},$$

also

$$(21)\qquad \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

und aus (10) wird

$$(22)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)$$

oder

$$r\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)$$

oder

$$(23)\qquad \frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}.$$

Die Integration liefert

$$(24)\qquad \varphi = \frac{1}{r}\psi_1(r - at) + \frac{1}{r}\psi_2(r + at),$$

worin ψ_1 und ψ_2 ganz willkürliche Funktionen sind.

Jeder der beiden Teile von (25) stellt ein System von Kugelwellen dar, die sich in der Richtung des Radius mit der Geschwindigkeit $\pm a$ fortpflanzen. Die Bewegung der Teilchen des Gases geht ebenfalls in der Richtung des Radius vor sich; mit zunehmendem Radius nimmt die Gröſse der Geschwindigkeit ab; das Gleiche gilt von den Verdichtungen.

§ 100.

Die Reflexion ebener Wellen.

1. Da sich alle uns bekannt gewordenen Lösungen der partiellen Differentialgleichung § 99, (10) durch eine im allgemeinen unendlich

grofse Zahl ebener Wellen darstellen läfst, so können wir die folgende Untersuchung auf ebene Wellen beschränken. Wir wollen annehmen, dafs die Ebene $z = 0$, d. h. die xy-Ebene, eine feste Wand darstelle, und und untersuchen nun eine ebene Wellenbewegung, welche auf der Seite der negativen z möglich ist. An der festen Wand müssen alle Normalgeschwindigkeiten der Null gleich werden, während die Verschiebungen in der Richtung der Wand selbst unbeeinflufst bleiben.

Mit den angegebenen Bedingungen verträgt sich die folgende Lösung der Gleichung § 99, (10):

$$\varphi = \psi(z - at) + \psi(-z - at); \tag{1}$$

für $z = 0$ verschwindet nämlich

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \psi'(z - at) - \psi'(-z - at) \tag{2}$$

identisch zu jeder Zeit. a nehmen wir als positiv an.

Um uns über den Charakter der durch (1) dargestellten Bewegung klar zu werden, denken wir uns die an sich ganz willkürliche Funktion ψ so bestimmt, dafs $\psi'(x)$ für $x = 0$ einen endlichen, sonst aber einen durchgehends verschwindend kleinen Wert annimmt. Das erste Glied auf der rechten Seite von (2) giebt, da $z \leq 0$ ist, nur für negative t endliche Werte, das zweite dagegen nur für positive t. Im Abstande z von der festen Wand findet Bewegung nur statt für die Zeit

$$t = \pm \frac{z}{a}. \tag{3}$$

Die Wellenbewegung schreitet, zu $t = -\infty$ im Unendlichen anfangend, mit der Geschwindigkeit a in der Richtung der z-Achse gegen die feste Wand fort, die sie zur Zeit $t = 0$ erreicht; für weiter wachsende t geht sie denselben Weg wieder rückwärts. Man sagt, die Wellenbewegung sei von der festen Wand reflektiert worden.

2. Allgemeiner wollen wir jetzt die durch das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \psi(Ax + z - at) + \psi(Ax - z - at) \tag{4}$$

dargestellte Bewegung betrachten; es folgt

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A\psi'(Ax + z - at) + A\psi'(Ax - z - at), \tag{5}$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \psi'(Ax + z - at) - \psi'(Ax - z - at). \tag{6}$$

Für $z = 0$ verschwindet w, jedoch nicht u, so dafs die durch die feste Wand veranlafste Bedingung befriedigt ist.

Die beiden Teile von φ repräsentieren zwei Wellenbewegungen, deren Fortschreitungsrichtungen der xz-Ebene parallel sind und mit der z-Richtung gleiche, jedoch umgekehrt gelegene Winkel bilden. Legt man ψ dieselbe Eigenschaft wie in der letzten Nummer bei, so schreitet die Bewegung in schiefer Richtung gegen die feste Wand vor, um von dieser

reflektiert zu werden. Dabei ergeben sich unmittelbar die bekannten Reflexionsgesetze:

Die Richtungen der ursprünglichen und der reflektierten Wellenbewegung sind zu derselben zur festen Wand normalen Ebene parallel; beide Richtungen bilden mit der Normalen zur festen Wand gleiche, aber entgegengesetzt gelegene Winkel.

§ 101.

Theorie der cylindrischen Pfeifen.

1. Bereits mehrfach hoben wir hervor, dafs alle periodischen Schwingungen, deren Dauer zwischen gewissen Grenzen liegt, in unserem Ohre, welchem sie durch ein Medium, das zu longitudinaler Wellenbewegung befähigt ist, vermittelt werden, die Empfindung eines bestimmten Tones hervorrufen. Auch Luftmengen — wir wollen die Luft hier als den gewöhnlichsten Vertreter der gasförmigen Flüssigkeiten immer allein hervorheben — können bei geeigneter Bewegung Töne hervorbringen. Eine feste Hülle von beliebiger Gestalt, welche eine Luftmenge ganz oder teilweise begrenzt, und innerhalb deren Vibrationen hervorgerufen werden können, welche Töne liefern, heifst eine Pfeife. Die innere Luftbewegung kann entweder durch Anblasen mittels einer Öffnung (Lippenpfeife) oder durch Berührung mit einem schwingenden festen Körper (Metallzunge, Stimmgabel) hervorgebracht werden (Zungenpfeife u. s. w.).

2. Wir wollen zunächst annehmen, dafs die Pfeife ein Cylinder von sehr kleinem, übrigens sonst beliebigem Querschnitt sei. Alsdann ist sehr nahezu eine Bewegung möglich, welche durchaus der Längsachse der Pfeife — der z-Achse — parallel vor sich geht und in sämtlichen Punkten jeder zu dieser Achse senkrechten Ebene die gleiche ist. Der Apparat heifst eine cylindrische Pfeife.

Nach § 99 haben wir in diesem Falle das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = \psi_1 (z + at) + \psi_2 (z - at), \tag{1}$$

welches den noch weiter zu präzisierenden Grenzbedingungen entsprechend zu spezialisieren ist. Für die Geschwindigkeit der Bewegung haben wir

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \psi_1' (z + at) + \psi_2' (z - at). \tag{2}$$

Diese Gleichung stimmt mit der in § 74, (18) für die Longitudinalschwingungen eines elastischen Stabes gefundenen so vollständig überein, dafs die dort gegebenen weiteren Entwicklungen unmittelbar auf unseren Fall übertragen werden können.

3. Die cylindrische Lippenpfeife, welche an dem einen, als vollständig offen zu betrachtenden Ende angeblasen wird, kann am anderen Ende geschlossen oder offen sein. Man unterscheidet hiernach die gedeckte

und die offene Pfeife. Die erste entspricht dem einseitig befestigten, die andere dem beiderseits unbefestigten Stabe. An einem geschlossenen Pfeifenende mufs jederzeit $w = 0$ sein. An einem offenen Ende kommuniziert die Pfeife mit der freien Luft, die ihre Dichtigkeit nicht ändert. Man nimmt daher an (Dan. Bernoulli, Euler, Lagrange), dafs auch die Luft der Pfeife an dem freien Ende keine Verdichtung erleiden könne. Da $u = v = 0$ ist, so ergiebt sich aus § 76, (10) hierfür die Grenzbedingung

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{3}$$

Freilich ist diese Annahme nicht vollkommen richtig, ein Umstand, der die Resultate der Theorie mit denen der wirklichen Ausführung nicht gänzlich übereinstimmen läfst.

Auch diese Grenzbedingungen sind dieselben, wie bei dem longitudinal schwingenden Stabe. An einem geschlossenen Pfeifenende entsteht ein Schwingungsknoten, an einem offenen ein Schwingungsbauch.

Sollen Theorie und Beobachtung einigermafsen in Einklang kommen, so mufs die Gröfse a der in § 99, 5 bezeichneten Korrektur unterworfen werden. Es ist also die durch Rechnung erhaltene Gröfse a mit $\sqrt{1,405}$ zu multiplizieren. Hiernach werden die Resultate richtig, wenn man in den Formeln

$$a = 332 \text{ Meter für die Sekunde als Zeiteinheit} \tag{4}$$

setzt.

4. Nach § 74, (20) würde die Schwingungsdauer des Grundtones einer beiderseits geschlossenen Pfeife, wie sie in Wirklichkeit nicht vorkommt,

$$T = \frac{2l}{a} \tag{5}$$

betragen, worin l die Länge der Pfeife bezeichnet. Nach den weiteren Untersuchungen von § 74 beträgt die Schwingungsdauer des Grundtones der (einseitig) gedeckten Pfeife von gleicher Länge

$$T = \frac{4l}{a}. \tag{6}$$

Die Schwingungsdauer der Obertöne beträgt

$$\frac{T}{3},\quad \frac{T}{5},\quad \frac{T}{7}, \ldots; \tag{7}$$

es treten also nur die ungeraden Obertöne auf.

Bei der offenen Pfeife, wo die beiden Enden Schwingungsbäuche aufweisen, ist die Schwingungsdauer des Grundtons

$$T = \frac{2l}{a}, \tag{8}$$

die der Obertöne sind

$$\frac{T}{2}, \quad \frac{T}{3}, \quad \frac{T}{4}, \ldots, \tag{9}$$

so dafs sämtliche Obertöne vorhanden sind.

Der Grundton der offenen Pfeife stimmt also mit demjenigen einer gedeckten Pfeife von der halben Länge überein; er ist die Oktave des Grundtones einer gleichlangen gedeckten Pfeife. Die Verschiedenheit der Obertöne verleiht beiden Pfeifenarten eine verschiedene Klangfarbe.

5. Ein weiterer, besonders interessanter Fall ist der, dafs in $z = 0$ die Pfeife fest verschlossen ist, während sich in $z = l$ ein um eine verschwindend kleine Strecke beweglicher Deckel befindet, der eine harmonische Bewegung in der z-Richtung ausführt. Seine Geschwindigkeit zur Zeit t möge durch

$$A \cos 2\pi n t \tag{10}$$

dargestellt sein, worin A und n Konstanten bezeichnen; die Schwingungsdauer des Deckels ist

$$\frac{1}{n}. \tag{11}$$

Man kann dieses Arrangement z. B. dadurch verwirklichen, dafs man eine Stimmgabel vor der Öffnung der Röhre in der Richtung der z-Achse schwingen läfst.

Den Bedingungen genügt zugleich mit der Differentialgleichung § 99, (9) das Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = -\frac{A \cos \frac{2\pi n z}{a} \cos 2\pi n t}{\frac{2\pi n}{a} \sin \frac{2\pi n l}{a}}. \tag{12}$$

Die Befriedigung der Differentialgleichung ist unmittelbar zu erweisen, und aufserdem verschwindet

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{A \sin \frac{2\pi n z}{a} \cos 2\pi n t}{\sin \frac{2\pi n l}{a}} \tag{13}$$

für $z = 0$ und nimmt für $z = l$ den Wert (10) an.

Aus (12) und (13) geht hervor, dafs die Luft in der Pfeife in eine Bewegung gerät, welche dieselbe Schwingungsdauer zeigt, wie der schwingende Deckel. Die Geschwindigkeit ist im allgemeinen endlich; nach (13) wird sie jedoch unendlich, wennn $\sin \frac{2\pi n l}{a} = 0$, d. h. ($k$ sei eine ganze Zahl)

$$n = \frac{ka}{2l} \tag{14}$$

ist. Der Vergleich mit (5) zeigt, dafs die Geschwindigkeit dann unendlich wird, wenn die Schwingungsdauer des Deckels mit

der Schwingungsdauer eines der Eigentöne (Grundton oder Oberton) der beiderseits geschlossen gedachten Pfeife übereinstimmt.

In Wirklichkeit wird freilich infolge von Reibung u. s. w. niemals ein Unendlichwerden der Schwingungsintensität erreicht. Das Resultat erklärt jedoch die bekannte Erscheinung, dafs eine einseitig geschlossene Röhre den Ton einer Stimmgabel, einer schwingenden Saite u. dgl., welche sich in der Nähe der Öffnung befindet, immer verstärkt, jedoch dann in ein auffallend starkes Mittönen gerät, wenn die Schwingungsdauer des schwingenden Gegenstandes der Schwingungsdauer eines der Eigentöne der Röhre gleich oder nahezu gleich wird.

Eine genauere Theorie der Pfeifen erfordert eine Berücksichtigung der Breitendimensionen der Pfeife, namentlich wenn diese nicht unbeträchtlich sind (kubische Pfeife); ferner ein Eingehen auf die Bewegung der freien Luft, welche an das offene Ende einer Pfeife angrenzt. Wir verweisen in Betreff der mannigfachen sich noch darbietenden Probleme auf die eingehehende Darstellung in Kirchhoff's Mechanik.

Übersichtstabelle über die Dimensionen der wichtigsten Ausdrücke der Mechanik.

Ausdruck	Dimension
Geschwindigkeit	lt^{-1}.
Geschwindigkeitspotential	l^2t^{-1}.
Winkelgeschwindigkeit	t^{-1}.
Beschleunigung	lt^{-2}.
Winkelbeschleunigung	t^{-2}.
Kraft	$lt^{-2}m$.
Druckkraft	$l^{-1}t^{-2}m$.
Spannung (eines Fadens)	$lt^{-2}m$.
Arbeit, lebendige Kraft, Potential	$l^2t^{-2}m$.
Bewegungsgröſse, Antrieb der Kraft	$lt^{-1}m$.
Gravitationskonstante f	$l^3t^{-2}m^{-1}$.
Dichtigkeit eines räumlichen Gebildes	$l^{-3}m$.
Dichtigkeit eines Flächengebildes	$l^{-2}m$.
Dichtigkeit eines linearen Gebildes	$l^{-1}m$.
Statisches (Drehungs-) Moment	$l^2t^{-2}m$.
Trägheitsmoment	l^2m.
Die Trägheitsmomente des Querschnitts eines Stabes (§ 71)	l^4.
Elastizitätsmodulus E; K	$l^{-1}t^{-2}m$.
Elastizitätskoeffizient n	lt^2m^{-1}.
Zweite Elastizitätskonstante μ, resp. ϑ	reine Zahl.
Konstante k der inneren Reibung einer Flüssigkeit	$l^{-1}t^{-1}m$.
Konstante $\varkappa$ der äuſseren Reibung einer Flüssigkeit	$l^{-2}t^{-1}m$.
Konstante A der Oberflächenspannung einer Flüssigkeit	$t^{-2}m$.

Alphabetisches Namen- und Sachregister des zweiten Bandes.

Berichtigungen.

Zu Band I.

p. 59, Z. 5 l.: Beachtung statt Beachtungen.

p. 71 ff.: Statt $\frac{d\mathfrak{A}_k}{da}$ u. s. w. sind die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial \mathfrak{A}_k}{\partial a}$ u. s. w. zu setzen.

p. 215, Z. 6 von unten l.: $\frac{1}{2}\sqrt{L}d\lambda_1$, $\frac{1}{2}\sqrt{M}d\lambda_2$, $\frac{1}{2}\sqrt{N}d\lambda_3$ statt $\sqrt{L}d\lambda_1$, $\sqrt{M}d\lambda_2$, $\sqrt{N}d\lambda_3$.

p. 307, Z. 16 l.: $\Omega = -\int \sigma \log r\, ds$ statt $\Omega = \int \sigma \log r\, ds$.

Zu Band II.

p. 2, Z. 17 von unten l.: unelastisch statt analytisch.
p. 49, unten l.: (4) statt (6).
p. 117, Anm. 1, l.: dynamische oder kinetische.
p. 145 ff. St. Venant statt St. Vénant.

